VISIT…

LANZAROTE

Caliente.com

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



JAMES CLERK MAXWELL

A TREATISE ON ELECTRICITY AND MAGNETISM

Volume I

ДЖЕЙМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ

ТРАКТАТ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ И МАГНЕТИЗМЕ

В ДВУХ ТОМАХ

Том I

ПЕРЕВОД:
Б. М. БОЛОТОВСКОГО, И. Л. БУРШТЕЙНА,
М. А. МИЛЛЕРА, Е. В. СУВОРОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ:
доктора физико-математических наук
М. Л. ЛЕВИНА,
доктора физико-математических наук
М. А. МИЛЛЕРА,
кандидата физико-математических наук
Е. В. СУВОРОВА



МОСКВА «НАУКА» 1989


ТРАКТАТ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ
* Д.К.МАКСВЕЛЛ *

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А. А. Баев (председатель), *И. Е. Дзялошинский, А. Ю. Ишлинский, С. П. Капица, И. Л. Кнунянц, С. Р. Микулинский, Д. В. Ознобишин* (ученый секретарь), *Л. С. Полак, Я. А. Смородинский, А. С. Спирин, И. Т. Фролов* (заместитель председателя), *А. Н. Шамин, И. Р. Шафаревич, А. Л. Яншин*

Дж. К. Максвелл. **Трактат об электричестве и магнетизме.** В двух томах. Т. I. М.: Наука, 1989.

ISBN 5—02—000042—6

Работа Д. К. Максвелла (1831—1879) об электричестве и магнетизме впервые была издана в 1873 г. Она содержит созданную Максвеллом теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория в настоящее время составляет фундамент современного естествознания. По своему значению для развития науки «Трактат» стоит в одном ряду с «Началами» Ньютона и «Экспериментальными исследованиями» Фарадея.

Издание рассчитано на физиков, историков науки и читателей, желающих ознакомиться с основными представлениями теории электромагнитного поля по трудам одного из ее создателей.

Рецензент:

академик *А. В. Гапонов-Грехов*

ДЖЕЙМС КЛЕРК МАКСВЕЛЛ

Трактат об электричестве и магнетизме

I

Утверждено к печати Редакционной коллегией серии «Классики науки»

Редактор издательства Г. Г. Гуськов. Художественный редактор М. Л. Храмцов. Технические редакторы З. Б. Павлюк, Т. С. Жарикова. Корректоры Н. Б. Габасова, Л. А. Стойкина

ИБ № 39868

Сдано в набор 17.11.88. Подписано к печати 14.04.89. Формат $70\times90^{1}/_{16}$. Бумага типографская № 2 Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 30,6. Усл. кр. отт. 32,01. Уч.-изд. л. 30,5. Тираж 3100 экз. Заказ № 377. Цена 3 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука» 117864, ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука»; Заказ 3677, 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 6

$М\frac{1604050000\text{-}191}{055(02)\text{-}89}$ 116—89, кн. 2

ISBN 5—02—000042—6

© Издательство «Наука» 1989

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

Выпуск в свет перевода «Трактата об электричестве и магнетизме» Д. К. Максвелла — необходимое (хотя и несколько запоздалое) пополнение русской научной библиотеки. С точки зрения научной информации мировое сообщество становится все менее и менее многоязычным, и уже сейчас представитель любой страны оказывается в состоянии принимать полноценное участие в научно-образовательном и творческом процессе, опираясь всего лишь на два-три языка, к числу которых относится и русский. В связи с этим на нашу науку накладываются определенные обязательства — создавать людям, избравшим русский язык в качестве основного, достаточно полное культурное обеспечение, включающее в себя возможность знакомства со всемирным наследием классиков естествознания. «Трактат» Максвелла составляет непременную часть этого наследия: он принадлежит к тем выдающимся произведениям цивилизации, которые, подобно «Началам» Ньютона, произвели крупномасштабные изменения в развитии естествознания и не только в части проникновения в тайны мироздания, но и в отношении совершенствования способов мышления, принципов «понимания понимания», новых подходов к методам познания природы.

Публиковавшиеся ранее отдельные главы «Трактата» и несколько вариантов перевода Предисловия, конечно же, не могли утолить любознательность и удовлетворить потребность как историков науки, так и просто тех ее тружеников, кто в своих профессиональных продвижениях привык общаться непосредственно с классиками, извлекать из первоисточников поучительные уроки творческих блужданий и терпеливого напряжения мыслей, сосредоточенных в главных направлениях поиска.

Тем более, что «Трактат» являет собой пример первого в истории физики объединения ранее разрозненных концепций в единую систему. Речь идет об электричестве, магнетизме и оптике. Сейчас, когда физики всех стран предпринимают штурм всеобщего объединения взаимодействий, «Трактат» обретает дополнительный, поучительный интерес, как первый (и сразу удачный!) опыт на этом пути. Удивительно и другое. В свое время «Трактат» считался по ряду причин необычно сложным даже для профессионалов,— в частности, многие читатели затруднялись в оценке его целостности и окончательности. В какой-то мере их нерасположение можно понять. Максвелл писал «Трактат» так, как читал лекции, творя по ходу изложения, не страшась излишеств или незавершенностей. Зато сейчас,

с высоты нашей электродинамической образованности, такая «рукописность» «Трактата» представляется нам даже выигрышной.

Инициатива перевода «Трактата» Максвелла исходила от Петра Леонидовича Капицы. Он предполагал даже написать предисловие к русскому изданию. К сожалению, это уже не может быть исполнено: П. Л. Капица ушел из жизни, и мы не знаем, как он оценил бы нашу работу сейчас, по ее завершении. Только из-за этой неуверенности мы не решились посвятить свою работу его памяти. Отношение Петра Леонидовича Капицы к «Трактату» не в последнюю очередь определялось еще и тем, что он много лет проработал в Кавендишской лаборатории, и если бы обстоятельства сложились иначе, то П. Л. Капица стал бы Кавендишским профессором после Э. Резерфорда. Напомним, что первым Кавендишским профессором и основателем Кавендишской лаборатории был сам Максвелл.

Перевод выполнен с третьего английского издания 1891 г. Оно несколько отличается от двух предшествующих, первое из которых было выпущено в 1873 г. самим Максвеллом, а второе, посмертное, отредактировано проф. У. Нивеном. Редактором третьего издания, приобретшего репутацию канонического, был Д. Д. Томсон.

Трактат состоит из двух томов. Каждому тому предпослано содержание, где приводятся пояснения (в виде ключевых мыслей) соответствующих параграфов (пунктов). Сами же параграфы в тексте трактата пронумерованы непрерывно и — за редким исключением — никак не озаглавлены; названиями снабжены только части (их четыре) и главы. Первый том объединяет Электростатику (часть I) и Постоянные токи (часть II), второй том — Магнитостатику (часть III) и Электродинамику (часть IV). Максвелловская структура «Трактата» сохранена с той нетронутостью, с которой это вообще можно сделать при переводе с одного языка на другой. Это относится и к предметно-именному указателю, составленному самим Максвеллом весьма своеобразно, указатель не подчинен какому-либо единому правилу.

Далее, чтобы не отвлекать читателя от последовательного восприятия собственно максвелловского текста, мы перенесли в конец второго тома предисловия ко второму и третьему изданию, написанные соответственно Нивеном и Томсоном. Там же помещены комментарии и редакторское послесловие, где даны пояснения особенностей (структурных, стилистических, научных) «Трактата» и тех принципов, которых мы придерживались при его переводе.

В работе над русским текстом «Трактата» участвовала «небольшая бригада» переводчиков и редакторов. Мы стремились как-то сгладить разнородности манер и сохраняем иллюзии, что читатель не обнаружит стилистического разнобоя в главах, переведенных разными людьми. Над электростатическим разделом

«Трактата» работал И. Л. Бурштейн, широко образованный и эрудированный физик, знаток электродинамики, имевший большой опыт перевода научной и научно-исторической литературы. Но ему не суждено было увидеть результаты этого его труда: он скончался незадолго до выпуска «Трактата» в свет. Токовый раздел переведен Б. М. Болотовским, а весь второй том, равно как Предварительная глава и вся сопутствующая основному тексту «атрибутика» — М. А. Миллером и Е. В. Суворовым.

Редакторы и переводчики надеются на жизнеспособность максвелловского «Трактата» на русском языке.

Редакторы и переводчики

Март 1989 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Тот факт, что у некоторых тел после их натирания появляется способность притягивать другие тела, был известен еще в древности. В наше время обнаружено множество других разнообразных явлений и установлено, что они связаны с этими явлениями притяжения. Все они были отнесены к классу *Электрических* явлений, названных по имени янтаря — ἤλεκτρον (электрон) — вещества, для которого было впервые дано их описание.

Давно известно также, что феномен действия на расстоянии проявляют и другие тела, в частности магнитный железняк или куски железа и стали, подвергнутые определенной обработке. Оказалось, что эти явления вместе с другими им родственными явлениями отличаются от электрических; они были отнесены к классу явлений *Магнитных*, поскольку в фессальской магнезии был обнаружен магнитный железняк — μάγνης (магнес).

В дальнейшем было установлено, что явления этих двух классов связаны между собой, и эти связи между различными явлениями обоих классов, насколько их удалось выявить, составили содержание учения об электромагнетизме.

В нижеследующем трактате я намерен описать наиболее важные из этих явлений, показать, как они могут быть подвергнуты измерениям, а также проследить математические связи между измеряемыми величинами. Получив таким образом данные для математической теории электромагнетизма и показав, как эта теория может быть применена к расчету явлений, я постараюсь ясно, насколько смогу, осветить взаимосвязи между математической формой этой теории и математической формой основополагающей науки Динамики, чтобы в какой-то мере подготовиться к выделению того класса динамических явлений, среди которого следует искать иллюстрации или объяснения явлений электромагнитных.

При описании явлений я буду отбирать те из них, которые наиболее отчетливо иллюстрируют основные идеи теории, опуская другие явления или откладывая их рассмотрение до той поры, пока читатель не станет более подготовленным.

С математической точки зрения наиболее важным понятием при рассмотрении любого явления является понятие измеряемой величины. Поэтому я буду подходить к электрическим явлениям главным образом с точки зрения их измеримости, описывая методы измерения и определяя эталоны, от которых они зависят.

Применяя математику для вычисления электрических величин, я буду стараться в первую очередь делать наиболее общие выводы из данных, имеющихся в нашем распоряжении, и уже на следующем этапе применять полученные результаты к избранным простейшим случаям. Я буду по возможности избегать касаться

тех вопросов, которые, хотя и способствовали выявлению искусности математиков, но не расширили наших научных познаний.

Внутренние взаимосвязи различных отраслей науки, которую нам предстоит изучить, более многочисленны и сложны, чем у любой другой из развитых до сих пор наук. Ее внешние связи, с одной стороны, с динамикой, а с другой — с теплотой, светом, химическим действием и строением тел, по-видимому, указывают на особую важность науки об электричестве, как подспорья в истолковании природы.

Поэтому мне кажется, что изучение электромагнетизма во всей его полноте приобрело сейчас первостепенное значение, являясь средством стимулирования прогресса науки.

Математические законы явлений обоих классов разработаны в значительной степени удовлетворительно.

Исследованы также и связи между этими классами явлений, а вероятность того, что экспериментальные законы обладают строгой точностью, значительно возросла благодаря более широким знаниям об их соотношениях друг с другом.

Наконец, удалось достигнуть известного прогресса в сведении электромагнетизма к динамике, показав, что ни одно электромагнитное явление не противоречит предположению о том, что оно определяется чисто динамическим действием.

Однако все, что было сделано до сих пор, никоим образом не истощило поля деятельности в области электричества, а скорее открыло его, указав на объекты для изучения и снабдив нас средствами исследований.

Вряд ли необходимо распространяться о полезности результатов исследований по магнетизму для навигации, о важности знания истинного направления стрелки компаса и влияния железа на корабле. Но усилия тех людей, которые посредством магнитных наблюдений старались сделать навигацию более надежной, одновременно значительно ускорили прогресс чистой науки.

Гаусс, будучи членом Германского магнитного союза, вложил свой могучий интеллект в теорию магнетизма и методы его наблюдения. И он не только многое привнес в наше знание теории притяжений, но и перестроил всю науку о магнетизме в отношении используемых приборов, методов наблюдения и расчета результатов, так что его труды по земному магнетизму могут быть взяты за образец физического исследования для всех, кто занимается измерением любых сил в природе.

Важные применения электромагнетизма в телеграфии также оказали обратное воздействие на чистую науку, придав точным электрическим измерениям коммерческую ценность и предоставив возможность исследователям в области электричества использовать аппаратуру в масштабах, значительно превышающих мас-

штабы обычной лаборатории. Этот спрос на знания по электричеству, а также экспериментальные возможности их приобретения уже возымели весьма значительные последствия как для стимулирования активности передовых исследователей в области электричества, так и для распространения среди практиков такой степени точности знания, которая, видимо, должна привести к общему научному прогрессу всей инженерной профессии.

Существует несколько трактатов, где электрические и магнитные явления изложены популярно. Однако они не отвечают потребностям тех людей, которые лицом к лицу сталкиваются с величинами, подлежащими измерениям, и чей ум не остается удовлетворенным опытами в лекционном зале.

Существует также масса математических работ, представляющих огромную важность для науки об электричестве, но они упрятаны в объемистых трудах ученых обществ; они не образуют единой связанной системы, очень неравноценны по своим достоинствам и в большинстве своем находятся за пределами понимания кого бы то ни было, кроме признанных (professed) математиков.

Поэтому я полагал, что будет полезен трактат, который имел бы главной своей задачей охват всего предмета в целом с общей методической позиции, трактат, в котором было бы указано, как каждая часть этого предмета становится доступной проверке путем действительных измерений.

Общее построение трактата существенно отличается от построения нескольких превосходных трудов по электричеству, в большинстве своем опубликованных в Германии. Может показаться даже, что я несправедливо поскупился отдать должное исследованиям некоторых знаменитых ученых в области электричества и математики. Одна из причин состоит в том, что, прежде чем начать изучение электричества, я решил не читать никаких математических работ по этому предмету, пока не проштудирую вначале «Экспериментальные исследования по электричеству» Фарадея («Experimental Researches in Electricity»).

Мне было известно, что между пониманием явлений Фарадеем и математиками предполагается существование таких различий, что ни он, ни они не были удовлетворены языком друг друга. У меня было также убеждение в том, что это расхождение не возникло вследствие чьей-либо неправоты. Впервые меня убедил в этом сэр Уильям Томсон [1], советам и помощи которого, равно как и его опубликованным работам, я обязан большей части знаний, приобретенных мною по данному предмету.

По мере изучения Фарадея я осознал, что его подход к пониманию явлений тоже является математическим, хотя и не представлен в общепринятой форме

---

[1] Я пользуюсь случаем выразить свою признательность сэру У. Томсону и профессору Тэту (Tait) за многие ценные предложения, сделанные во время печатания этой книги.

через математические символы. Я нашел также, что его методы могут быть выражены в обычных математических формах и, таким образом, сопоставлены с методами признанных математиков.

Так, например, Фарадей своим мысленным взором видел пронизывающие все пространство силовые линии там, где математики видели центры сил, притягивающие на расстоянии. Фарадей видел среду там, где они не видели ничего, кроме расстояния. Фарадей усматривал местонахождение явлений в тех реальных процессах, которые происходят в среде, а они довольствовались тем, что нашли его в силе (power) действия на расстоянии, которая прикладывается к электрическим жидкостям.

Когда я облек все то, что считал идеями Фарадея, в математическую форму, то обнаружил, что в целом результаты обоих подходов совпадают, так что оба метода объясняют одни и те же явления и выводят одни и те же законы действия; но методы Фарадея напоминают те, в которых, начиная с общего, путем анализа приходят к частному, тогда как обычные математические методы основаны на принципе отправления от частного и построения общего путем синтеза.

Я обнаружил также, что некоторые из наиболее плодотворных методов исследования, открытых математиками, могли бы быть выражены в терминах представлений, заимствованных у Фарадея, значительно лучше, чем они выражались в их оригинальной форме.

Так, например, вся теория потенциала, рассматриваемого в качестве некоторой величины, удовлетворяющей определенному дифференциальному уравнению в частных производных, по существу относится к методу, названному мною фарадеевским. Согласно же другому методу потенциал, если его вообще следует вводить, должен рассматриваться как результат суммирования зарядов электризованных частиц, каждый из которых поделен на его расстояние до заданной точки. Поэтому многие из математических открытий, сделанных Лапласом, Пуассоном, Грином и Гауссом, занимают должное место в этом трактате и находят соответствующее свое выражение на языке представлений, в основном заимствованных у Фарадея.

Огромный прогресс учения об электричестве был достигнут главным образом в Германии благодаря тем, кто культивировал теорию действия на расстоянии. Ценные электрические измерения Вебера интерпретируются им в соответствии с этой теорией, а электромагнитные воззрения, которые исходили от Гаусса и были продолжены Вебером, И. и К. Нейманами, Лоренцом и другими, опирались на теорию действия на расстоянии, но, правда, действия, зависящего либо непосредственно от относительной скорости частиц, либо от постепенного распространения чего-либо — потенциала или силы — от одной частицы к другой. Тот большой успех, которого достигли эти выдающиеся люди в применении матема-

тики к электрическим явлениям, придает, и это естественно, дополнительный вес их теоретическим построениям, и поэтому те, кто при изучении электричества обращаются к ним, как к величайшим авторитетам в области математической теории электричества, должны бы, вероятно, впитать в себя, наряду с их математическими приемами, также и их физические гипотезы.

Эти физические гипотезы, однако, совершенно чужды принятому мною взгляду на вещи. Одна из целей, которую я преследую, состоит в том, чтобы дать возможность людям, пожелавшим изучить электричество, увидеть, читая этот трактат, что существует и другой способ рассмотрения данного предмета, не менее пригодный для объяснения явлений, и хотя местами, как может показаться, менее определенный, но, я думаю, более достоверно соответствующий нашим истинным знаниям как в том, что утверждается, так и в том, что остается неразрешенным.

Более того, с общенаучной (philosophical) точки зрения было бы очень важно провести сравнение этих двух методов — ведь каждый из них преуспел в объяснении главных электромагнитных явлений, в рамках обоих методов была предпринята попытка объяснить распространение света как явления электромагнитного и фактически вычислена его скорость. В то же время их основные взгляды на то, что происходит в действительности, а также большая часть вторичных представлений о соответствующих величинах коренным образом различаются.

Поэтому я принял на себя скорее роль адвоката, чем судьи, и скорее проиллюстрировал примерами один из этих методов, чем пытался дать беспристрастное описание обоих. Я не сомневаюсь в том, что метод, названный мною немецким, также найдет себе сторонников и будет изложен с мастерством, достойным его изобретательности.

Я не пытался дать исчерпывающего перечисления электромагнитных явлений, экспериментов и приборов. Изучающим эти предметы и желающим прочитать все известное о них большую помощь окажет «Трактат об электричестве» профессора А. де ля Рива (A. de la Rive, «Traité d'Electricitè»), а также несколько немецких трактатов, таких, как «Гальванизм» Видемана (Wiedemann, «Galvanismus»), «Электризация трением» Рисса (Riess, «Reibungselelektricität»), «Введение в электростатику» Бэра (Beer, «Einleitung in die Elektrostatik») и др.

Я почти целиком ограничивался математической трактовкой предмета, но рекомендовал бы изучающему его, после того как он усвоит — по возможности экспериментально,— какие явления следует наблюдать, внимательно прочитать «Экспериментальные исследования по электричеству» Фарадея. Он найдет там строго современный исторический отчет о некоторых величайших открытиях и исследованиях в области электричества, выполненных в том порядке и в той последовательности, которые едва ли могли быть улучшены, даже если заранее были бы известны их результаты; они изложены языком человека, который уде-

лял методике точного описания научных операций и их результатов много внимания [2].

Чтение оригинальных трудов дает изучающему любой предмет большое преимущество, ибо наука всегда наиболее полно усваивается в стадии зарождения. В случае «Исследований» Фарадея сделать это сравнительно легко — они опубликованы отдельными частями, и их можно читать последовательно. Если чем-то из написанного здесь мною я смогу облегчить изучающему понимание фарадеевских способов мыслить и выражаться, то сочту выполненной одну из главных целей своих, а именно передачу другим того восхищения, которое испытал я сам при чтении «Исследований» Фарадея.

Описание явлений и элементов теории по каждому вопросу можно найти в первых главах каждой из четырех частей, на которые разделен трактат. Здесь изучающий обнаружит достаточно материала для элементарного знакомства со всем предметом науки.

Остальные главы каждой части охватывают более сложные разделы теории, процессы численного расчета, приборы и методику экспериментального исследования.

Соотношения между электромагнитными явлениями и явлениями излучения, теория молекулярных электрических токов и результаты размышлений о природе действия на расстоянии рассматриваются в последних четырех главах второго тома.

Джеймс Клерк Максвелл

1 февраля 1873 года

---

[2] «Жизнь и письма Фарадея», т. I, с. 395.

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ГЛАВА

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН

1. Выражение для величины состоит из двух компонент — численного значения и наименования конкретной единицы 29
2. Размерности производных величин 29
3—5. Три основные единицы — длина, время, масса .. .. 30—31
6. Производные единицы 32
7. Физическая непрерывность и разрывность 33
8. Разрывность функции более чем одной переменных 34
9. Периодические и кратные функции 34
10. Отношения физических величин к направлениям в пространстве 35
11. Значение слов скаляр и вектор 35
12. Разделение физических векторов на два класса — силы и потоки 36
13. Соотношение между соответствующими векторами двух классов 37
14. Линейное интегрирование соответствует силам, поверхностное — потокам 38
15. Продольные и вращательные векторы 38
16. Криволинейные интегралы и потенциалы 39
17. Гамильтоново выражение для соотношения между силой и ее потенциалом 40
18. Циклические области и топология 41
19. Потенциал в ациклической области однозначен 42
20. Система значений потенциала в циклической области 43
21. Поверхностные интегралы 44
22. Поверхности, трубки и линии тока 46
23. Правовинтовые и левовинтовые соотношения в пространстве 49
24. Преобразование криволинейного интеграла в поверхностный .. 50
25. Действие гамильтонова оператора ∇ на векторную функцию .. 52
26. Природа оператора ∇^2 53

ЧАСТЬ I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ГЛАВА I

ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЙ

27. Электризация трением. Существует два вида электризации, называемые стеклообразной и смолообразной или положительной и отрицательной 55
28. Электризация через индукцию 56
29. Электризация через проводимость. Проводники и изоляторы .. 56

30. При электризации трением количество положительной электризации равно количеству отрицательной 57
31. Как зарядить сосуд количеством электричества, равным, но противоположным количеству электричества электризующего тела 57
32. Как полностью разрядить проводник в металлический сосуд .. 58
33. Обнаружение электризации при помощи электроскопа с золотым листком 58
34. Электризация, рассматриваемая как величина измеримая, может быть названа электричеством 59
35. Электричество можно рассматривать как величину физическую 59
36. Теория двух жидкостей 60
37. Теория одной жидкости 62
38. Измерение силы между электризованными телами 63
39. Связь между этой силой и количеством электричества 64
40. Изменение силы с расстоянием 65
41, 42. Определение электростатической единицы электричества. Ее размерность 65
43. Доказательство закона для электрической силы 66
44. Электрическое поле 66
45. Электродвижущая сила и потенциал 67
46. Эквипотенциальные поверхности. Пример их использования при рассуждениях об электричестве 68
47. Линии силы 69
48. Электрическое натяжение 69
49. Электродвижущая сила 70
50. Емкость проводника. Электрические накопители 70
51. Свойства тел. Сопротивление 70
52. Удельная индуктивная способность диэлектрика 72
53. «Поглощение» электричества 72
54. Невозможность абсолютного заряда 73
55. Пробой. Свечение 74
56. Щетка 76
57. Искра 76
58. Электрические явления в турмалине 76
59. План трактата и сводка его результатов 77
60. Электрическая поляризация и смещение 79
61. Движение электричества подобно движению несжимаемой жидкости 81
62. Особенности теории в этом трактате 81

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

63. Определение электричества как математической величины .. 83
64. Объемная плотность, поверхностная плотность и линейная плотность 84
65. Определение электростатической единицы электричества .. 85
66. Закон для силы между электризованными телами 85

67. Результирующая сила между двумя телами .. 86
68. Результирующая напряженность в точке .. 86
69. Линейный интеграл от электрической напряженности; электродвижущая сила .. 87
70. Электрический потенциал .. 88
71. Результирующая напряженность, выраженная через потенциал .. 89
72. Потенциал всех точек проводника одинаков .. 89
73. Потенциал, обусловленный неэлектризованной системой .. 90
74а. Доказательство закона обратного квадрата. Эксперименты Кавендиша .. 90
74б. Эксперименты Кавендиша, повторенные в видоизмененной форме .. 91
74в, г, д. Теория экспериментов .. 92—94
75. Поверхностный интеграл от электрической индукции .. 95
76. Индукция через замкнутую поверхность, обусловленная одним силовым центром .. 95
77. Обобщение Пуассоном уравнения Лапласа .. 96
78а, б, в. Условия, которые должны быть выполнены на электризованной поверхности .. 97—99
79. Результирующая сила, действующая на электризованную поверхность .. 100
80. Электризация проводника целиком сосредоточена на его поверхности .. 101
81. Распределение электричества на линиях или в точках физически невозможно .. 102
82. Линии электрической индукции .. 103
83а. Удельная индуктивная способность .. 104
83б. Кажущееся распределение электричества .. 105
Приложение к главе II .. 106

ГЛАВА III

О РАБОТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛ И ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПРОВОДНИКОВ

84. О суперпозиции электризованных систем. Выражение для энергии системы проводников .. 107
85а. Изменение энергии при переходе из одного состояния в другое .. 109
85б. Соотношения между потенциалами и зарядами .. 109
86. Теоремы взаимности .. 109
87. Теория системы проводников. Коэффициенты потенциала. Емкость. Коэффициенты индукции .. 111
88. Размерность коэффициентов .. 113
89а. Необходимые соотношения между коэффициентами потенциала .. 113
89б. Соотношения, получаемые из физических соображений .. 114
89в. Соотношения между коэффициентами емкости и индукции .. 114
89г. Приближенное определение емкости одного проводника .. 115
89д. Изменение коэффициентов потенциала другим проводником .. 115
90а. Приближенное определение коэффициентов емкости и индукции двух проводников .. 116
90б. Аналогичное определение для двух конденсаторов .. 116

91. Относительные величины коэффициентов потенциала 118
92. ... и индукции 118
93а. Выражение для механической силы, действующей на проводник, через заряды различных проводников системы 118
93б. Теоремы о квадратичных функциях 119
93в. Работа, совершаемая электрическими силами при смещении системы, когда потенциалы поддерживаются постоянными 119
94. Сравнение электризованных систем 120

ГЛАВА IV

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

95а, б. Два противоположных метода рассмотрения электрических проблем .. . . 121—122
96а. Теорема Грина: 123
96б. ... когда одна из функций многозначна 125
96в. ... когда область многосвязна 125
96г. ... когда одна из функций обращается в области в бесконечность 126
97а, б. Применения метода Грина 127
98. Функция Грина 129
99а. Энергия системы, выраженная в виде объемного интеграла .. 130
99б. Доказательство единственности решения для потенциала, когда его значение задано в каждой точке замкнутой поверхности 131
100а—д. Теорема Томсона .. .. 132—135
101а—з. Выражение для энергии, когда диэлектрические постоянные различны в разных направлениях. Обобщение теоремы Грина на гетерогенную среду .. .. 136—140
102а. Метод отыскания предельных значений электрических коэффициентов 141
102б. Приближенное решение задач о распределении электричества на проводниках при заданных потенциалах 142
102в. Приложение к случаю конденсатора со слегка изогнутыми пластинами 144

ГЛАВА V

МЕХАНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

103. Выражение для силы в каждой точке среды через потенциалы, обусловленные наличием двух систем 146
104. ... через потенциалы, возникающие от обеих систем 147
105. Природа напряжения в среде, которое создавало бы такую же силу 147
106. Дальнейшее определение типа напряжения 149
107. Видоизменение выражений на поверхности проводника 150
108. Обсуждение интеграла п. 104, выражающего силу при интегрировании по всему пространству 152
109. Утверждения Фарадея относительно продольного натяжения и поперечного давления линий силы 153
110. Возражения против напряжения в рассматриваемой жидкости .. 153
111. Утверждение теории электрической поляризации 154

ГЛАВА VI

О ТОЧКАХ И ЛИНИЯХ РАВНОВЕСИЯ

112. Условия для точки равновесия 156
113. Число точек равновесия 157
114. В точке или на линии равновесия имеется коническая точка или самопересечение эквипотенциальной поверхности 158
115. Углы, под которыми эквипотенциальная поверхность пересекает сама себя 158
116. Равновесие электризованного тела не может быть устойчивым .. 159

ГЛАВА VII

ФОРМЫ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЛИНИЙ ИНДУКЦИИ В ПРОСТЫХ СЛУЧАЯХ

117. Практическая важность знания этих форм в простых случаях 161
118. Два точечных заряда, отношение 4 : 1 (Рис. I) 162
119. Два точечных заряда, отношение 4 : —1. (Рис. II) 163
120. Точечный заряд в однородном поле силы. (Рис. III) 163
121. Три точечных заряда. Две сферических эквипотенциальных поверхности. (Рис. IV) 164
122. Применение Фарадеем понятия линий силы 164
123. Метод, использованный при построении диаграмм 165

ГЛАВА VIII

ПРОСТЫЕ СЛУЧАИ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ

124. Две параллельные плоскости 168
125. Две концентрические сферические поверхности 169
126. Две коаксиальные цилиндрические поверхности 171
127. Продольная сила, действующая на цилиндр, концы которого окружены цилиндрами с разными потенциалами 171

ГЛАВА IX

СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

128. Гейне, Тодхантер, Феррес 173
129а. Особые точки 173
129б. Определение осей 173
129в. Построение точек различных порядков 174
129г. Потенциал таких точек. Поверхностные гармоники Y_n 175
130а. Пространственные гармоники $H_n=r^nY_n$ 176
130б. В пространственной гармонике n-го порядка имеется $2n+1$ независимых постоянных 176
131а. Потенциал, обусловленный сферической оболочкой 177
131б. ... выраженный через гармоники 177
131в. Взаимный потенциал оболочки и внешней системы 178
132. Значение $\iint Y_mY_nds$ 178
133. Тригонометрические выражения для Y_n 179
134. Значение $\iint Y_mY_nds$ при $n=m$ 181

135а. Частный случай, когда Y_m — зональная гармоника 181
135б. Разложение Лапласа для поверхностной гармоники 182
136. Сопряженные гармоники 183
137. Стандартные гармоники произвольного порядка 184
138. Зональные гармоники 184
139. Коэффициент Лапласа или биаксиальная гармоника 185
140а. Тессеральные гармоники. Их тригонометрическое разложение .. 185
140б. Обозначения, использованные различными авторами 188
140в. Виды тессеральных и секторных гармоник 188
141. Поверхностный интеграл от квадрата тессеральной гармоники .. 189
142а. Определение заданной тессеральной гармоники в разложении функции 189
142б. То же самое через производные от функции 190
143. Рисунки различных гармоник 190
144а. Сферический проводник в заданном поле силы 191
144б. Сферический проводник в поле с известной функцией Грина 191
145а. Распределение электричества на почти сферическом проводнике 193
145б. ... под действием внешней электрической силы 195
145в. ... окруженного почти сферическим и почти концентрическим сосудом 196
146. Равновесие электричества на двух сферических проводниках .. 197

ГЛАВА X
КОНФОКАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

147. Линии пересечения двух систем и их сечение третьей системой .. 202
148. Характеристическое уравнение для V в эллипсоидальных координатах 203
149. Выражения α, β, γ через эллиптические функции 204
150. Частные решения для распределения электричества на конфокальных поверхностях и их предельные формы 205
151. Непрерывное преобразование в фигуру вращения вокруг оси z .. 207
152. Преобразование в фигуру вращения вокруг оси x 208
153. Преобразование в систему конусов и сфер 209
154. Конфокальные параболоиды 210

ГЛАВА XI
ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

155. Томсоновский метод электрических изображений 211
156. Для двух точечных зарядов противоположного знака, не равных по величине, поверхность нулевого потенциала является сферой 212
157. Электрические изображения 213
158. Распределение электричества на поверхности сферы 214
159. Изображение произвольно заданного распределения электричества 215
160. Результирующая сила между точечным зарядом и сферой 215
161. Изображения в бесконечной проводящей плоскости 217
162. Электрическая инверсия 217
163. Геометрические теоремы об инверсии 219

164. Применение метода к задаче п. 158 219
165. Конечные системы последовательных изображений 220
166. Случай двух сферических поверхностей, пересекающихся под углом π/n 222
167. Перечисление случаев, в которых число изображений конечно .. 223
168. Случай двух сфер, пересекающихся ортогонально 223
169. Случай трех сфер, пересекающихся ортогонально 226
170. Случай четырех сфер, пересекающихся ортогонально 227
171. Бесконечная последовательность изображений. Случай двух концентрических сфер 228
172. Две произвольные непересекающиеся сферы 229
173. Расчет коэффициентов емкости и индукции 231
174. Расчет зарядов сфер и силы их взаимодействия 232
175. Распределение электричества на двух соприкасающихся сферах. Пробная сфера 233
176. Исследование Томсона о заряженной сферической чаше 235
177. Распределение на эллипсоиде и круглом диске с потенциалом V .. 236
178. Точечный заряд, находящийся на продолжении плоской или сферической поверхности, индуцирует электричество на изолированном диске или чаше 236
179. В предположении, что остальная часть сферы однородно заряжена 237
180. Чаша имеет потенциал V и свободна от внешнего воздействия 237
181. Индукция на чашу произвольно расположенным точечным зарядом 238

ГЛАВА XII

СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

182. Случаи, в которых величины являются функциями только x и y .. 239
183. Сопряженные функции 240
184. Сопряженные функции можно складывать или вычитать 241
185. Сопряженные функции от сопряженных функций сами являются сопряженными 241
186. Преобразование уравнения Пуассона 242
187. Дополнительные теоремы о сопряженных функциях 243
188. Инверсия в двух измерениях 243
189. Электрические изображения в двух измерениях 244
190. Преобразование Неймана в этом случае 245
191. Распределение электричества вблизи края проводника, образованного двумя плоскими поверхностями 246
192. Эллипсы и гиперболы. (Рис. X) 247
193. Преобразование в этом случае. (Рис. XI) 248
194. Применение к двум случаям протекания электричества по проводящему листу 249
195. Применение к двум случаям электрической индукции 250
196. Емкость конденсатора, состоящего из круглого диска между двумя бесконечными плоскостями 251
197. Случай последовательности эквидистантных плоскостей, отсекаемых перпендикулярной им плоскостью 252
198. Случай волнистой поверхности 253

199. Случай одиночной прямой канавки 253
200. Модификация результатов для круговой канавки 254
201. Применение к защитному кольцу сэра У. Томсона 255
202. Случай двух параллельных пластин, обрезанных перпендикулярной им плоскостью. (Рис. XII) 256
203. Случай решетки из параллельных проводов. (Рис. XIII) 257
204. Переход от одиночного заряженного провода к случаю решетки .. 258
205. Применение решетки в качестве экрана для защиты тела от электрического влияния 258
206. Применение метода аппроксимации к случаю решетки 260

ГЛАВА XIII

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

207. Фрикционная электрическая машина 262
208. Электрофор Вольта 263
209. Создание электризации при помощи механической работы. Вращающийся удвоитель Никольсона 264
210. Принцип Варлея и электрические машины Томсона 264
211. Томсоновская машина с водяными каплями 266
212. Электрическая машина Гольтца 266
213. Теория регенераторов в применении к электрическим машинам .. 267
214. Об электрометрах и электроскопах. Приборы для индикации и нуль-методы. Различие между регистрацией и измерением 269
215. Кулоновские крутильные весы для измерения зарядов 270
216. Электрометры для измерения потенциалов. Электрометры Сноу-Харриса и Томсона 271
217. Принцип защитного кольца. Абсолютный электрометр Томсона .. 272
218. Гетеростатический метод 275
219. Самодействующие электрометры. Томсоновский квадрантный электрометр 276
220. Измерение электрического потенциала маленького тела 279
221. Измерение потенциала в точке, находящейся в воздухе 279
222. Измерение потенциала проводника без соприкосновения с ним .. 280
223. Измерение поверхностной плотности электризации. Пробная плоскость 281
224. Полусфера, используемая в качестве пробной 282
225. Круглый диск 283
226. Об электрических накопителях. Лейденская банка 284
227. Накопители с измеримой емкостью 285
228. Накопитель с защитным кольцом 286
229. Сравнение емкостей накопителей 287

ЧАСТЬ II

ЭЛЕКТРОКИНЕМАТИКА

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

230. Ток, создаваемый при разряде проводников 290
231. Перенос электризации 290

232. Описание вольтовой батареи .. 291
233. Электродвижущая сила .. 291
234. Получение постоянного тока .. 292
235. Свойства тока .. 292
236. Электролитическое действие .. 292
237. Интерпретация членов, связанных с электролизом .. 293
238. Различные способы прохождения тока .. 293
239. Магнитное действие тока .. 294
240. Гальванометр .. 294

ГЛАВА II

ПРОВОДИМОСТЬ И СОПРОТИВЛЕНИЕ

241. Закон Ома .. 295
242. Образование тепла током. Закон Джоуля .. 296
243. Аналогия между прохождением электричества и распространением тепла .. 297
244. Различия между этими двумя классами явлений .. 297
245. Утверждение Фарадея о невозможности абсолютного заряда .. 297

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА МЕЖДУ ТЕЛАМИ, НАХОДЯЩИМИСЯ В КОНТАКТЕ

246. Закон Вольта о контактной силе между различными металлами при одной и той же температуре .. 298
247. Действие электролитов .. 299
248. Вольтов ток Томсона, в котором часть химического действия совершает гравитация .. 299
249. Явление Пельтье. Подсчет контактной электролитической электродвижущей силы .. 299
250. Открытие Зеебеком термоэлектрических токов .. 301
251. Закон Магнуса для тока одного металла .. 301
252. Открытие Каммингом термоэлектрических инверсий .. 302
253. Выводы Томсона из этих фактов и открытие обратимых тепловых эффектов для электрических токов в меди и железе .. 302
254. Закон Тэта для электродвижущей силы термоэлектрической пары 303

ГЛАВА IV

ЭЛЕКТРОЛИЗ

255. Закон электрохимических эквивалентов Фарадея .. 304
256. Теория молекулярного возбуждения Клаузиуса .. 305
257. Электролитическая поляризация .. 306
258. Проверка электролита поляризацией .. 306
259. Трудности в теории электролиза .. 307
260. Молекулярные заряды .. 307
261. Вторичные эффекты, наблюдаемые у электродов .. 309
262. Сохранение энергии при электролизе .. 310
263. Измерение химического сродства как электродвижущей силы .. 311

ГЛАВА V
ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

264. Трудности применения закона Ома к электролитам 313
265. Тем не менее закон Ома применим 313
266. Действие поляризации, отличное от действия сопротивления 313
267. Поляризация, обусловленная присутствием ионов на электродах. Ионы не находятся в свободном состоянии 314
268. Связь между электродвижущей силой поляризации и состоянием ионов на электродах 314
269. Диссипация ионов и потеря поляризации 315
270. Предел поляризации 315
271. Сравнение вторичного столба Риттера и лейденской банки 316
272. Постоянные вольтовы элементы. Элемент Даниэля 318

ГЛАВА VI
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОКОВ

273. Линейные проводники 322
274. Закон Ома 322
275. Последовательное соединение линейных проводников 322
276. Параллельное соединение линейных проводников 323
277. Сопротивление проводников однородного сечения 324
278. Размерности величин, входящих в закон Ома 324
279. Удельное сопротивление и проводимость в электромагнитной мере 325
280. Общий случай системы линейных проводников 325
281. Свойство взаимности любых двух проводников системы 326
282а, б. Сопряженные проводники 327
283. Тепло, производимое в системе 328
284. Тепло минимально, когда ток распределен согласно закону Ома .. 329
Приложение к главе VI 329

ГЛАВА VII
ПРОХОЖДЕНИЕ ТОКА В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

285. Обозначения 331
286. Составление и разложение электрических токов 331
287. Определение количества, которое протекает через произвольную поверхность 332
288. Уравнение поверхности потока 333
289. Связь между произвольными тремя системами поверхностей потока 333
290. Трубки тока 333
291. Выражение для составляющих тока через поверхности потока 333
292. Упрощение этого выражения при соответствующем выборе параметров 334
293. Единичные трубки тока, используемые, как метод определения тока 334
294. Токовые листы и токовые функции 334

295. Уравнение «непрерывности» 335
296. Количество электричества, которое протекает через заданную поверхность 336

ГЛАВА VIII
СОПРОТИВЛЕНИЕ И ПРОВОДИМОСТЬ В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

297. Уравнения сопротивления 337
298. Уравнения прохождения тока 338
299. Скорость образования тепла 338
300. Условия устойчивости 339
301. Уравнение непрерывности в однородной среде 339
302. Решение уравнения 339
303. Теория коэффициента T, хотя он, вероятно, не существует 340
304. Обобщенная форма теоремы Томсона 341
305. Доказательство без формул 342
306. Метод лорда Рэлея в применении к проводу переменного сечения. Нижний предел для величины сопротивления 343
307. Верхний предел 346
308. Нижний предел для поправки, обусловленной концами провода .. 347
309. Верхний предел 348

ГЛАВА IX
ПРОХОЖДЕНИЕ ТОКА ЧЕРЕЗ ОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

310. Условия на поверхности 349
311. Сферическая поверхность 351
312. Сферическая оболочка 352
313. Сферическая оболочка, помещенная в поле однородного потока .. 353
314. Среда, в которой однородно распределены маленькие сферы 353
315. Изображения в плоской поверхности 354
316. Метод инверсии неприменим в трех измерениях 356
317. Случай проводимости через слой, ограниченный параллельными плоскостями 356
318. Бесконечная последовательность изображений. Применение к магнитной индукции 356
319. О слоистых проводниках. Коэффициенты проводимости проводника, состоящего из чередующихся слоев двух различных веществ 358
320. Если ни одно из веществ не обладает вращательным свойством, обозначаемым через T, то и составной проводник также им не обладает 359
321. Если вещества изотропны, направление максимального сопротивления перпендикулярно слоям 359
322. Среда, содержащая параллелепипеды другой среды 359
323. Вращательное свойство не может быть введено при помощи проводящих каналов 360
324. Построение искусственного твердого тела с заданными коэффициентами продольной и поперечной проводимости 360

ГЛАВА X
ПРОХОЖДЕНИЕ ТОКА В ДИЭЛЕКТРИКАХ

325. В строго однородной среде не может существовать внутреннего заряда .. 361
326. Теория конденсатора, в котором диэлектрик не является идеальным изолятором .. 363
327. Нет остаточного заряда, обусловленного простым прохождением тока .. 363
328. Теория составного накопителя .. 364
329. Остаточный заряд и электрическая абсорбция .. 365
330. Полный разряд .. 367
331. Сравнение с проводимостью тепла .. 368
332. Теория телеграфных кабелей и сравнение уравнений с уравнениями теплопроводности .. 370
333. Мнение Ома по этому вопросу .. 371
334. Механическая иллюстрация свойств диэлектрика .. 371

ГЛАВА XI
ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОВОДНИКОВ

335. Преимущество использования материального эталона сопротивления при электрических измерениях .. 373
336. Различные эталоны, которые используются и различные системы, которые предложены .. 374
337. Электромагнитная система единиц .. 374
338. Единица Вебера и единица Британской Ассоциации или Ом .. 374
339. Фактическая величина Ома равна 10.000.000 метров в секунду .. 374
340. Воспроизведение эталонов .. 375
341. Формы катушек сопротивления .. 376
342. Катушки большого сопротивления .. 376
343. Последовательное соединение катушек .. 377
344. Параллельное соединение катушек .. 377
345. О сравнении сопротивлений. (1) Метод Ома .. 378
346. (2) При помощи дифференциального гальванометра .. 378
347. (3) При помощи мостика Уитстона .. 381
348. Оценка пределов ошибки при определении .. 382
349. Наилучшее устройство для сравнения проводников .. 383
350. Об использовании мостика Уитстона .. 385
351. Метод Томсона для малых сопротивлений .. 386
352. Метод Матиссена и Хокина для малых сопротивлений .. 388
353. Сравнение больших сопротивлений при помощи электрометра .. 390
354. Путем зарядки конденсатора .. 390
355. Прямой электростатический метод .. 390
356. Томсоновский метод для сопротивления гальванометра .. 391
357. Метод Манка для определения сопротивления батареи .. 392
358. Сравнение электродвижущих сил .. 394

ГЛАВА XII
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВ

359. Металлы, электролиты и диэлектрики 395
360. Сопротивление металлов 395
361. Сопротивление ртути 396
362. Таблица сопротивлений металлов 397
363. Сопротивление электролитов 398
364. Опыты Паальцова 398
365. Эксперименты Кольрауша и Ниппольдта 399
366. Сопротивление диэлектриков 399
367. Гуттаперча 401
368. Стекло 401
369. Газы 401
370. Опыты Видемана и Рюльмана 402

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ГЛАВА ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН

1. Любое выражение для какой-нибудь Величины состоит из двух факторов или компонент. Одним из таковых является наименование некоторой известной величины того же типа, что и величина, которую мы выражаем. Она берется в качестве эталона отсчета. Другим компонентом служит число, показывающее, сколько раз надо приложить эталон для получения требуемой величины. Эталонная, стандартная величина называется в технике Единицей, а соответствующее число — Численным Значением данной величины.

Сколько существует разновидностей измеряемых величин, столько же должно существовать и различных единиц; однако во всех динамических науках эти единицы можно определять через три основные: единицу Длины, единицу Времени и единицу Массы. Так, единицы площади и объема определяются соответственно как квадрат и куб, стороны которых равны единице длины.

Иногда все же мы обнаруживаем несколько единиц одного и того же вида, возникших по независимым соображениям. Так, галлон (объем десяти фунтов воды) используется в качестве единицы емкости наряду с кубическим футом. В некоторых случаях галлон может быть удобной мерой, но он не относится к системным единицам, так как его численное отношение к кубическому футу не равно круглому целому числу.

2. При построении математической системы мы считаем основные единицы — длины, времени и массы — заданными, а все производные единицы выводим из них с помощью простейших приемлемых определений.

Формулы, к которым мы приходим, должны быть такими, чтобы представитель любого народа, подставляя вместо символов численные значения величин, измеренные в его национальных единицах, получил бы верный результат.

Следовательно, во всех научных исследованиях очень важно использовать единицы, принадлежащие к системе, должным образом определенной, равно как и знать их связи с основными единицами, чтобы иметь возможность сразу же пересчитывать результаты из одной системы в другую.

Удобнее всего это делать, установив *размерность* каждой единицы по отношению к трем основным. Если некоторая заданная единица изменяется как n-я степень одной из основных единиц, то говорят, что она *n-размерна* или имеет размерность n по отношению к этой единице.

Например, принятая в науке единица объема всегда представляет собой куб, стороны которого равны единице длины. Если единица длины изменится, то единица объема изменится как третья степень длины, поэтому говорят, что единица объема относительно единицы длины имеет размерность равную трем.

Знание размерности единиц снабжает нас способом проверки, который следует применять к уравнениям, полученным в результате длительных исследований. Размерность каждого из членов такого уравнения относительно каждой из трех основных единиц должна быть одной и той же. Если это не так, то уравнение бессмысленно, оно содержит какую-то ошибку, поскольку его интерпретация оказывается разной и зависящей от той произвольной системы единиц, которую мы принимаем [1].

Три основные единицы

3. (1) *Длина.* Эталоном длины, используемым в нашей стране в научных целях, служит фут, который составляет третью часть стандартного ярда, хранящегося в Казначейской Палате.

Во Франции и в других странах, принявших метрическую систему, эталоном длины является метр. Теоретически это одна десятимиллионная часть длины земного меридиана, измеренного от полюса до экватора; практически же это длина хранящегося в Париже эталона, изготовленного Борда (Borda) с таким расчетом, чтобы при температуре таянья льда он соответствовал значению длины меридиана, полученному Делямбром (Delambre). Изменения, отражающие новые и более точные измерения Земли, не вносятся в метр, наоборот,— сама дуга меридиана исчисляется в первоначальных метрах.

В астрономии за единицу длины принимается иногда среднее расстояние от Земли до Солнца.

При современном состоянии науки наиболее универсальным эталоном длины из числа тех, которые можно было бы предложить, служила бы длина волны света определенного вида, испускаемого каким-либо широко распространенным веществом (например, натрием), имеющим в своем спектре четко отождествляемые линии. Такой эталон не зависел бы от каких-либо изменений в размерах Земли и его следовало бы принять тем, кто надеется, что их писания окажутся более долговечными, чем это небесное тело.

При работе с размерностями единиц мы будем обозначать единицу длины как $[L]$. Если численное значение длины равно l, то это понимается как значение, выраженное через определенную единицу $[L]$, так что вся истинная длина представляется как $l\,[L]$.

4. (2) *Время.* Во всех цивилизованных странах стандартная единица времени выводится из периода обращения Земли вокруг своей оси. Звездные сутки или истинный период обращения Земли может быть установлен с большой точностью при обычных астрономических наблюдениях, а средние солнечные сутки могут быть вычислены из звездных благодаря нашему знанию продолжительности года.

Секунда среднего солнечного времени принята в качестве единицы времени во всех физических исследованиях.

В астрономии за единицу времени иногда берется год. Более универсальную единицу времени можно было бы установить, взяв период колебаний того самого света, длина волны которого равна единице длины.

Мы будем именовать конкретную единицу времени как $[T]$, а числовую меру времени обозначать через t.

---

[1] Теория размерностей была сформулирована впервые Фурье (Fourier, *Théorie de Chaleur*, § 160).

5. (3) *Масса.* В нашей стране стандартной единицей массы является эталонный коммерческий фунт (avoirdupois pound), хранящийся в Казначейской Палате. Часто используемый в качестве единицы гран (grain) составляет одну 7000-ю долю этого фунта.

В метрической системе единицей массы служит грамм; теоретически это масса кубического сантиметра дистиллированной воды при стандартных значениях температуры и давления, а практически это одна тысячная часть эталонного килограмма, хранящегося в Париже.

Та точность, с которой массы тел можно сравнивать между собой при помощи взвешивания, далеко превышает точности, достигнутые в измерении длин, так что все массы должны по мере возможности сравниваться непосредственно с эталоном, а не вычисляться на основе опытов с водой.

В описательной астрономии за единицу массы иногда берется масса Солнца или Земли, но в теоретической астродинамике единица массы выводится исходя из единиц времени и длины в сочетании с фактом универсальности гравитации. Астрономической единицей массы является такая масса, которая, притягивая другое тело, помещенное от нее на единичном расстоянии, сообщает этому телу единичное ускорение.

Формируя некоторую универсальную систему единиц, мы можем либо вывести единицу массы указанным выше путем из уже определенных ранее единиц длины и времени (а это мы умеем делать в грубом приближении уже при современном состоянии науки), либо, рассчитывая на возможность определения [2] в недалеком будущем массы одной молекулы стандартного вещества, можем подождать этого определения и не устанавливать пока универсального эталона массы.

При рассмотрении размерности других единиц мы будем обозначать конкретную единицу массы символом $[M]$. Единица массы будет взята в качестве одной из трех основных величин. Но если, как это делается во французской системе, определенное вещество, а именно вода, берется в качестве эталона плотности, то единица массы уже перестает быть независимой, а изменяется подобно единице объема, т. е. как $[L^3]$.

Если же, как в астрономической системе, единица массы выражена через силу ее притяжения, то размерность $[M]$ оказывается такой: $[L^3T^{-2}]$.

В самом деле, ускорение, обусловленное притяжением массы m на расстоянии r, согласно закону Ньютона равно m/r^2. Допустим, что это притяжение действует на первоначально покоящееся тело в течение очень короткого промежутка времени t и заставляет его описать пространственное смещение s, тогда по формуле Галилея имеем

$$s=\frac{1}{2}ft^2=\frac{1}{2}\frac{m}{r^2}t^2,$$

откуда $m=2r^2s/t^2$. Так как и r, и s — длины, а t — время, это уравнение не

---

[2] См. Prof. J. Loschmidt, «Zur Grösse der Luftmolecule», *Academy of Vienna*, Oct. 12, 1865; G. J. Stoney on «The Inertial Motion of Gases» *Phil. Mag.*, Aug. 1868 and Sir W. Thomson on «The Size of Atoms», *Nature*, March 31, 1870.

может выполняться, если размерность m не равна $[L^3T^{-2}]$. То же самое можно показать и для любого астрономического уравнения, где масса тела фигурирует в некоторых (но не во всех) членах [3].

Производные Единицы

6. Единица Скорости — это такая скорость, при которой в единицу времени проходится единица длины. Ее размерность равна $[LT^{-1}]$.

Если за единицу длины и времени принять величины, выведенные из колебаний света, то единицей скорости станет скорость света.

Единица Ускорения — это такое ускорение, при котором скорость возрастает на единицу за единицу времени. Ее размерность $[LT^{-2}]$.

Единица Плотности — это плотность вещества, содержащего в единице объема единицу массы. Ее размерность $[ML^{-3}]$.

Единица Импульса (количества движения) — это импульс единицы массы, движущейся с единичной скоростью. Ее размерность $[MLT^{-1}]$.

Единица Силы — это такая сила, которая производит единичный импульс в единицу времени. Ее размерность $[MLT^{-2}]$.

Эта единица силы является абсолютной, и такое ее определение применимо к любому уравнению Динамики. Тем не менее во многих учебниках, где приводятся эти уравнения, принята иная единица силы, а именно вес национальной единицы массы; тогда, для того чтобы удовлетворить уравнениям, приходится отказываться от самой национальной единицы массы, а в качестве динамической единицы принять некоторую искусственную, равную национальной единице, деленной на численное значение интенсивности тяготения в данном месте. При этом обе единицы — и силы, и массы — становятся зависящими от значения интенсивности тяготения, которая изменяется от места к месту, так что утверждения, в которых фигурируют эти величины, оказываются неполными без знания интенсивности тяготения для тех мест, где установлена справедливость этих утверждений.

Упразднение этого метода измерения сил для всех научных целей в основном обусловлено введением Гауссом общей системы наблюдений магнитной силы в странах, где интенсивность тяготения различна. Сейчас все силы такого рода измеряются в соответствии со строго динамическим методом, вытекающим из наших определений, и численные результаты измерений получаются одинаковыми, в какой бы стране эти измерения ни проводились.

Единица Работы — это работа, производимая единичной силой, действующей на единичном пути в направлении этой силы. Ее размерность $[ML^2T^{-2}]$.

Энергия системы, будучи ее способностью к совершению работы, измеряется той работой, которую способна совершать система, израсходовав всю свою энергию.

Определения других величин, а также относящихся к ним единиц, будут даны в тех местах, где они нам потребуются.

Преобразовывая значения физических величин, определенных через одну

[3] Если взять за единицы измерений сантиметр и секунду, то, согласно Бэйли (Baily), повторившему эксперименты Кавендиша, астрономическая единица массы окажется равной примерно $1{,}537\cdot10^7$ грамма или 15,37 тонн. Бэйли принял для средней плотности Земли значение 5,6604 как средний результат всех его опытов; это дает с учетом использованных им размеров Земли и силы тяжести на поверхности Земли приведенное выше значение массы, являющееся, таким образом, непосредственным следствием его экспериментов.

физическую единицу, с целью их представления через какие-либо другие однотипные единицы, мы должны помнить, что каждое выражение величины состоит из двух множителей — из единицы измерений и числа, показывающего, сколько раз эта единица должна быть взята. Следовательно, численная часть выражения изменяется обратно пропорционально величине единицы измерений, т. е. обратно пропорционально тем различным степеням основных единиц, которые определяют размерность данной производной единицы.

О физической непрерывности и разрывности

7. Про какую-либо величину говорят как про изменяющуюся непрерывно, если при переходе от одного значения к другому она принимает все промежуточные значения.

К понятию непрерывности мы приходим при рассмотрении непрерывного существования частицы материи во времени и в пространстве. Такая частица не может перейти из одного положения в другое, не описав в пространстве непрерывную линию, и координаты ее положения должны быть непрерывными функциями времени.

В так называемом «уравнении непрерывности» в том виде, как оно приводится в трактатах по Гидродинамике, выражен факт, что вещество не может появиться или исчезнуть из некоторого элемента объема, не проходя внутрь или наружу через его границы.

Величина называется непрерывной функцией своих переменных, если при непрерывном изменении этих переменных она сама изменяется непрерывно.

Таким образом, если u есть функция x и при непрерывном изменении x от x_0 до x_1 u непрерывно переходит от u_0 до u_1, а при изменении x от x_1 до x_2 u переходит от u_1' до u_2', причем u_1' отличается от u_1, то про величину u говорят, что она имеет разрыв относительно изменения x при значении $x=x_1$, потому что она меняется от u_1 до u_1' скачком при непрерывном прохождении x через x_1.

Рассмотрим производную от u по x при значении $x=x_1$ как предел дроби $(u_2-u_0)/(x_2-x_0)$, когда x_2 и x_0 становятся сколь угодно близкими к x_1. Тогда, если x_0 и x_2 все время находятся по разные стороны от x_1, предельное значение числителя станет равным $u_1'-u_1$, а предельное значение знаменателя обратится в нуль. Если u является величиной физически непрерывной, то разрыв может осуществляться только при определенных значениях переменной x. В этом случае мы можем допустить, что величина u имеет бесконечную производную при $x=x_1$. Если же u не является физически непрерывной, она может быть недифференцируема вообще.

В физических вопросах можно избавиться от идеи разрывности без ощутимых изменений условий рассматриваемой задачи. Если x_0 ничтожно меньше x_1, а x_2 ничтожно больше x_1, то величина u_0 почти равна u_1, а величина u_2 почти равна u_1'. И мы можем теперь предположить, что u изменяется каким-либо произвольным, но непрерывным образом от u_0 до u_2 между пределами x_0 и x_2. Во многих физических вопросах можно, сделав вначале такого рода предположение, исследовать затем полученный результат, приближая, а в пределе и совмещая, значения x_0 и x_2 со значением x_1. Если ответ не зависит от произвола, допущенного нами в способе изменения величины u (внутри ее пределов), мы можем считать его верным также и для разрывных u.

Разрывность функции от более чем одной переменной

8. Если значения всех переменных, кроме x, положить постоянными, то разрыв функции будет происходить при некоторых значениях x, связанных с другими переменными уравнением, которое можно записать так:

$$\varphi=\varphi(x, y, z, \ldots)=0.$$

Разрыв будет происходить, когда $\varphi=0$. При φ положительных функция будет иметь вид $F_2(x, y, z, \ldots)$, а при φ отрицательных — $F_1(x, y, z, \ldots)$, причем не нужно налагать никаких необходимых связей между F_1 и F_2.

Для того чтобы выразить эту разрывность в математической форме, допустим, что одна из переменных, скажем, переменная x, представлена как функция от φ и от остальных переменных; допустим также, что F_1 и F_2 представлены как функции $\varphi, y, z, \ldots$. Тогда мы может описать общий вид этой функции с помощью такой формулы, которая при положительных φ давала бы значения приблизительно равные F_2, а при отрицательных φ — приблизительно равные F_1. Эта формула такова:

$$F=\frac{F_1+e^{n\varphi}F_2}{1+e^{n\varphi}}.$$

До тех пор, пока число n остается конечным (хотя и большим), функция F будет непрерывной, но если сделать n бесконечным, то функция F окажется равной F_2 при положительных φ и F_1 при отрицательных φ.

Разрывность производных от непрерывных функций

Первые производные от непрерывной функции могут быть и разрывными. Пусть значения переменных, для которых происходит разрыв производных, связаны уравнением

$$\varphi=\varphi(x, y, z \ldots)=0,$$

а F_1 и F_2 выражены через φ и через $(n-1)$ остальных переменных, скажем, через $(y, z \ldots)$.

Тогда при φ отрицательных следует брать F_1, а при φ положительных F_2, и так как при $\varphi=0$ функция F сама по себе непрерывна, то $F_1=F_2$.

Следовательно, при значении φ, равном нулю, производные $dF_1/d\varphi$ и $dF_2/d\varphi$ могут быть различными, но производные по любой другой переменной, такие, как dF_1/dy и dF_2/dy, должны быть одинаковыми. Разрывность, таким образом, ограничена только производными по φ, все же другие производные остаются непрерывными.

Периодические и кратные функции

9. Если функция u от x такова, что ее значения при x, $x+a$, $x+na$ одинаковы, как и при всех других значениях x, отличающихся на a, то u называется периодической функцией x, а a — ее периодом.

Если же рассматривать x как функцию u, то для некоторого заданного значения u должен существовать бесконечный ряд значений x, отличающихся друг

от друга на величину, кратную a. В этом случае x называется кратной функцией u, а величина a — ее циклической постоянной.

Производная dx/du имеет только конечное число значений, отвечающих данному значению u.

О соотношении между физическими величинами и направлениями в пространстве

10. Характеризуя разновидности физических величин, очень важно знать, как они зависят от направлений тех координатных осей, которые обычно используются для установления местоположения предметов. Введение Декартом координатных осей в геометрию было одним из величайших шагов в развитии математики, ибо это свело методы геометрии к расчетам, совершаемым над численными величинами. Положение точки сделалось зависящим от длин трех линий, проводимых всякий раз в определенных направлениях, а линия, соединяющая две точки, подобным же образом стала рассматриваться как результирующая трех линий.

Однако, в отличие от вычислений, для многих целей физического обоснования желательно избегать явного введения декартовых координат, сосредоточивая внимание сразу же на точке в пространстве, а не на трех ее координатах, или на величине и направлении силы, а не на трех ее составляющих. Такой подход к рассмотрению геометрических и физических величин является более простым и естественным, чем другой, координатный, хотя связанные с ним представления не получили полного развития до тех пор, пока Гамильтон не сделал следующего великого шага в обращении с пространством и не изобрел свое Кватернионное Исчисление.

Поскольку декартовы методы все еще остаются наиболее привычными для исследователей, занимающихся наукой, и они действительно являются наиболее удобными при вычислениях, мы тоже будем выражать все наши результаты в декартовой форме. Я убежден, однако, что введение идей, извлеченных из кватернионных операций и методов, принесет нам огромную пользу при изучении всех разделов нашего курса, особенно электродинамики, где приходится иметь дело с рядом физических величин, соотношения между которыми можно существенно проще представить при помощи нескольких выражений по Гамильтону, чем через обычные уравнения.

11. Одной из наиболее важных особенностей метода Гамильтона является разделение величин на Скаляры и Векторы.

Скалярная величина допускает полное определение при помощи одной-единственной численной характеристики. Ее численное значение никоим образом не зависит от принятого нами направления координатных осей.

Вектор, или Направленная величина, для своего определения требует трех численных характеристик, и проще всего они могут быть поняты как величины, отсчитываемые в направлениях координатных осей.

Скалярные величины не включают в себя никаких направлений. Объем геометрической фигуры, масса и энергия материального тела, гидростатическое давление в какой-либо точке жидкости, потенциал в какой-либо точке пространства — все это примеры скалярных величин.

Векторная величина имеет направление, а также модуль, причем обращение ее направления на противоположное изменяет ее знак. Смещение точки, представляемое прямой линией, проведенной из ее начального положения в конечное, может быть взято в качестве типичной векторной величины, из которой в самом деле и было образовано название Вектор.

Скорость тела, его импульс, сила, действующая на тело, электрический ток, намагниченность частицы железа — все это примеры векторных величин.

Существуют и другого рода физические величины, которые хотя и связаны с направлениями в пространстве, но не являются векторами. Натяжения и деформация в твердых телах служат этому примерами, сюда же относятся некоторые свойства тел, изучаемые в теории упругости и теории двойного лучепреломления. Для определения величин этого класса требуется *девять* численных характеристик. На языке кватернионов они выражаются как линейные и векторные функции от вектора.

Сложение одной векторной величины с другой, однотипной с ней, производится в соответствии с правилом сложения сил в статике. Действительно, доказательство, которое дает Пуассон для «параллелограмма сил», применимо к составлению любых величин, перевертывание (перестановка концов) которых равносильно обращению их знака.

В тех случаях, когда у нас появится желание обозначить векторную величину одним символом и привлечь внимание к тому факту, что она является вектором и что у нее необходимо рассматривать как направление, так и модуль, мы будем прибегать к заглавным готическим буквам, например $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$,...

В кватернионном исчислении положение точки в пространстве определяется вектором, проведенным в эту точку из некоторой фиксированной точки, называемой начальной точкой или началом координат. Если нам нужно изучать какую-либо физическую величину, значение которой зависит от положения точки, то она рассматривается как функция вектора, проведенного из начала координат. Сама эта функция может быть и скаляром, и вектором. Плотность тела, его температура, его гидростатическое давление, потенциал в точке — все это примеры скалярных функций. Результирующая сила в точке, скорость жидкости в точке, скорость вращения элемента жидкости, а также момент пары сил, производящий вращение,— все это примеры векторных функций.

12. Физические векторные величины можно разделить на два класса: в одном из них величина определена относительно линии, в другом — относительно площади.

Так, например, результирующую силу притяжения можно измерить, отыскав работу, которую она произвела бы над телом при его перемещении на малое расстояние в направлении силы, и поделив ее на величину этого малого расстояния. Здесь сила притяжения определена относительно линии.

С другой стороны, поток тепла в каком-либо направлении в какой-либо точке твердого тела может быть определен как количество тепла, которое проходит через маленькую площадку, проведенную перпендикулярно к данному направлению, деленное на величину этой площадки и на время. Здесь поток определен относительно площадки.

Существуют некоторые случаи, в которых одна и та же величина может быть измерена и относительно линии, и относительно площадки.

Так, при рассмотрении смещений в упругих телах мы можем обратить внимание либо на начальное и фактическое положения частицы, и в этом случае ее смещение измеряется линией, проведенной из первого положения во второе; либо мы можем рассматривать маленькую фиксированную в пространстве площадку и определить, какое количество вещества проходит через эту площадку за время смещения.

Точно так же можно исследовать и скорость жидкости, принимая во внимание либо действительную скорость отдельных ее частей, либо количество жидкости, протекающей через какую-либо фиксированную площадку.

Однако для применения первого метода в обоих этих случаях наряду со смещением или скоростью требуется независимо знать плотность тела; второй же метод должен применяться всякий раз при попытках построения молекулярной теории.

В случае потока электричества в проводнике мы не знаем ничего ни о его плотности, ни о скорости, нам известна лишь та величина, которая в теории жидкости соответствовала бы произведению плотности на скорость. И поэтому во всех таких случаях следует применять более общий метод измерения потока через площадку.

В науке об электричестве электродвижущая и магнитная напряженности принадлежат к величинам первого класса — они определены относительно линий. При желании отметить это обстоятельство мы можем, ссылаясь на них, именовать их Напряженностями (интенсивностями).

Напротив, электрическая и магнитная индукция, а также электрические токи принадлежат к величинам второго класса — они определены относительно площади. При желании отметить это обстоятельство мы будем, ссылаясь на них, именовать их Потоками.

Можно считать, что каждая из этих напряженностей производит (или стремится произвести) соответствующий ей поток. Так, электродвижущая напряженность создает электрические токи в проводниках и стремится создать их в диэлектриках. Она создает электрическую индукцию в диэлектриках, а возможно, и в проводниках тоже. В этом же смысле магнитная напряженность производит магнитную индукцию.

13. В одних случаях поток оказывается просто пропорциональным напряженности и совпадающим с ней по направлению, в других — мы можем только утверждать, что и его направление, и его величина являются функциями направления и величины напряженности.

Случай, в котором составляющие потока представляют собой *линейные* функции составляющих напряженности, обсуждается в п. 297 главы «Уравнения Проводимости». Связь между напряженностью и потоком определяется, вообще говоря, девятью коэффициентами. Но иногда у нас есть основания полагать, что шесть из них образуют три пары равных между собой величин. Тогда связь между линией, вдоль которой направлена напряженность, и плоскостью, нормальной к потоку, подобна связи между полудиаметром эллипсоида и сопряженной ему диаметральной плоскостью. На кватернионном языке в этом случае говорят, что один из векторов является линейной векторной функцией другого, а когда существует три попарно одинаковых коэффициента, то эту функцию называют самосопряженной.

В случае магнитной индукции в железе поток (намагниченность железа) не является линейной функцией интенсивности намагничивания. Однако во всех случаях произведение напряженности (интенсивности) на поток, спроектированный на направление напряженности, приводит к важному научному результату. И это произведение всегда является скалярной величиной.

14. С этими двумя классами векторов или направленных величин связаны две часто встречающиеся математические операции.

В случае напряженности следует брать интеграл вдоль линии от произведения элемента длины этой линии на составляющую напряженности вдоль этого элемента. Результат такой операции называется Линейным (криволинейным) интегралом от напряженности. Он представляет собой работу, производимую над телом, перемещаемым вдоль этой линии. В некоторых случаях, когда линейный интеграл не зависит от формы линии, а зависит только от положения ее конечных точек, линейный интеграл называется Потенциалом.

В случае потоков следует брать интеграл по поверхности от потока через каждый из ее элементов. Результат этой операции называется Поверхностным интегралом от потока, он представляет собой то количество, которое проходит через поверхность.

Существуют определенные поверхности, потоки через которые равны нулю. Если две из них пересекаются, то линия пересечения является линией потока. В тех случаях, когда поток совпадает по направлению с силой, линии подобного рода называют Линиями Силы. Однако было бы правильнее в электростатике и магнитостатике говорить о них как о линиях индукции, а в электрокинематике— как о Линиях Тока.

15. Существует еще одно различие между двумя разными видами направленных величин, хотя и очень важное с физической точки зрения, однако не настолько необходимое, чтобы его следовало отмечать ради применения математических методов. Речь идет о различии между поступательными (продольными) и вращательными свойствами.

Направление и модуль величины могут зависеть от какого-то действия или эффекта, целиком и полностью происходящего вдоль определенной линии, а могут зависеть от чего-то иного, имеющего характер вращения вокруг этой линии, принимаемой за ось. Законы сложения направленных величин, и поступательных (продольных), и вращательных, одинаковы, так что при математическом рассмотрении между величинами этих двух классов нет никаких различий, однако могут существовать некие физические обстоятельства, указывающие, к какому из классов мы обязаны отнести данное частное явление. Так, электролиз состоит в переносе некоторых веществ вдоль линии в одном направлении и некоторых других веществ в противоположном направлении; он представляет собой, очевидно, явление поступательное (продольное), в нем нет никаких признаков эффекта вращения вокруг направления силы.

Отсюда мы делаем вывод, что и электрический ток, который вызывает или сопровождает электролиз, относится к поступательным (продольным), а не к вращательным явлениям.

С другой стороны, северный и южный полюса магнита разделяются не так, как кислород и водород, которые в процессе электролиза появляются на противоположных местах, поэтому у нас нет свидетельства в пользу того, что магнетизм

относится к продольным явлениям; в то же время действие магнетизма при вращении плоскости поляризации плоско поляризованного света отчетливо показывает, что магнетизм относится к явлениям вращательным.

О линейных интегралах

16. Операция интегрирования проекции векторной величины вдоль линии имеет важное значение в физике, и потому ее следовало бы ясно понимать.

Пусть x, y, z — координаты точки P, расположенной на некоторой кривой, длина которой, измеряемая от определенной точки A, равна s. Эти координаты будут функциями только одной переменной s.

Обозначим через R численное значение векторной величины в точке P, и пусть касательная к кривой в этой точке образует с направлением R угол ε. Тогда величина $R\cos\varepsilon$ представляет собой составляющую R вдоль кривой, а интеграл

$$L=\int_0^s R\cos\varepsilon\,ds$$

называется линейным интегралом от R вдоль s.

Это выражение может быть записано так:

$$L=\int_0^s\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

де X, Y, Z — составляющие R, параллельные осям x, y, z соответственно.

В общем случае этот интеграл для различных линий, проведенных между A и P, различен. Но когда внутри некоторой области величина

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=-D\Psi$$

является полным дифференциалом, то интеграл L становится равным $L=\Psi_A-\Psi_P$. при этом он одинаков для любых двух путей произвольной формы между точками A и P при условии, что форма одного пути может быть преобразована в форму другого посредством непрерывного перемещения без выхода за пределы данной области.

О потенциалах

Величина Ψ есть скалярная функция положения точки, и поэтому она не зависит от направлений отсчета. Ее называют Потенциальной Функцией; а про векторную величину с компонентами X, Y, Z говорят, что она имеет потенциал Ψ, если

$$X=-\left(\frac{d\Psi}{dx}\right),\qquad Y=-\left(\frac{d\Psi}{dy}\right),\qquad Z=-\left(\frac{d\Psi}{dz}\right).$$

Если потенциальная функция существует, то поверхности, на которых потенциал постоянен, называются Эквипотенциальными. В любой точке такой поверхности направление R совпадает с нормалью к ней; если обозначить через n нормаль в точке P, то $R=-(d\Psi/dn)$.

Метод представления составляющих вектора через первые производные по координатам от некоторой функции этих координат был предложен Лапласом [4] при разработке теории притяжений. Само название «Потенциал» впервые было дано этой функции Грином [5], который положил ее в основу своегоподхода к изучению электричества. Эта работа Грина осталась незамеченной математиками вплоть до 1846 года, а к тому времени большая часть содержащихся в ней важных теорем была уже переоткрыта Гауссом, Шалем (Chasles), Штурмом и Томсоном [6].

В теории тяготения потенциал берется со знаком, противоположным тому, который используется здесь, и результирующая сила в каком-либо направлении тогда измеряется скоростью *возрастания* потенциальной функции в этом направлении. При изучении электричества и магнетизма потенциал определяется так, что результирующая сила в каком-либо направлении измеряется скоростью *убывания* потенциала в этом направлении. Такой способ использования выражения для потенциала приводит его в соответствие (по знаку) с потенциальной энергией, которая всегда убывает при перемещении тел в направлении действующих на них сил.

17. Геометрическая природа связи потенциала с вектором, вычисляемым через потенциал указанным способом, значительно проясняется благодаря открытию Гамильтоном выражения для оператора, при помощи которого вектор вычисляется из потенциала.

Как мы видели, составляющая вектора в каком-либо направлении равна взятой с обратным знаком первой производной от потенциала по координате в этом направлении.

Пусть i, j, k — три единичных вектора, образующих между собой прямые углы, а X, Y, Z — параллельные им составляющие вектора $\mathfrak{F}$; тогда

$$\mathfrak{F}=iX+jY+kZ. \tag{1}$$

Согласно сказанному выше, если Ψ является потенциалом, то

$$\mathfrak{F}=-\left(i\frac{d\Psi}{dx}+j\frac{d\Psi}{dy}+k\frac{d\Psi}{dz}\right). \tag{2}$$

Используем теперь запись ∇ для оператора

$$i\frac{d}{dx}+j\frac{d}{dy}+k\frac{d}{dz}, \tag{3}$$

тогда

$$\mathfrak{F}=-\nabla\Psi. \tag{4}$$

Значок ∇ можно понимать как указание измерить скорость увеличения Ψ в каждом из трех направлений прямоугольной системы координат и затем, считая найденные величины векторами, объединить их в единый вектор. Это и есть как раз то, что предписывается делать в соответствии с выражением (3). Но мы можем

---

[4] *Méc. Céleste*, liv. III.

[5] Essay on the Application of Mathematical Analisys to the Theories of Electricity and Magnetism, 1828. Reprinted in *Crelle's Journal* and in Mr. Ferrers' edition of Green's Works.

[6] Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, § 483.

считать также, что это заставляет нас отыскать сначала направление наибыстрейшего увеличения Ψ, а затем построить в этом направлении некоторый вектор, представляющий скорость такого возрастания.

Ламе в своем «Трактате об обратных функциях» (M. Lame, *Traité des Fonctions Inverses*) для выражения величины этой наибольшей скорости роста пользовался термином «дифференциальный параметр», однако ни сам этот термин, ни принятый Ламе способ употребления его не свидетельствуют о том, что данная величина характеризуется как направлением, так и модулем. В тех редких случаях, когда я должен буду обращаться к этому соотношению как к чисто геометрическому, я буду называть вектор $\mathfrak{F}$ пространственной вариацией скалярной функции Ψ, используя эти слова для того, чтобы отметить и направление, и величину наиболее быстрого убывания Ψ.

18. Есть, однако, такие случаи, когда условия

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}=0, \qquad \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}=0, \qquad \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}=0,$$

являющиеся условиями того, что выражение $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ образует полный дифференциал, выполняются внутри некоторой области пространства, и, несмотря на это, линейный интеграл от A до P может быть различен для двух кривых, каждая из которых целиком лежит внутри данной области. Это может произойти в том случае, когда область имеет форму кольца, а две линии, соединяющие A с P, проходят по противоположным сегментам этого кольца. В этом случае нельзя преобразовать непрерывным изменением один путь в другой без выхода за пределы этой области.

Здесь мы пришли к представлениям, относящимся к Геометрии Положения, топологии, предмет которой изучен еще мало, хотя важность его была отмечена Лейбницем и наглядно пояснена Гауссом. Наиболее полное его рассмотрение дано Дж. Б. Листингом [7].

Пусть в пространстве имеется p точек и проведено l линий произвольной формы, соединяющих эти точки, причем никакие две линии не пересекаются друг с другом и ни одна точка не остается изолированной. Фигуру, составленную из линий таким способом, мы будем называть Диаграммой (графом). Для того чтобы образовать связанную систему, достаточно для соединения p точек взять $p-1$ таких линий. Каждая новая линия завершит петлю или замкнутый путь, или, как мы будем называть его, Цикл. Таким образом, число независимых циклов в диаграмме равно $\varkappa=l-p+1$.

Любой замкнутый путь, проведенный по линиям диаграммы, оказывается составленным из этих независимых циклов, каждый из которых берется любое число раз в любом направлении.

Сам факт существования циклов называется Цикличностью (циклозисом — cyclosis), а число циклов в диаграмме — Индексом Цикличности (или цикломатическим числом — cyclomatic number).

---

[7] *Der Census Raümlicher Complexe*, Gött. Abh., Bd. X, S. 97 (1861).

Цикличность на поверхностях и в пространственных областях

Поверхности бывают либо полными, либо ограниченными. Полные поверхности либо бесконечны, либо замкнуты. Ограниченные поверхности ограничены одной или несколькими замкнутыми линиями, которые в предельных случаях вырождаются в сдвоенные конечные линии или в точки.

Конечная область пространства ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями. Одна из них является внешней поверхностью, остальные же, содержащиеся внутри нее, но не включающие в себя друг друга, называются внутренними поверхностями.

Если область имеет только одну ограничивающую поверхность, то можно считать, что она допускает сжатие вовнутрь без нарушения непрерывности или самопересечений. Если область обладает простой непрерывностью, как, например, сфера, то процесс сжатия может продолжаться до тех пор, пока область не стянется в точку; если область подобна кольцу, то в результате получится замкнутая кривая; если же область является многосвязной, то результатом ее сжатия будет диаграмма линий, индекс цикличности которой равен индексу цикличности рассматриваемой области. Пространство вне рассматриваемой области характеризуется тем же индексом цикличности, что и сама эта область. Следовательно, если область ограничена наряду с внешней и внутренними поверхностями, ее индекс цикличности равен сумме индексов, характеризующих все эти поверхности.

Когда некоторая область содержит внутри себя другие области, она называется многограничной, или Перифрактической (Periphractic region).

Число внутренних ограничивающих поверхностей у области называется порядком ее перифрактичности. Замкнутая поверхность тоже является многограничной, ее порядок перифрактичности равен единице.

Индекс цикличности замкнутой поверхности равен удвоенному индексу цикличности любой из областей, ограничиваемых ею. Для того чтобы найти индекс цикличности ограниченной поверхности, допустим, что все границы сжимаются вовнутрь без нарушения непрерывности до тех пор, пока не встретятся друг с другом. Тогда поверхность стянется либо в точку в случае ациклической поверхности, либо в линейный граф в случае циклических поверхностей. Индекс цикличности графа совпадает с индексом цикличности поверхности.

19. Теорема I. *Если в некоторой ациклической области справедливо соотношение*

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=-D\Psi,$$

то значение линейного интеграла, взятого от точки A до точки P, будет одинаковым для любого пути внутри этой области.

Покажем сначала, что линейный интеграл, взятый по любому замкнутому пути в пределах области, равен нулю.

Пусть нанесены эквипотенциальные поверхности. Они либо замкнуты, либо полностью ограничены поверхностью области, так что замкнутая линия внутри этой области, если она пересекает какую-то из этих поверхностей на одном из участков своего пути, должна пересечь ту же самую поверхность в противоположном направлении на каком-то другом участке своего пути; поскольку соответствующие

вклады в линейный интеграл окажутся одинаковыми по величине и противоположными по знаку, то полное его значение будет равно нулю.

Следовательно, если считать, что AQP и $AQ'P$ — два пути из A в P, то линейный интеграл вдоль $AQ'P$ равен сумме интеграла вдоль AQP и интеграла по замкнутому пути $AQ'PQA$. Но интеграл по замкнутому пути равен нулю, и поэтому интегралы по двум путям AQP и $AQ'P$ равны между собой.

Таким образом, если задать потенциал в какой-либо одной точке, принадлежащей этой области, то тем самым он будет определен и для любой другой точки.

20. Теорема II. *Если всюду внутри циклической области справедливо уравнение*

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=-D\Psi,$$

то линейный интеграл из точки A в точку P, взятый вдоль линии, проведенной в пределах этой области, вообще говоря, не определен до тех пор, пока не установлен канал, по которому происходит связь между A и P.

Пусть N есть индекс цикличности области, тогда при помощи поверхностей (которые мы будем называть Диафрагмами) можно осуществить N сечений области, запирающих N каналов связи и сводящих тем самым данную область, не разрушая ее непрерывности, к области, удовлетворяющей условию ацикличности.

Согласно последней теореме, линейный интеграл от A до произвольной точки P, взятый вдоль линии, не пересекающей ни одну из этих диафрагм, будет иметь вполне определенное значение.

Возьмем теперь точки A и P, сколь угодно близко расположенные друг к другу, но находящиеся на противоположных сторонах диафрагмы, и обозначим через K линейный интеграл от A до P.

Пусть A' и P' будут двумя другими точками, сколь угодно близкими друг к другу, расположенными на противоположных сторонах той же самой диафрагмы, а K' — линейный интеграл от A' до P'. Тогда $K'=K$.

Действительно, если мы проведем две почти совпадающие линии AA' и PP', расположенные по разные стороны от диафрагмы, то линейные интегралы вдоль них будут равны между собой. Пусть каждый из этих интегралов есть L, тогда линейный интеграл K', взятый вдоль $A'P'$, окажется равным линейному интегралу, взятому вдоль $A'A+AP+PP'=-L+K+L=K$, т. е. линейному интегралу вдоль AP.

Следовательно, линейный интеграл по замкнутой кривой, проходящей сквозь одну диафрагму в определенном заданном направлении, равен некоторой постоянной величине K, называемой Циклической константой данного цикла.

Пусть внутри этой области проведена произвольная замкнутая кривая, пересекающая диафрагму первого цикла p раз в положительном направлении и p' раз в отрицательном направлении, причем $p-p'=n_1$. Тогда линейный интеграл вдоль этой замкнутой кривой будет равен n_1K_1.

Аналогично линейный интеграл, взятый вдоль произвольной замкнутой кривой, будет равен

$$n_1K_1+n_2K_2+\ldots+n_sK_s,$$

где n_s представляет собой превышение числа положительных прохождений кривой через диафрагму S-го цикла над числом отрицательных.

Если две кривые таковы, что одна из них может быть преобразована в другую путем ее непрерывного изменения без прохождения в какой бы то ни было момент времени любой части пространства, в котором условия существования потенциала не выполнены, то эти две кривые называются совместимыми. Те кривые, для которых это преобразование не может быть произведено, называются несовместимыми [8].

Условие, состоящее в том, что выражение $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ является полным дифференциалом некоторой функции Ψ во всех точках внутри определенной области, возникает в целом ряде физических задач, где направленная величина и потенциал имеют различные физические истолкования.

В чисто кинематических задачах мы можем положить величины X, Y, Z составляющими смещения точки сплошного тела, начальные координаты которой равны x, y, z; тогда данное условие выражает тот факт, что эти смещения составляют *невращательные деформации* [9].

Если X, Y, Z представляют собой составляющие скорости жидкости в точке x, y, z, то данное условие означает, что движение жидкости невращательное.

Если X, Y, Z представляют собой составляющие силы в точке x, y, z, то это условие означает, что работа, совершаемая над частицей при прохождении ее из одной точки в другую, равна разности потенциалов в этих точках и что значение этой разности одинаково для всех совместимых путей между этими двумя точками.

О поверхностных интегралах

21. Пусть dS есть элемент поверхности, а ε — угол между нормалью к поверхности, проведенной в направлении положительной стороны поверхности, и направлением векторной величины R, тогда величина $\iint R\cos\varepsilon\,dS$ называется *поверхностным интегралом от R по поверхности S.*

Теорема III. *Поверхностный интеграл от потока (плотности потока), втекающего внутрь замкнутой поверхности, может быть выражен через объемный интеграл от его конвергенции, взятый по области, расположенной внутри этой поверхности* (см. п. 25).

Пусть X, Y, Z будут составляющие R, а l, m, n — направляющие косинусы нормали к поверхности, отсчитываемой наружу. Тогда поверхностный интеграл от R по S равен

$$\iint R\cos\varepsilon\,dS=\iint Xl\,dS+\iint Ym\,dS+\iint Zn\,dS, \tag{1}$$

где X, Y, Z — это значения, взятые в точке на поверхности, а интегрирования распространены на всю поверхность.

Если поверхность замкнутая, то при заданных y и z координата x должна иметь четное количество значений, так как линия, параллельная x, должна входить в замкнутое пространство и выходить из него одинаковое число раз при условии, что она вообще пересекает поверхность.

[8] См. сэр У. Томсон «О вихревом движении», *Trans. R. S. Edin.*, 1867—8. (Sir W. Thomson «On Vortex Motion»).

[9] Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, § 190(I).

При каждом входе $l dS = -dy\,dz$, а при каждом выходе $l\,dS = dy\,dz$.

Пусть некоторая точка, движущаяся из $x=-\infty$ в $x=+\infty$, первый раз входит в это пространство при $x=x_1$, а затем покидает его при $x=x_2$ и так далее; при этом значения X в этих точках соответственно равны X_1, X_2, ... ; тогда

$$\iint X l\,dS = -\iint \{(X_1-X_2)+(X_3-X_4)+\ldots+(X_{2n-1}-X_{2n})\}\,dy\,dz. \tag{2}$$

Если X является величиной непрерывной и не принимающей в интервале между x_1 и x_2 бесконечных значений, то

$$X_2 - X_1 = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dX}{dx}\,dx, \tag{3}$$

где интегрирование производится от первого до второго пересечения, а именно в пределах первого отрезка x, находящегося внутри замкнутой поверхности. Учитывая все отрезки, лежащие в пределах замкнутой поверхности, находим

$$\iint X l\,dS = \iiint \frac{dX}{dx}\,dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

где двойное интегрирование ограничивается замкнутой поверхностью, а тройное интегрирование распространяется на все охватываемое ею пространство. Следовательно, если X, Y, Z непрерывны и конечны внутри замкнутой поверхности S, то полный поверхностный интеграл от R, взятый по этой поверхности, будет равен

$$\iint R\cos\varepsilon\,dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)dx\,dy\,dz, \tag{5}$$

где тройное интегрирование распространено на все пространство внутри S.

Предположим теперь, что величины X, Y, Z не являются непрерывными в пространстве, охватываемом замкнутой поверхностью, а на некоторой поверхности $F\{x, y, z\}=0$ изменяются скачком от значений X, Y, Z на отрицательной стороне этой поверхности до значений X', Y', Z' на ее положительной стороне.

Если этот разрыв происходит, скажем, между x_1 и x_2, то значение $X_2 - X_1$ окажется равным

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dX}{dx}\,dx + (X' - X), \tag{6}$$

здесь в подынтегральном выражении следует рассматривать только конечные значения производной от X.

Таким образом, в этом случае полный поверхностный интеграл от R по замкнутой поверхности будет представляться выражением

$$\iint R\cos\varepsilon\,dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)dx\,dy\,dz + \iint (X'-X)\,dy\,dz + \\ + \iint (Y'-Y)\,dz\,dx + \iint (Z'-Z)\,dx\,dy, \tag{7}$$

или, если через l', m', n' обозначить направляющие косинусы нормали к поверхности разрыва, а через dS' — элемент этой поверхности,

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right) dx\, dy\, dz + \\ + \iint \{l'(X'-X)+m'(Y'-Y)+n'(Z'-Z)\}\, dS', \tag{8}$$

где интегрирование в последнем члене производится по поверхности разрыва.

Если в каждой точке, где X, Y, Z непрерывны, справедливо уравнение

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0, \tag{9}$$

а на каждой поверхности, где они разрывны,—

$$l'X'+m'Y'+n'Z'=l'X+m'Y+n'Z, \tag{10}$$

то поверхностный интеграл по любой замкнутой поверхности равен нулю и про распределение векторной величины говорят, что оно является Соленоидальным.

Мы будем ссылаться на уравнение (9) как на Общее условие соленоидальности, а на уравнение (10) — как на условие соленоидальности на поверхности.

22. Рассмотрим теперь случай, когда уравнение

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0 \tag{11}$$

выполнено в каждой точке внутри поверхности S. Отсюда следует, что поверхностный интеграл по замкнутой поверхности равен нулю.

Пусть теперь замкнутая поверхность S состоит из трех частей S_1, S_0 и S_2, причем S_1 — это поверхность произвольной формы, ограниченная замкнутой кривой L_1, а S_0 — поверхность, образованная линиями, проведенными из каждой точки кривой L_1, всегда совпадающими по направлению с R. Если l, m, n — направляющие косинусы нормали в произвольной точке поверхности S_0, то мы имеем

$$R\cos\varepsilon=Xl+Ym+Zn=0. \tag{12}$$

Следовательно, эта часть поверхности не дает никакого вклада в значение поверхностного интеграла.

Пусть S_2 будет другой поверхностью произвольной формы, ограниченной замкнутой кривой L_2, по которой она пересекается с поверхностью S_0.

Обозначим через Q_1, Q_0, Q_2 поверхностные интегралы, взятые по поверхностям S_1, S_0 и S_2, а через Q — поверхностный интеграл по замкнутой поверхности S; тогда

$$Q=Q_1+Q_0+Q_2=0, \tag{13}$$

но мы знаем, что

$$Q_0=0, \tag{14}$$

поэтому

$$Q_2=-Q_1, \tag{15}$$

иными словами, поверхностный интеграл по поверхности S_2 равен по величине и противоположен по знаку поверхностному интегралу по S_1 независимо от формы и расположения S_2 при условии, что промежуточная поверхность S_0 является поверхностью, к которой направленная величина R всегда тангенциальна.

Если предположить, что L_1 есть замкнутая кривая, ограничивающая небольшую площадь, то S_0 окажется трубчатой поверхностью, обладающей тем свойством, что поверхностный интеграл по любому полному сечению этой трубки одинаков.

Так как все пространство может быть разделено на такого рода трубки, то при выполнении условия

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0 \qquad (16)$$

распределение векторной величины, удовлетворяющей этому уравнению, называется Соленоидальным Распределением.

О трубках и линиях тока

Если пространство разделено на трубки таким образом, что поверхностный интеграл для каждой из них равен единице, то такие трубки называются единичными, а поверхностный интеграл по любой конечной поверхности S, ограниченной некоторой замкнутой кривой L, равен *числу* единичных трубок, проходящих сквозь S в положительном направлении, или, что то же самое, числу единичных трубок, проходящих внутри замкнутой кривой L.

Следовательно, поверхностный интеграл по поверхности S зависит только от формы ее границы L, но не от формы самой поверхности в пределах той же ее границы.

О многограничных областях

Если во всей области, ограниченной одной замкнутой поверхностью S, выполнено условие соленоидальности

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0,$$

то поверхностный интеграл, взятый по любой замкнутой поверхности, проведенной внутри этой области, будет равен нулю, а поверхностный интеграл, взятый по ограниченной поверхности внутри этой области, будет зависеть только от формы той замкнутой кривой, которая образует границу этой поверхности.

В общем случае, однако, неправильно утверждать, что те же результаты сохраняются, если область, внутри которой удовлетворяется условие соленоидальности, ограничена иначе, нежели одной поверхностью.

Действительно, если она ограничена более чем одной непрерывной поверхностью, то одна из них является внешней, а остальные — внутренними, и область внутри поверхности S оказывается многограничной, содержащей внутри себя другие области, полностью охватываемые S.

Предположим, что условие соленоидальности не удовлетворяется внутри одной из этих охватываемых областей, скажем, внутри области, ограниченной поверхностью S_1, и поверхностный интеграл по поверхности, охватывающей эту область,

равен $Q_1 = \iint R \cos \varepsilon \, dS_1$, пусть $Q_2, Q_3, \ldots$ являются соответствующими величинами для других областей, охватываемых поверхностями S_2, $S_3, \ldots$.

Тогда, если внутри области S провести некоторую замкнутую поверхность S', то значение поверхностного интеграла на ней будет равно нулю только в том случае, когда эта поверхность не содержит внутри себя ни одну из областей, охватываемых поверхностями S_2, S_3, ... Если же она включает какие-то из них, то соответствующий поверхностный интеграл равен сумме поверхностных интегралов по поверхностям различных охватываемых областей, лежащих внутри S'.

По этой же самой причине поверхностный интеграл, взятый по поверхности, ограниченной замкнутой кривой, будет иметь одинаковое значение только для таких поверхностей (ограниченных той же замкнутой кривой), которые допускают совмещение с данной поверхностью путем непрерывного изменения поверхности в пределах области, охватываемой S.

Если нам предстоит работать с многограничной областью, то первым делом следует свести ее к одинограничной путем проведения линий L_1, L_2, . . . , соединяющих внутренние поверхности S_1, $S_2, \ldots$ с внешней поверхностью S. Каждая из этих линий при условии, что она соединяет поверхности, ранее не связанные непрерывным соединением, сокращает порядок перифрактичности на единицу, так что полное число линий, которые необходимо нанести для устранения многограничности, равно порядку перифрактичности, или числу внутренних поверхностей. При нанесении этих линий мы обязаны помнить, что любая линия, соединяющая ранее уже соединенные поверхности, не уменьшает перифрактичности, а вводит цикличность. Когда эти линии проведены, можно утверждать, что при удовлетворении условия соленоидальности внутри S поверхностный интеграл, взятый по любой замкнутой поверхности, лежащей внутри S, но не пересекающей ни одной из этих линий, равен нулю. Если же она пересекает какую-то линию, скажем, L_1, один или нечетное число раз, то она охватывает поверхность S_1, и соответствующий поверхностный интеграл равен Q_1.

Наиболее знакомым примером многограничной области, где удовлетворяются условия соленоидальности, является область, окружающая массу, которая притягивает или отталкивает с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

В этом случае мы имеем

$$X = m\frac{x}{r^3}, \qquad Y = m\frac{y}{r^3}, \qquad Z = m\frac{z}{r^3},$$

где масса m предполагается расположенной в начале координат.

В любой точке, где расстояние r конечно,

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0,$$

но в начале координат эти величины становятся бесконечными. Для любой замкнутой поверхности, не содержащей внутри себя начала координат, поверхностный интеграл равен нулю. Если же она содержит внутри начало координат, то поверхностный интеграл по ней равен $4\pi m$.

Если по какой-то причине мы захотим рассматривать область вокруг m не как многограничную, то тогда должны провести линию из m до бесконечности и при

взятии поверхностного интеграла помнить, что нужно прибавлять $4\pi m$ всякий раз, когда эта линия пересекает поверхность от ее отрицательной стороны к положительной.

О правовинтовых и левовинтовых соотношениях в пространстве

23. В настоящем трактате поступательное движение вдоль какой-либо оси и вращательное движение вокруг этой же оси будут считаться движениями одного и того же знака при условии, что их направления соответствуют направлениям поступательного перемещения и вращения обычного, т. е. правого винта [10].

Так, например, если принять действительное вращение Земли с запада на восток за положительное, то и направление земной оси с юга на север также будет взято за положительное; и если человек идет вперед в положительном направлении, то положительное вращение происходит в таком порядке: голова, правая рука, ноги, левая рука.

Если мы поместим себя на положительную сторону некоторой поверхности, то положительное направление вдоль ограничивающей эту поверхность кривой окажется противоположным движению стрелок часов, циферблат которых обращен к нам.

Это и есть та самая правая (правосторонняя) система отсчета, которая принята Томсоном и Тэтом в их книге «*Натуральная философия*» (*Natural Philosophy*), а также в книге Тэта «*Кватернионы*» (*Quaternions*). Противоположная ей левая (левосторонняя) система отсчета принята в гамильтоновых «*Кватернионах*» (*Lectures*, p. 76, and *Elements*, p. 108, and p. 117 note). Операция перехода от одной системы к другой названа Листингом *Перверсией* — обращением, зеркальным отражением.

Отражение какого-либо предмета в зеркале является его обращенным изображением.

Используя Декартовы оси координат x, y, z, мы будем изображать их так, чтобы общепринятая договоренность о циклическом порядке расположения символов приводила к правой системе отсчета направлений в пространстве. Так, если ось x проведена смотрящей на восток, а ось y — на север, то ось z должна быть проведена вертикально вверх.

---

[10] Совместное действие мышц руки, когда мы, поворачивая тыльной стороной правую ладонь наружу, одновременно проталкиваем руку вперед, оставляет в памяти более прочный отпечаток характера правовинтового движения, чем какое-либо словесное определение. Обычно употребляемый пробочный штопор тоже может служить материальным образом этих же самых соотношений.

Профессор У. Х. Миллер (W. H. Miller) подсказал мне, что усики у виноградной лозы закручиваются по правому винту, а у хмеля — по левому; таким образом, системы соотношений в пространстве могли бы быть названы соответственно системой виноградных соотношений и хмелевых соотношений.

Принимаемая нами виноградная система — это система Линнея (Linnaeus); ею пользуются изготовители винтов во всех цивилизованных странах, кроме Японии. Де Кандолле был первым, назвавшим хмелевую лозу правосторонней, в этом ему последовали Листинг и большинство авторов, писавших о круговой поляризации света. Винты, подобные усикам хмелевой лозы, применяются для сцепления железнодорожных вагонов, а также для прикрепления колес с левой стороны обычных экипажей, и они всегда называются левыми винтами всеми, кто ими пользуется.

Площади поверхностей будут браться с положительным знаком в том случае, когда порядок интегрирования совпадает с циклическим порядком расстановки символов. Так, площадь на плоскости xy, расположенная внутри некоторой замкнутой кривой, может быть записана либо $\int x dy$, либо $-\int y\, dx$; в первом выражении порядок интегрирования есть x, y, во втором — y, x.

Это соотношение между двумя произведениями $dx\, dy$ и $dy\, dx$ можно сравнить с правилом умножения двух перпендикулярных векторов в теории кватернионов, где знак произведения определяется порядком умножения; его можно сравнить также с изменением знака детерминанта, происходящим при перестановке местами соседних строчек или столбцов.

По таким же причинам объемный интеграл должен считаться положительным, когда порядок интегрирования совпадает с циклической расстановкой переменных x, y, z, и отрицательным при обращенном порядке цикличности.

Перейдем теперь к доказательству теоремы, полезной для установления связи между поверхностным интегралом, взятым по некоторой конечной поверхности, и линейным интегралом, взятым вдоль ее границы.

24. Теорема IV. *Линейный интеграл, взятый вдоль замкнутой кривой, может быть выражен через поверхностный интеграл, взятый по поверхности, ограниченной этой кривой.*

Пусть X, Y, Z будут составляющие той векторной величины $\mathfrak{A}$, линейный интеграл от которой должен быть взят по замкнутой кривой s.

Пусть произвольная непрерывная поверхность S целиком ограничена замкнутой кривой s, а составляющие ξ, η, ζ другой векторной величины $\mathfrak{B}$ связаны с составляющими X, Y, Z уравнениями

$$\xi=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}, \qquad \eta=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}, \qquad \zeta=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}. \tag{1}$$

Тогда поверхностный интеграл от $\mathfrak{B}$, взятый по поверхности S, равен линейному интегралу от $\mathfrak{A}$, взятому вдоль кривой s. Очевидно, что сами составляющие ξ, η, ζ удовлетворяют условию соленоидальности.

Пусть l, m, n будут направляющими косинусами нормали к элементу поверхности dS, отсчитываемой в положительном направлении. Тогда величина поверхностного интеграла от $\mathfrak{B}$ может быть записана так:

$$\iint (l\xi+m\eta+n\zeta)\, dS. \tag{2}$$

Для того чтобы придать элементу dS определенный смысл, предположим, что в каждой точке поверхности значения координат x, y, z заданы как функции двух независимых переменных α и β. Если β постоянна, а α изменяется, точка (x, y, z) будет описывать некоторую кривую на поверхности, и если перебрать целый ряд значений β, то будет прочерчена серия таких кривых, полностью лежащих на поверхности S. Подобным же образом, перебирая последовательность постоянных α, можно нанести вторую серию кривых, пересекающихся с кривыми первой серии и разделяющих всю поверхность на элементарные участки, любой из которых может быть взят за элемент dS.

Проекция этого элемента на плоскость yz, согласно обычным формулам, равна

$$l\,dS=\left(\frac{dy}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta}-\frac{dy}{d\beta}\frac{dz}{d\alpha}\right)d\beta\,d\alpha. \tag{3}$$

Выражения для mdS и ndS получаются отсюда путем перестановки x, y, z в циклическом порядке.

Поверхностный интеграл, который мы должны найти, есть

$$\iint(l\xi+m\eta+n\zeta)\,dS, \tag{4}$$

или, выражая ξ, η, ζ через X, Y, Z,

$$\iint\left(m\frac{dX}{dz}-n\frac{dX}{dy}+n\frac{dY}{dx}-l\frac{dY}{dz}+l\frac{dZ}{dy}-m\frac{dZ}{dx}\right)dS. \tag{5}$$

Часть этого интеграла, зависящая от X, может быть записана так:

$$\iint\left\{\frac{dX}{dz}\left(\frac{dz}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}-\frac{dz}{d\beta}\frac{dx}{d\alpha}\right)-\frac{dX}{dy}\left(\frac{dx}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta}-\frac{dx}{d\beta}\frac{dy}{d\alpha}\right)\right\}d\beta\,d\alpha. \tag{6}$$

После добавления и вычитания величины $\frac{dX}{dx}\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}$ это выражение становится таким:

$$\iint\left\{\frac{dx}{d\beta}\left(\frac{dX}{dx}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{dX}{dy}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{dX}{dz}\frac{dz}{d\alpha}\right)-\frac{dx}{d\alpha}\left(\frac{dX}{dx}\frac{dx}{d\beta}+\frac{dX}{dy}\frac{dy}{d\beta}+\frac{dX}{dz}\frac{dz}{d\beta}\right)\right\}d\beta\,d\alpha; \tag{7}$$

$$=\iint\left(\frac{dX}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}-\frac{dX}{d\beta}\frac{dx}{d\alpha}\right)d\beta\,d\alpha. \tag{8}$$

Предположим теперь, что кривые постоянных α образуют семейство замкнутых кривых, окружающих некоторую точку на поверхности, в которой α принимает свое минимальное значение, равное α_0; пусть последняя кривая этого семейства, для которой $\alpha=\alpha_1$, совпадает с замкнутой кривой s.

Предположим также, что кривые постоянных β образуют семейство линий, проведенных от точки, где $\alpha=\alpha_0$, до замкнутой кривой s, причем первая линия, соответствующая значению β_0, совпадает с последней линией β_1.

При интегрировании (8) по частям (первый член интегрируется по α, а второй — по β) двойные интегралы взаимно уничтожаются и выражение принимает вид

$$\int\limits_{\beta_0}^{\beta_1}\left(X\frac{dx}{d\beta}\right)_{\alpha=\alpha_1}d\beta-\int\limits_{\beta_0}^{\beta}\left(X\frac{dx}{d\beta}\right)_{\alpha=\alpha_0}d\beta-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(X\frac{dx}{d\alpha}\right)_{\beta=\beta_1}d\alpha+\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(X\frac{dx}{d\alpha}\right)_{\beta=\beta_0}d\alpha. \tag{9}$$

Так как точка $(\alpha,\ \beta_1)$ совпадает с точкой $(\alpha,\ \beta_0)$, то третий и четвертый члены уничтожают друг друга, и поскольку в точке, где $\alpha=\alpha_0$, существует только одно значение x, то второй член обращается в нуль и выражение сводится к первому члену.

Так как кривая $\alpha=\alpha_1$ совпадает с замкнутой кривой s, мы можем написать это выражение в виде

$$\int X\frac{dx}{ds}\,ds, \tag{10}$$

где интегрирование выполняется вдоль кривой s. Аналогично можно поступить и с теми частями поверхностного интеграла, которые зависят от Y и Z, так что окончательно получаем

$$\iint (l\xi+m\eta+n\zeta)\,dS=\int\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds, \qquad (11)$$

где первый интеграл распространен на поверхности S, а второй берется вдоль ограничивающей ее кривой s[11].

О действии оператора ∇ на векторную функцию

25. Мы видели, что оператор, обозначенный как ∇, — это такой оператор, при помощи которого векторная величина вычисляется из ее потенциала. Тот же самый оператор, однако, примененный к векторной функции, дает результаты, входящие в две только что доказанные нами теоремы (III и IV). Профессору Тэту [12] мы обязаны обобщением этого оператора применительно к векторным смещениям, а также большей части последующих усовершенствований.

Пусть σ будет векторной функцией вектора переменной точки ρ. Как обычно, предположим, что

$$\rho=ix+jy+kz \quad \text{и} \quad \sigma=iX+jY+kZ,$$

где X, Y, Z — составляющие σ в направлениях осей.

Мы должны совершить над σ операцию

$$\nabla=i\frac{d}{dx}+j\frac{d}{dy}+k\frac{d}{dz}.$$

Выполняя эту операцию и помня правило перемножения i, j, k, мы находим, что $\nabla\sigma$ состоит из двух частей: одной — скалярной и другой — векторной.

Скалярная часть

$$S\nabla\sigma=-\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right), \qquad \text{(см. Теорему III)}$$

а векторная часть

$$V\nabla\sigma=i\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+j\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+k\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right).$$

Если связь между X, Y, Z и ξ, η, ζ задается уравнением (1) предыдущей теоремы, то мы можем записать

$$V\nabla\sigma=i\xi+j\eta+k\zeta. \qquad \text{(см. Теорему IV)}$$

Таким образом, оказывается, что функции от X, Y, Z, фигурирующие в двух теоремах, получаются в результате действия оператора ∇ на вектор, компоненты

---

[11] Эта теорема была дана профессором Стоксом (*Smith's Prize Examination*, 1854, question 8). Она доказана в книге Томсона и Тэта *Natural Philosophy*, § 190 (II).

[12] См. *Proc. R. S. Edin.*, April 28, 1862. «On Green's and other allied Theorems», *Trans. R. S. Edin.*, 1869—70 — очень ценная статья, и «On some Quaternion Integrals», *Proc. R. S. Edin.*, 1870—71.

которого суть X, Y, Z. А сами эти теоремы могут быть записаны так:

$$\iiint S\nabla\sigma\, dv = \iint S\sigma U_\nu\, ds \tag{III}$$

и

$$\int S\sigma\, d\rho = -\iint S\nabla\sigma U_\nu\, ds, \tag{IV}$$

где dv есть элемент объема, ds — элемент поверхности, $d\rho$ — элемент кривой, $U\nu$ — единичный вектор в направлении нормали.

Для того чтобы понять смысл этих функций вектора, предположим, что σ_0 есть значение σ в точке P, и будем изучать величину $\sigma-\sigma_0$ в окрестности P. Если построить вокруг P некоторую замкнутую поверхность, то при направленном

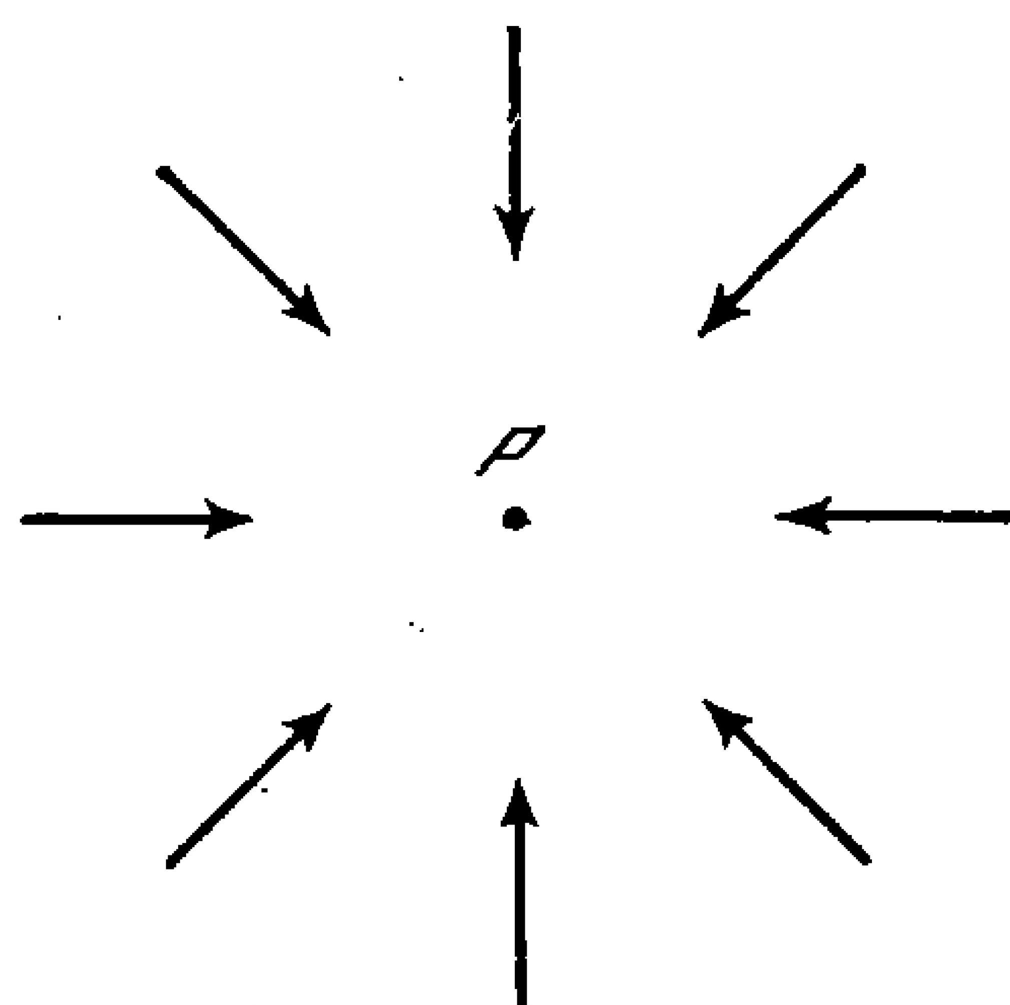


Рис 1

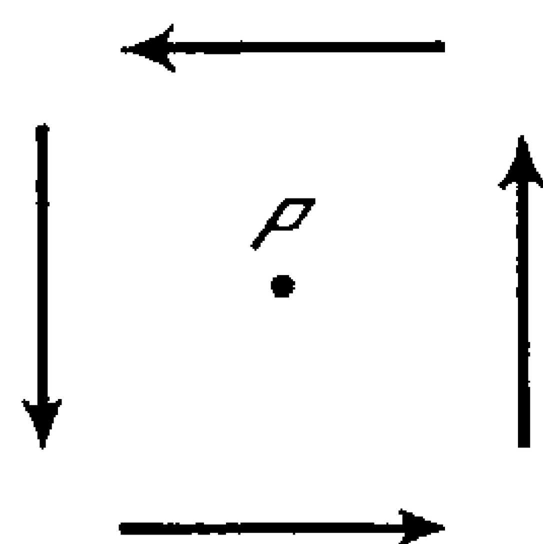


Рис. 2

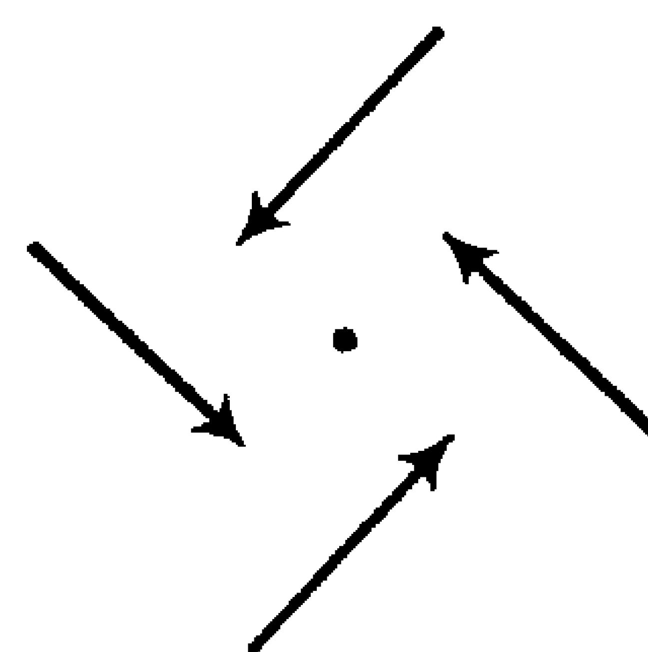


Рис. 3

внутрь поверхностном интеграле от σ, взятом по этой поверхности, величина $S\nabla\sigma$ будет положительной и вектор $\sigma-\sigma_0$ около точки P в целом будет направлен в сторону P, как это показано на рис. 1.

В связи с этим я предлагаю скалярную часть от $\nabla\sigma$ называть *конвергенцией* σ в точке P.

Для интерпретации векторной части $\nabla\sigma$ предположим, что вектор, имеющий компоненты ξ, η, ζ, направлен под прямым углом к плоскости листа вверх, и будем изучать вектор $\sigma-\sigma_0$ вблизи точки P. При этом окажется (см. рис. 2), что этот вектор в целом расположен тангенциально и направлен противоположно движению часовых стрелок.

Я предлагаю (с большой неуверенностью, однако) называть векторную часть $\nabla\sigma$ *ротацией* (ротором) σ в точке P.

На рис. 3 проиллюстрировано сочетание ротации и конвергенции.

Рассмотрим теперь смысл уравнения $V\nabla\sigma=0$.

Это уравнение означает, что либо величина $\nabla\sigma$ является скаляром, либо вектор σ есть пространственная вариация от некоторой скалярной функции Ψ.

26. Одно из наиболее замечательных свойств оператора ∇ состоит в том, что при повторном применении он превращается в оператор

$$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right),$$

который встречается во всех разделах Физики и который мы можем называть Оператором Лапласа.

Сам по себе этот оператор существенно скалярный. Когда он действует на скалярную функцию, получается скаляр, а когда он действует на векторную функцию, получается вектор.

Если провести небольшую сферу радиуса r с центром в точке P и считать, что q_0 есть значение величины q в ее центре, а $\bar{q}$ есть значение q среднее по всем точкам внутри сферы, то

$$q_0-\bar{q}=\frac{1}{10}r^2\nabla^2 q,$$

так что значение в центре либо превышает, либо слегка не достигает этого среднего значения в зависимости от того, является ли величина $\nabla^2 q$ положительной или отрицательной.

Я предлагаю поэтому называть величину $\nabla^2 q$ *концентрацией* (сгущением) q в точке P, потому что она характеризует превышение величины q в этой точке над ее средним значением в окрестности данной точки.

Если q — скалярная функция, то метод отыскания ее среднего значения хорошо известен. Если же это векторная функция, то нам следует отыскивать ее среднее значение, руководствуясь правилами интегрирования векторных функций. В результате, конечно, получится вектор.

ЧАСТЬ I
ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ГЛАВА I
ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЙ

Электризация трением

27. Опыт I [1]. Возьмем кусок стекла и кусок смолы, не обладающие каждый никакими электрическими свойствами, потрем их друг о друга и оставим натертые поверхности в контакте. Пока еще электрические свойства не будут проявляться. Отделим куски друг от друга. Они начнут взаимно притягиваться.

Если другой кусок стекла потереть о другой кусок смолы, отделить затем эти куски и подвесить их рядом с первыми двумя кусками стекла и смолы, то можно будет заметить: 1) что оба куска стекла отталкивают друг друга, 2) что каждый кусок стекла притягивается к каждому куску смолы, 3) что оба куска смолы отталкивают друг друга.

Эти явления притяжения и отталкивания называются *Электрическими* явлениями, а про тела, проявляющие такие свойства, говорят, что они *наэлектризованы*, или *заряжены электричеством*.

Тела могут быть наэлектризованы и многими другими способами, не только с помощью трения.

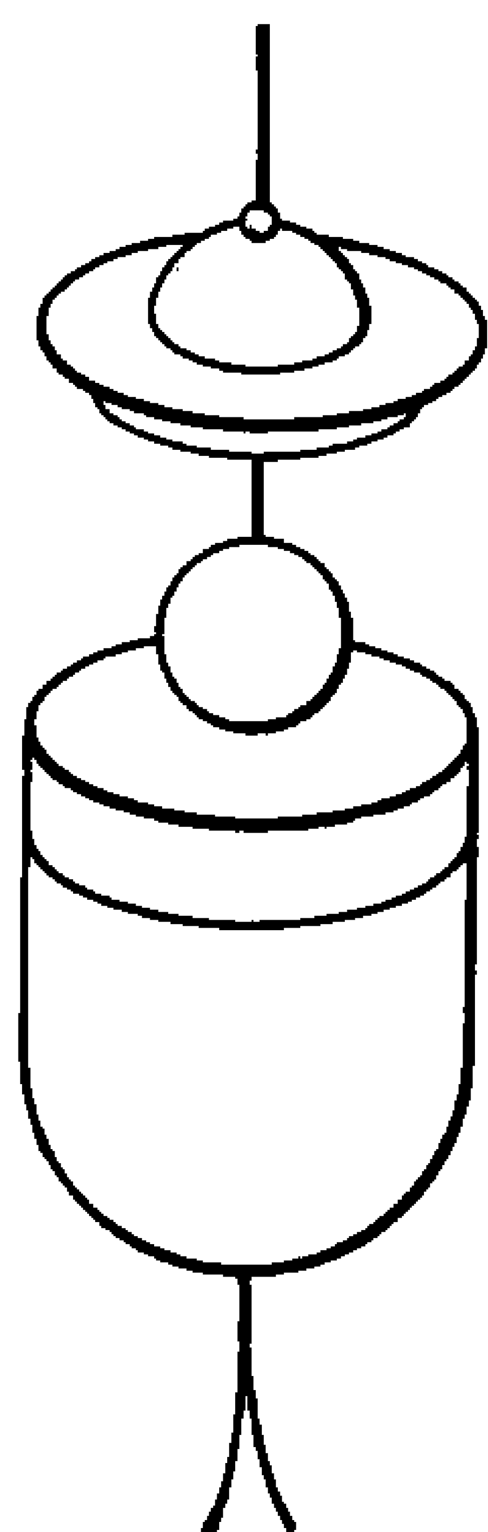
Электрические свойства обоих кусков стекла сходны между собой, но противоположны свойствам обоих кусков смолы; то, что отталкивается смолой, притягивается стеклом, а то, что притягивается смолой, отталкивается стеклом.

Если тело, наэлектризованное каким бы то ни было способом, ведет себя подобно стеклу, т. е. отталкивает стекло и притягивает смолу, то говорят, что тело заряжено *стеклообразно*, если же оно притягивает стекло и отталкивает смолу, говорят, что оно заряжено *смолообразно*. Все наэлектризованные тела, как оказалось, наэлектризованы либо стеклообразно, либо смолообразно.

Среди людей науки принято стеклообразную электризацию называть положительной, а смолообразную — отрицательной. Прямо противоположные свойства обоих видов электризации оправдывают приписывание им противоположных знаков, однако вопрос о том, какому из видов электричества приписывать положительный знак, следует считать предметом условного соглашения, подобно тому как чисто условным является откладывание положительных расстояний в графиках в правую сторону.

Между телом наэлектризованным и ненаэлектризованным нельзя обнаружить взаимодействия — ни притяжения, ни отталкивания. Если в каком-либо случае

[1] См. Sir W. Thomson, On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium, *Cambridge and Dublin Mathematicat Journal*, March, 1848.


Рис. 4

мы замечаем, что ненаэлектризованные предварительно тела испытывают воздействие наэлектризованных, то это обусловлено тем, что эти тела *электризуются через индукцию*.

Электризация через Индукцию

28. Опыт II[2]. Пусть полый металлический сосуд подвешен на нитях из чистого шелка и пусть такая же нить прикреплена к крышке сосуда, так что сосуд можно открывать и закрывать, не прикасаясь к нему [рис. 4].

Пусть кусочки стекла и смолы, наэлектризованные как и раньше, тоже подвешены на нитях.

Пусть сосуд первоначально не был наэлектризован. Тогда, если наэлектризованный кусочек стекла подвесить внутри сосуда на нити, не касаясь сосуда, и закрыть крышку, то наружная часть сосуда окажется заряженной стеклообразно и можно показать, что степень электризации вне сосуда точно одна и та же, в каком бы месте внутри сосуда мы ни подвешивали кусочек стекла.

Если теперь вынуть кусочек стекла из сосуда, не прикасаясь к нему, то электризация стекла окажется той же, что и до его помещения в сосуд, а электризация сосуда исчезнет.

Такая электризация сосуда, зависящая от того, помещен ли внутрь него заряженный кусочек стекла, и исчезающая при удалении его, называется электризацией через Индукцию.

Сходные эффекты возникли бы в случае, если бы кусочек стекла был подвешен вне сосуда вблизи него, но в этом случае мы обнаружили бы стеклообразную электризацию на одной стороне наружной поверхности сосуда и смолообразную — на другой. Если кусочек стекла находится внутри сосуда, то вся наружная его поверхность заряжена стеклообразно, а вся внутренняя — смолообразно.

Электризация через Проводимость

29. Опыт III. Пусть металлический сосуд наэлектризован через индукцию, как в последнем опыте, и вблизи него на нити из чистого шелка подвешено другое металлическое тело. Внесем металлическую проволоку, также подвешенную на нити, таким образом, чтобы одновременно коснуться наэлектризованного сосуда и второго тела.

При этом второе тело окажется заряженным стеклообразно, а электризация сосуда уменьшится.

Состояние электризации передалось от сосуда второму телу через проволоку. Проволока называется *проводником* электричества, а про второе тело говорят, что оно *наэлектризовано через проводимость*.

---

[2] Этим и несколькими следующими опытами мы обязаны Фарадею (On Static Electrical Inductive Actions, *Phil. Mag.*, 1843 или *Exp. Res.*, vol. II, p. 279).

Проводники и Изоляторы

Опыт IV. Если вместо металлической проволочки использовать стеклянную палочку, брусок из смолы или гуттаперчи или нить из чистого шелка, то никакой передачи электричества не произойдет. Поэтому эти вещества называются Непроводниками электричества. Непроводники используются в опытах по электричеству для крепления наэлектризованных тел без утечки их электричества. В этом случае они называются Изоляторами.

Металлы являются хорошими проводниками. Воздух, стекло, смолы, гуттаперча, эбонит, парафин и т. п.— хорошие изоляторы. Но, как мы увидим ниже, все вещества оказывают сопротивление прохождению электричества и все они допускают такое прохождение, хотя и в чрезвычайно различной степени. Этот вопрос мы рассмотрим, когда перейдем к анализу движения электричества. Сейчас мы будем рассматривать только два класса тел: хорошие проводники и хорошие изоляторы.

В Опыте II наэлектризованное тело вызывает электризацию в металлическом сосуде, будучи отделенным от него воздухом, непроводящей средой. Такая среда, рассматриваемая как передающая электрические эффекты без проводимости, была названа Фарадеем Диэлектрической средой, а действие, передаваемое через нее, названо Индукцией.

В Опыте III наэлектризованный сосуд вызывает электризацию другого металлического тела через вещество проволоки. Предположим, что мы удалим проволоку, вынем из сосуда, не прикасаясь к нему, наэлектризованный кусочек стекла и удалим его на достаточно большое расстояние. Тогда второе тело все еще будет проявлять стеклообразную электризацию, но сосуд после удаления кусочка стекла будет иметь смолообразную электризацию. Если теперь соединить проволокой оба тела, то будет иметь место проводимость вдоль проволоки и вся электризация обоих тел исчезнет. Это показывает, что оба тела были наэлектризованы в равной степени, но противоположно.

30. Опыт V. В Опыте II было показано, что если кусочек стекла, наэлектризованный трением о смолу, подвесить внутри изолированного металлического сосуда, то наблюдаемая снаружи электризация не зависит от положения кусочка стекла. Если теперь ввести внутрь того же сосуда тот кусочек смолы, которым было натерто стекло, не прикасаясь при этом ни к стеклу, ни к сосуду, то окажется, что никакой электризации вне сосуда не возникнет. Отсюда мы заключаем, что электризация смолы в точности равна и противоположна электризации стекла. Помещая внутрь сосуда любое число тел, наэлектризованных любым способом, можно показать, что электризация вне сосуда представляет собой алгебраическую сумму всех электризаций, если смолообразную электризацию считать отрицательной. Мы имеем, таким образом, практический способ сложения электрических эффектов от различных тел без изменения состояния их электризации.

31. Опыт VI. Пусть в нашем распоряжении есть еще один металлический сосуд B и пусть наэлектризованный кусочек стекла помещается в первый сосуд A, а наэлектризованный кусочек смолы — во второй сосуд B. Соединим затем оба сосуда металлической проволочкой, как в Опыте III. Все признаки электризации при этом исчезнут.

Удалим теперь проволочку и вынем кусочки стекла и смолы из сосудов, не прикасаясь к ним. Окажется, что сосуд *A* наэлектризован смолообразно, а сосуд *B* — стеклообразно.

Если теперь стекло и сосуд *A* внести вместе внутрь большего изолированного металлического сосуда *C*, то обнаружится, что вне сосуда *C* нет никакой электризации. Это показывает, что электризация сосуда *A* в точности равна и противоположна электризации куска стекла. Таким же способом можно показать, что электризация сосуда *B* равна и противоположна электризации куска смолы.

Мы получили, таким образом, способ зарядки сосуда количеством электричества, в точности равным и противоположным количеству электричества на наэлектризованном теле без изменения состояния электризации этого тела. Мы можем таким образом зарядить любое количество сосудов в точности одинаковыми количествами электричества любого рода, которые мы можем принять в качестве временных единиц.

32. Опыт VII. Пусть сосуд *B*, заряженный некоторым количеством положительного электричества, которое мы примем пока за единицу, вносится в больший изолированный сосуд *C*, не прикасаясь к нему. Он вызовет положительную электризацию на внешней части сосуда *C*. Пусть теперь сосуд *B* соприкоснулся с внутренней поверхностью сосуда *C*. При этом никакого изменения внешней электризации не будет наблюдаться. Если теперь вынуть сосуд *B* из сосуда *C*, не коснувшись его, и унести его на достаточно большое расстояние, то окажется, что сосуд *B* полностью разряжен, а сосуд *C* заряжен единицей положительного электричества.

Мы имеем, таким образом, способ передачи заряда от *B* к *C*.

Зарядим теперь вновь *B* единицей электричества, введем его внутрь сосуда *C*, уже заряженного раньше, приведем его в соприкосновение с внутренностью сосуда *C* и удалим из сосуда. Сосуд *B* окажется при этом вновь полностью разряженным, так что заряд на *C* удвоится.

Повторяя этот процесс, можно установить, что, как бы сильно ни был предварительно заряжен сосуд *C* и каким бы способом ни заряжался сосуд *B*, если *B* вначале полностью окружен сосудом *C*, затем приведен в соприкосновение с *C* и, наконец, удален из *C*, не касаясь его, то заряд *B* полностью передается *C* и сосуд *B* оказывается полностью разряженным.

Этот опыт указывает нам способ зарядки тела произвольным числом единиц электричества. Когда мы перейдем к математической теории электричества, то увидим, что результаты этого опыта позволяют осуществить точную проверку истинности теории.

33. Прежде чем перейти к исследованию закона действия электрической силы, перечислим уже установленные нами факты.

Помещая любую наэлектризованную систему внутрь изолированного полого проводящего сосуда и изучая результирующий эффект вне сосуда, мы устанавливаем характер полной электризации системы, находящейся внутри сосуда, без какой-либо передачи электричества между различными телами системы.

Электризация наружной стороны сосуда может быть установлена с большой точностью путем подсоединения сосуда к электроскопу.

Мы можем считать электроскоп состоящим из листочка золотой фольги, подвешенного между двумя телами, одно из которых заряжено положительно, а

другое — отрицательно. Если золотой листочек наэлектризован, то он отклоняется в сторону того тела, которое заряжено противоположно заряду электризации листочка. Увеличивая электризацию обоих тел и чувствительность подвески, можно добиться обнаружения чрезвычайно малой электризации золотого листочка.

Когда мы перейдем к описанию электрометров и умножителей, мы увидим, что существуют еще более тонкие методы обнаружения электризации и проверки точности наших теорий, но пока мы будем считать, что проверка производится соединением полого сосуда с золотым листочком электроскопа.

Этот метод применялся Фарадеем в его замечательных демонстрациях законов электрических явлений [3].

34. I. Полная электризация тела или системы тел остается неизменной, пока не происходит отдача электризации другим телам или получение ее от них.

Как было обнаружено, во всех опытах с электричеством электризация тел изменяется, но всегда оказывается, что это изменение обусловлено несовершенством изоляции и что по мере улучшения средств изоляции потери электризации становятся все меньше. Мы можем поэтому утверждать, что электризация тела, помещенного в идеально изолирующую среду, будет оставаться строго постоянной.

II. При электризации одного тела другим через проводимость полная электризация обоих тел остается той же, т. е. одно тело в такой же мере теряет положительную (или приобретает отрицательную) электризацию, в какой другое тело приобретает положительную (или теряет отрицательную) электризацию. Ибо, если оба эти тела заключить в полый сосуд, то не будет наблюдаться никакого изменения полной электризации.

III. При электризации тела трением или каким-либо другим известным способом образуются равные количества положительной и отрицательной электризации. Ибо электризация системы в целом может быть проведена в полом сосуде или же процесс электризации может производиться внутри самого сосуда, и, как бы сильно ни электризовались части системы, полная электризация, измеряемая отклонением листочка электроскопа, остается неизменно равной нулю.

Таким образом, электризация тела представляет собой физическую величину, поддающуюся измерению, и комбинация на опыте двух или нескольких электризаций происходит подобно алгебраическому сложению двух или нескольких величин. Поэтому мы в праве пользоваться языком, пригодным как для качественного, так и для количественного описания электризации, и говорить о любом наэлектризованном теле как о «заряженном определенным количеством положительного или отрицательного электричества».

35. Возведя электричество, как мы это сделали, в ранг физической величины, не следует слишком спешить с утверждением, что оно является или не является веществом, или же что оно является или не является формой энергии, или же что оно относится к какой-либо известной категории физических величин. Все, что мы до сих пор доказали,— это лишь то, что оно не может быть создано или уничтожено, так что если полное количество электричества внутри замкнутой поверхности увеличивается или уменьшается, то соответствующее количество электри-

---

[3] On Static Electrical Inductive Actions, *Phil. Mag.*, 1873 или *Exp. Res.*, vol. II, p. 279.

чества должно войти внутрь этой замкнутой поверхности или выйти через нее наружу.

Это верно для вещества и выражается уравнением, известным как Уравнение Непрерывности в Гидродинамике.

Это неверно для теплоты, ибо теплота внутри замкнутой поверхности может увеличиваться или уменьшаться без прохождения ее внутрь или наружу через эту поверхность за счет преобразования какой-либо другой формы энергии в теплоту или преобразования теплоты в какую-либо другую форму энергии.

Это неверно даже и для энергии в целом, если допускать непосредственное взаимодействие тел на расстоянии, потому что в этом случае тело, находящееся вне замкнутой поверхности, может обмениваться энергией с телом внутри этой поверхности. Но если все кажущиеся случаи действия на расстоянии представляют собой результат взаимодействия частей промежуточной среды, то можно полагать, что во всех случаях увеличения или уменьшения энергии внутри замкнутой поверхности можно обнаружить прохождение энергии через поверхность, если, конечно, имеется ясное представление о природе взаимодействия частей среды в данном случае.

Но есть еще одно соображение, оправдывающее наше утверждение, что электричество как физическая величина, равнозначная полной электризации тела, не является, подобно теплоте, формой энергии. Наэлектризованная система обладает определенной величиной энергии, и эта энергия может быть найдена умножением количества электричества в каждой части системы на другую физическую величину, называемую Потенциалом этой части системы, и вычислением полусуммы этих произведений. Величины «Количество электричества» и «Потенциал», будучи перемноженными друг на друга, образуют величину ««Энергия». Поэтому невозможно, чтобы электричество и энергия были величинами одного типа, так как электричество — лишь один из факторов, определяющих энергию; другим фактором является «Потенциал».

Энергия, являющаяся произведением этих факторов, может рассматриваться также как произведение различных других пар величин, таких как

(сила)×(расстояние, на котором действует сила),
(масса)×(действие тяготения на определенном перепаде высот),
(масса)×(половина квадрата ее скорости),
(давление)×(объем жидкости, вводимый в сосуд при этом давлении),
(химическое сродство)×(химическое изменение, измеряемое числом электрохимических эквивалентов, входящих в соединение).

Если бы нам удалось получить ясное механическое представление о природе электрического потенциала, то в сочетании с представлением об энергии это позволило бы нам определить ту физическую категорию, к которой следует отнести «Электричество».

36. В большинстве теорий по этому вопросу Электричество трактуется как некоторое вещество, но поскольку существует два вида электризации и они, соединяясь, уничтожают друг друга, а мы не можем представить себе двух веществ, уничтожающих друг друга, то проводится различие между Свободным Электричеством и Электричеством Соединенным (связанным).

Теория Двух Жидкостей

В так называемой Теории Двух Жидкостей все тела в ненаэлектризованном состоянии предполагаются заряженными равным количеством положительного и отрицательного электричества. Эти количества электричества предполагаются столь большими, что ни в одном наблюдавшемся до сих пор процессе электризации тело не лишалось еще полностью электричества того или иного рода. Согласно этой теории, процесс электризации состоит в том, что определенное количество P положительного электричества отнимается у тела A и передается телу B, или определенное количество N отрицательного электричества отнимается у тела B и передается телу A, или же имеет место некоторое сочетание этих процессов.

В результате тело A будет иметь на $P+N$ единиц отрицательного электричества больше, чем осталось на нем положительного, причем это положительное электричество считается находящимся в соединенном (связанном) состоянии с равным количеством отрицательного электричества. Количество электричества $P+N$ называется Свободным, остальное электричество называется Связанным, Латентным (скрытым) или Фиксированным электричеством.

В большинстве изложений этой теории эти два вида электричества называются «Жидкостями», так как они способны передаваться от одного тела другому и крайне подвижны в проводящих телах. Другие свойства жидкостей, такие, например, как их инерция, вес, упругость, не приписываются электрическим жидкостям теми авторами, которые используют теорию в чисто математических целях. Но применение слова «Жидкость» способно сбить с толку людей несведующих, в том числе и многих ученых, которые, не являясь естествоиспытателями, ухватываются за слово «Жидкость» как за единственный термин, показавшийся им понятным в утверждениях этой теории.

Мы увидим, что математическое рассмотрение вопроса в значительной мере было разработано авторами, пользующимися терминологией «Двухжидкостной» теории. Однако их результаты выведены исключительно из данных, поддающихся экспериментальной проверке, и, следовательно, должны быть истинны независимо от того, принимаем мы теорию двух жидкостей или нет. Поэтому опытное подтверждение математических результатов не является свидетельством ни за, ни против специфических доктрин этой теории.

Введение двух жидкостей позволяет нам рассматривать отрицательную электризацию A и положительную электризацию B как следствие *любого* из трех различных процессов, приводящих к одинаковому результату. Мы выше приняли, что электризация вызвана передачей P единиц положительного электричества от A к B и N единиц отрицательного электричества от B к A. Но если бы $P+N$ единиц положительного электричества было передано от A к B или же $P+N$ единиц отрицательного электричества было передано от B к A, то получающееся в результате количество «свободного электричества» на A и на B было бы такое же, как и раньше, но количество «связанного электричества» на A было бы во втором случае меньше, а в третьем больше, чем в первом.

Таким образом, согласно этой теории, казалось бы, можно изменять не только количество свободного электричества в теле, но и количество связанного электричества. Однако до сих пор не было обнаружено ни одного явления при электри-

зации тел, в котором можно было бы проследить изменение в них количества связанного электричества. Таким образом, либо связанное электричество не имеет поддающихся наблюдению свойств, либо количество связанного электричества не может меняться. Первое предположение для чистого математика не представляет никаких трудностей; он не приписывает этим жидкостям никаких свойств, кроме притяжения и отталкивания, так как он считает эти жидкости просто уничтожающими друг друга, подобно $+e$ и $-e$, т. е. их комбинацию он считает истинным математическим нулем. Для тех же, кто не может пользоваться словом Жидкость, не думая при этом о веществе, трудно себе представить, как может смесь двух жидкостей не иметь вообще никаких свойств, так что добавление большего или меньшего количества этой смеси никак не сказывается на теле ни в увеличении его массы или веса, ни в изменении каких-либо других его свойств. Исходя из этого, некоторые авторы предположили, что в любом процессе электризации передается в точности одинаковое количество обеих жидкостей в противоположных направлениях, так что полное вместе взятое количество обеих жидкостей в любом теле остается всегда неизменным. С помощью этого нового закона они попытались «соблюсти приличия», забыв о том, что в этом законе нет никакой нужды, кроме как для согласования «Двухжидкостной» теории с фактами и предотвращения предсказания ею несуществующих явлений.

Теория Одной Жидкости

37. Теория Одной Жидкости отличается от теории Двух Жидкостей лишь тем, что оба вещества не считаются во всех отношениях одинаковыми, но противоположными; одному из них, обычно отрицательному, придаются свойства и наименование Обычного Вещества, а второе сохраняет название Электрической Жидкости. Частицы жидкости считаются отталкивающимися друг от друга, согласно закону обратной пропорциональности квадрату расстояния, и притягивающимися к частицам вещества, согласно тому же закону. Частицы вещества считаются отталкивающимися друг от друга и притягивающимися к частицам электричества.

Если тело содержит такое количество электрической жидкости, что частица электрической жидкости, находящаяся вне тела, настолько же отталкивается электрической жидкостью в теле, насколько она притягивается к веществу тела, то такое тело называется Насыщенным. Если количество жидкости в теле больше, чем требуется для насыщения, то излишек называют Избыточной жидкостью, а тело называется Перезаряженным. Если количество жидкости меньше насыщающего, то тело называется Недозаряженным, а количество жидкости, требуемое для его насыщения, называют иногда Недостающей жидкостью. Число единиц электричества, необходимое для насыщения одного грамма обычного вещества, должно быть очень большим, потому что грамм золота можно расплющить в лист площадью в квадратный метр и в таком виде он может иметь отрицательный заряд по крайней мере в 60 000 единиц электричества. Чтобы насытить заряженный таким образом лист золота, требуется ввести в него именно такое количество электрической жидкости, так что полное количество жидкости, необходимое для насыщения, должно быть больше этого. Предполагается, что притяжение между веществом и жидкостью в двух насыщенных телах чуть больше, чем отталкивание

между веществом обоих тел и между их жидкостями. Эта остаточная сила считается ответственной за гравитационное притяжение.

Эта теория, как и Двухжидкостная, не слишком много объясняет. Но она заставляет нас считать массу электрической жидкости столь малой, что ни при каких достижимых положительных или отрицательных степенях электризации не обнаруживается увеличение или уменьшение массы или веса тела. Кроме того, эта теория до сих пор не в состоянии дать достаточно разумное основание тому, что именно стеклообразную, а не смолообразную электризацию следует считать обусловленной *избытком* электричества.

Против этой теории иногда выдвигалось одно возражение людьми, которым следовало бы рассуждать более мотивированно. Утверждалось, что учение о взаимном *отталкивании* тех частиц вещества, которые не связаны с электричеством, находится в прямом противоречии с хорошо установленным фактом, что любая частица вещества *притягивается* к любой другой частице всюду во Вселенной, и что если бы теория Одной Жидкости была верна, то небесные тела взаимно отталкивались бы.

Ясно, однако, что, согласно этой теории, если бы небесные тела состояли из вещества, не связанного с электричеством, то они были бы чрезвычайно сильно наэлектризованы отрицательно и взаимно расталкивались бы. Однако у нас нет никаких оснований полагать, что они находятся в таком сильно наэлектризованном состоянии или могли бы поддерживаться в таком состоянии. Земля и все тела, притяжение которых обнаружено, находятся, скорее всего, в ненаэлектризованном состоянии, т. е. содержат нормальный электрический заряд, и единственное взаимодействие между ними — это упомянутая выше остаточная сила. Значительно более оправданным основанием для возражений против этой теории является искусственный характер введения остаточной силы.

В настоящем трактате я предполагаю на различных стадиях исследования проверить эти различные теории в свете дополнительных классов явлений. Со своей стороны, я ожидаю дополнительного освещения природы электричества от изучения того, что имеет место в пространстве, разделяющем электрические тела. В этом характерная особенность манеры исследований, принятой Фарадеем в его «Экспериментальных Исследованиях», и по мере продвижения вперед я намерен представить результаты Фарадея, У. Томсона и др. в связной и математической форме, чтобы можно было почувствовать, какие явления описываются в равной мере хорошо всеми теориями, а какие указывают на присущие каждой теории трудности.

Измерение силы между наэлектризованными телами

38. Силы могут быть измерены различными способами. Например, одно из тел можно подвесить на одном плече чувствительных весов, уравновесив его в ненаэлектризованном состоянии разновесами, подвешенными ко второму плечу. После этого можно поместить под первым телом другое тело на известном расстоянии от него, так что притяжение или отталкивание тел при их электризации может увеличить или уменьшить кажущийся вес первого тела. Вес, который нужно добавить или убавить на втором плече, выраженный в динамических единицах, служит ме-

рой силы между телами. Такое приспособление использовалось сэром К. Сноу Харрисом и принято в абсолютных электрометрах сэра У. Томсона (см. п. 217).

Иногда удобнее использовать крутильные весы, в которых горизонтальный стержень подвешен на тонкой проволочке или нити, так что он может колебаться вокруг вертикальной проволочки, как оси, а тело прикреплено к одному из концов стержня, и на него действует сила в касательном направлении, стремящаяся повернуть стержень вокруг вертикальной оси и закрутить нить подвески на некоторый угол. Крутильная жесткость проволочки находится измерением периода колебаний стержня, момент инерции которого заранее известен, а по углу закручивания и крутильной жесткости можно найти силу притяжения или отталкивания. Крутильные весы были придуманы Майчеллом (Michell) для определения силы гравитационного притяжения между двумя малыми телами и применены Кавендишем для этой цели. Кулон, работая независимо от этих исследователей, вновь изобрел их, тщательно исследовал их действие и успешно применил их для установления законов действия электрических и магнитных сил. С тех пор крутильные весы всегда используются в исследованиях, требующих измерения малых сил (см. п. 215).

39. Предположим, что мы можем каким-либо из этих методов измерить силу, действующую между двумя наэлектризованными телами. Будем считать, что размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними, так что результат мало изменится от какой-либо неравномерности в распределении электризации по любому из тел, и примем, что оба тела подвешены в воздухе так, что находятся на достаточно большом расстоянии от других тел, на которых они могли бы вызвать электризацию через индукцию.

Тогда оказывается, что если тела помещены на фиксированном расстоянии друг от друга и имеют заряды, равные соответственно e и e' наших временных единиц электричества, то они будут взаимно отталкиваться с силой, пропорциональной произведению e на e'. Если e или e' отрицательно, т. е. один из зарядов стеклообразный, а другой смолообразный, то тела будут притягиваться, если же и e, и e' отрицательны, то тела опять будут отталкиваться.

Мы можем считать, что первое тело A заряжено m единицами положительного и n единицами отрицательного электричества, которые можно считать отдельно помещенными на тело, как в Опыте V.

Пусть второе тело B заряжено m' единицами положительного электричества и n' единицами отрицательного.

Тогда каждая из m положительных единиц в теле A будет отталкивать каждую из m' положительных единиц в теле B с определенной силой, скажем, f, что дает полную силу $mm'f$.

Так как действие отрицательного электричества в точности равно и противоположно действию положительного, то каждая из m положительных единиц электричества в теле A будет притягивать каждую из n' отрицательных единиц в теле B с той же силой f, что дает полную силу $mn'f$.

Точно так же n отрицательных единиц в теле A притягивают m' положительных единиц тела B с силой $nm'f$ и отталкивают n' отрицательных единиц тела B с силой $nn'f$.

Таким образом, полное отталкивание равно $(mm'+nn')f$, а полное притяжение $(mn'+m'n)f$.

Результирующее отталкивание равно

$$(mm'+nn'-mn'-nm')f, \quad \text{или} \quad (m-n)(m'-n')f.$$

Но $m-n=e$ — алгебраическое значение заряда в теле A, а $m'-n'=e'$ — алгебраическое значение заряда в теле B, так что результирующее отталкивание можно записать в виде $ee'f$, где величины e и e' всегда подразумеваются взятыми с соответствующими знаками.

Изменение Силы с Расстоянием

40. Установив закон действия силы при фиксированном расстоянии, мы можем теперь измерить силу между телами с неизменным зарядом на разных расстояниях. Прямые измерения показали, что эта сила, как при отталкивании, так и при притяжении, меняется обратно пропорционально квадрату расстояния, так что если f — отталкивание двух единичных зарядов на единичном расстоянии, то отталкивание на расстоянии r равно fr^{-2}, а общее выражение для отталкивания зарядов в e и e' единиц на расстоянии r имеет вид $fee'r^{-2}$.

Определение Электростатической Единицы Электричества

41. До сих пор мы использовали в качестве единицы электричества совершенно произвольный эталон, а именно величину электризации некоторого определенного куска стекла, наэлектризованного в начале наших опытов. Теперь мы в состоянии выбрать единицу, руководствуясь определенным принципом; для того чтобы эта единица могла быть включена в общую систему единиц, мы определим ее так, чтобы f было равно единице. Иными словами — *электростатическая единица электричества — это такое количество положительного электричества, которое, находясь на единичном расстоянии от равного ему количества электричества, отталкивается от него с единичной силой.*

Эта единица называется Электростатической, в отличие от Электромагнитной единицы, которая будет введена позже.

Мы можем теперь записать общий закон электрического взаимодействия в простой форме:

$$F=ee'r^{-2},$$

или: *отталкивание между двумя малыми телами, заряженными соответственно e и e' единицами электричества, численно равно произведению зарядов, деленному на квадрат расстояния.*

Размерность Электростатической Единицы Электричества

42. Пусть $[Q]$ — определенная электростатическая единица электричества, e, e' — численные значения некоторых количеств электричества, $[L]$ — единица длины, а r — численное значение расстояния, $[F]$ — единица силы, а F — численное значение силы. Тогда наше уравнение принимает вид

$$F[F]=ee'r^{-2}[Q^2][L^{-2}],$$

откуда

$$[Q]=[LF^{1/2}]=[L^{3/2}T^{-1}M^{1/2}].$$

Эта единица называется Электростатической Единицей электричества. Для практических целей и в других разделах теории электричества могут применяться другие единицы, но в уравнениях электростатики количества электричества считаются всегда выраженными в электростатических единицах, подобно тому как в физической астрономии мы пользуемся единицей массы, основанной на явлении гравитации и отличающейся от обычной единицы массы.

Доказательство Закона Действия Электрической Силы

43. Можно считать, что опыты Кулона с крутильными весами установили закон действия электрической силы с определенной степенью точности. Однако опыты такого рода становятся трудными и до известной степени неточными из-за различных возмущающих причин, которые должны быть тщательно прослежены и учтены.

Прежде всего оба наэлектризованных тела должны иметь заметные размеры по сравнению с расстоянием между ними, чтобы быть в состоянии нести заряды, достаточные для создания измеримой силы. При этом под действием каждого тела происходит перераспределение электричества на другом теле, так что заряд уже нельзя считать равномерно распределенным по поверхности или сосредоточенным в центре тяжести. Учет этого эффекта требует сложных исследований. Эти исследования были все же весьма искусно проведены Пуассоном для двух сфер. Сэр У. Томсон в своей *Теории Электрических Изображений* сильно упростил это рассмотрение (см. п. 172—175).

Другая трудность вызывается действием электричества, индуцированного на стенках клетки, в которой находится прибор. Если внутреннюю поверхность прибора сделать металлической, то этот эффект станет определенным и измеримым.

Еще одна трудность возникает из-за несовершенства изоляции тел, в результате чего заряд постепенно уменьшается. Кулон исследовал закон этой диссипации и ввел поправку на него в своих опытах.

Методы изолирования заряженных проводников и измерения электрических эффектов значительно улучшены со времен Кулона, особенно сэром У. Томсоном. Однако высокая степень точности закона Кулона установлена не прямыми опытами и измерениями (которые можно использовать лишь для иллюстрации этого закона), а математическим анализом явления, описанного в Опыте VII, а именно того факта, что наэлектризованный проводник B, приведенный в соприкосновение с внутренней поверхностью полого замкнутого проводника C и удаленный затем из него без соприкосновения с C, оказывается совершенно разряженным, независимо от того, каким способом была наэлектризована внешняя поверхность проводника C. С помощью чувствительных электроскопов легко показать, что на B после этого не остается никакого заряда, а согласно математической теории, изложенной в п. 74 е, 74 г это возможно лишь в случае, если сила меняется обратно пропорционально квадрату расстояния; при другом виде закона тело B было бы наэлектризовано.

Электрическое Поле

44. Электрическое Поле — это часть пространства в окрестности наэлектризованных тел, рассматриваемая с точки зрения электрических явлений. Она может быть занята воздухом или другими телами или это может быть так называемый

вакуум, из которого мы удалили всякое вещество, поддающееся воздействию имеющимися в нашем распоряжении средствами.

Если наэлектризованное тело поместить в какой-либо части электрического поля, то оно, вообще говоря, вызовет заметное возмущение в электризации других тел.

Но если это тело очень маленькое и заряд его очень мал, то возмущение электризации других тел незначительно, а положение тела можно считать определяемым его центром масс. При этом сила, действующая на тело, будет пропорциональна его заряду и меняет свой знак при изменении знака заряда.

Пусть e — заряд тела, а F — сила, действующая на тело в определенном направлении. Тогда при очень малых e сила F пропорциональна e, т. е. $F=Re$, где R зависит от распределения электричества на других телах в поле. Если бы заряд e можно было сделать равным единице, не возмущая электризации других тел, то мы имели бы $F=R$.

Назовем R Результатирующей Электродвижущей Напряженностью в данной точке поля. Когда мы захотим выразить векторный характер этой силы, мы будем обозначать ее готической буквой $\mathfrak{E}$.

Полная Электродвижущая Сила и Потенциал

45. Если малое тело, несущее малый заряд e, переместить из одной данной точки A в другую точку B по некоторому пути, то это тело будет испытывать в каждой точке пути действие силы Re, где R меняется от точки к точке вдоль пути. Пусть полная работа, совершаемая над телом электрической силой, равна Ee, тогда величина E называется Полной Электродвижущей Силой вдоль пути AB. Если путь представляет собой замкнутый контур и если при этом полная электродвижущая сила вдоль контура не равна нулю, то электричество не может находиться в равновесии и должен течь ток. Таким образом, в электростатике полная электродвижущая сила вдоль любого замкнутого контура должна равняться нулю, так что если A и B — две точки на контуре, то полная электродвижущая сила от A до B одна и та же вдоль обоих участков, на которые разбивается контур, а так как каждый из них можно менять независимо от другого, то полная электродвижущая сила от A до B одна и та же вдоль любого пути от A к B.

Если точка B принимается за начало отсчета для всех других точек, то полная электродвижущая сила от A до B называется Потенциалом точки A. Потенциал зависит только от положения точки A. При математических исследованиях точку B обычно помещают на бесконечно большом расстоянии от наэлектризованных тел. Положительно заряженное тело стремится двигаться из области большего положительного потенциала в область с меньшим положительным или же отрицательным потенциалом; тело, заряженное отрицательно, стремится двигаться в обратном направлении.

В проводнике электризация может свободно перемещаться относительно проводника. Поэтому если две части проводника имеют различные потенциалы, то положительное электричество перемещается из области большего потенциала в область меньшего потенциала до тех пор, пока эта разность потенциалов существует. Таким образом, проводник не может находиться в электрическом равновесии, если все точки проводника не имеют одинакового потенциала. Этот потенциал и называется Потенциалом Проводника.

Эквипотенциальные Поверхности

46. Если реальная или воображаемая поверхность в электрическом поле такова, что электрический потенциал во всех ее точках один и тот же, то эта поверхность называется Эквипотенциальной Поверхностью.

Заряженная частица, вынужденная оставаться на этой поверхности, не проявляет стремления переместиться из одной точки поверхности в другую, поскольку потенциал во всех точках один и тот же. Таким образом, эквипотенциальная поверхность является поверхностью равновесия или поверхностью уровня.

Результирующая сила, действующая в каждой точке поверхности, направлена вдоль нормали к поверхности, а величина силы такова, что работа, совершаемая над единицей электричества при ее перемещении с поверхности V на поверхность V', равна $V—V'$.

Никакие две эквипотенциальные поверхности, имеющие различные потенциалы, не могут пересечься, так как одна и та же точка не может обладать несколькими значениями потенциала, но эквипотенциальная поверхность может пересекаться сама с собой. Это имеет место во всех точках и вдоль всех линий равновесия. При электрическом равновесии поверхность проводника обязательно является эквипотенциальной поверхностью. Если проводник заряжен положительно по всей своей поверхности, то потенциал будет уменьшаться при удалении от поверхности в любом направлении и проводник будет окружен последовательностью поверхностей меньшего потенциала.

Если же (под действием внешних наэлектризованных тел) одни участки поверхности проводника заряжены положительно, а другие отрицательно, то полная эквипотенциальная поверхность будет состоять из поверхности самого проводника и совокупности других поверхностей, смыкающихся с поверхностью проводника вдоль линий, разделяющих области с положительным и отрицательным зарядом. Эти линии будут линиями равновесия: за заряженную частицу, помещенную на одной из таких линий, ни в каком направлении не будет действовать никакая сила.

Если часть поверхности проводника заряжена положительно, а часть отрицательно, то кроме этого проводника в поле обязательно должно присутствовать еще одно заряженное тело. Ибо если допустить, что положительно заряженная частица движется все время в направлении результирующей силы, начиная с положительно заряженной части поверхности, то потенциал у частицы будет непрерывно уменьшаться до тех пор, пока частица либо попадет на отрицательно заряженную поверхность, находящуюся при потенциале, меньшем потенциала проводника, либо уйдет в бесконечность. Поскольку потенциал на бесконечности равен нулю, то последний случай может иметь место лишь при положительном потенциале проводника.

Точно так же отрицательно заряженная частица, начинающая движение с отрицательно заряженной части поверхности, должна либо попасть на положительно заряженную поверхность, либо уйти в бесконечность, причем последнее возможно лишь при отрицательном потенциале проводника.

Таким образом, если на проводнике имеются как положительные, так и отрицательные заряды, то в поле должно быть еще какое-то тело с потенциалом того же знака, что и потенциал этого проводника, но большей абсолютной величины.

Если же проводник произвольной формы находится один в поле, то заряд любого его участка будет того же знака, что и потенциал проводника.

Внутренняя поверхность полого проводящего сосуда, не содержащего заряженных тел, совершенно лишена зарядов. Действительно, если бы какой-то участок поверхности был заряжен положительно, то положительно наэлектризованная частица, движущаяся от этого участка в направлении действующей на нее силы, должна была бы достигнуть отрицательно заряженной поверхности, находящейся под меньшим потенциалом. Но вся внутренняя поверхность проводника имеет один и тот же потенциал. Таким образом, на ней не может быть никакого заряда.

Проводник, помещенный внутрь сосуда и соединенный с ним, может рассматриваться как ограниченный внутренней поверхностью. Поэтому на таком проводнике заряда нет.

Силовые Линии

47. Линия, описываемая точкой, движущейся все время в направлении результирующей напряженности, называется Силовой Линией. Она пересекает эквипотенциальные поверхности под прямым углом. Свойства силовых линий будут в дальнейшем рассмотрены более подробно, так как Фарадей выразил многие законы электрического взаимодействия через введенное им понятие силовых линий, проходящих в электрическом поле и указывающих как направление, так и напряженность в каждой точке.

Электрическое Натяжение

48. Поскольку поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью, результирующая напряженность перпендикулярна этой поверхности. В п. 80 будет показано, что она пропорциональна поверхностной плотности электризации. Таким образом, на электричество, находящееся на небольшом участке поверхности проводника, действует сила, направленная *от* проводника и пропорциональная произведению результирующей напряженности на плотность, т. е. пропорциональная квадрату результирующей напряженности.

Эту силу, действующую подобно натяжению наружу на каждый участок поверхности проводника, мы назовем электрическим Натяжением. Подобно обычному механическому натяжению, оно измеряется силой, действующей на единицу площади.

Слово Натяжение (Tension) употребляется в электричестве в нескольких довольно неопределенных значениях, и в математическом языке его пытаются использовать как синоним Потенциала. Однако, рассмотрев различные применения этого слова, я полагаю, что наиболее соответствует его применению и механической аналогии понимание натяжения как тянущей силы во столько-то фунтов веса на квадратный дюйм поверхности проводника или какой-либо иной поверхности. Мы увидим, что представление Фарадея о том, что это электрическое натяжение существует не только на заряженной поверхности, но и вдоль всей длины силовых линий, приводит к теории электрического взаимодействия как явления напряжения (stress) в среде.

Электродвижущая Сила

49. При соединении тонкой проводящей проволокой двух проводников с различными потенциалами стремление электричества течь по проводу измеряется разностью потенциалов обоих тел. Поэтому разность потенциалов между двумя проводниками или между двумя точками называется Электродвижущей Силой между ними.

Не во всех случаях электродвижущая сила может быть выражена в виде разности потенциалов. Однако такие случаи не рассматриваются в Электростатике. Мы встретимся с ними, когда перейдем к кусочно-однородным (heterogeneous) контурам, химическим действиям, движениям магнитов, неодинаковым температурам и т. п.

Емкость Проводника

50. Пусть один проводник изолирован, а все окружающие его проводники находятся под нулевым потенциалом, будучи соединенными с землей, и пусть этот проводник, заряженный количеством электричества E, имеет потенциал V. Тогда отношение E к V называется Емкостью проводника. Если проводник полностью заключен внутри проводящего сосуда, не прикасаясь к нему, то заряд на внутреннем проводнике будет равен и противоположен по знаку заряду на внутренней поверхности внешнего проводника и будет равен емкости внутреннего проводника, умноженной на разность потенциалов между обоими проводниками.

Электрические Накопители

Система, состоящая из двух проводников, прилегающие поверхности которых отделены друг от друга тонким слоем изолирующей среды, называется электрическим Накопителем (Accumulator). Эти два проводника называют Электродами, а изолирующая среда называется Диэлектриком. Емкость накопителя прямо пропорциональна площади прилегающих поверхностей и обратно пропорциональна толщине слоя между ними. Лейденская банка является накопителем, в котором изолирующей средой является стекло. Накопители иногда называют конденсаторами, но я предпочитаю ограничить применение термина «конденсатор» лишь к приборам, служащим не для хранения электричества, а для увеличения его поверхностной плотности.

СВОЙСТВА ТЕЛ В ИХ ОТНОШЕНИИ К СТАТИЧЕСКОМУ ЭЛЕКТРИЧЕСТВУ

Сопротивление прохождению электричества через тело

51. Если электрический заряд передается некоторой части металлического тела, то электричество быстро перемещается из областей высокого потенциала в области низкого до тех пор, пока потенциал всего тела не становится одинаковым. Для образцов металла, применяемых в обычных экспериментах, этот процесс совершается за столь малое время, что его нельзя измерить, однако в случае очень длинных и тонких проводов, таких, например, как в телеграфии, потенциал уравнивается лишь по истечении некоторого вполне ощутимого промежутка времени вследствие сопротивления провода прохождению электричества по нему.

Различные вещества очень сильно различаются по сопротивлению прохождению электричества, как можно видеть из таблиц в п. 362, 364 и 367, которые будут пояснены при рассмотрении Электрических Токов.

Все металлы являются хорошими проводниками, хотя сопротивление свинца в 12 раз больше сопротивления меди или серебра, сопротивление железа в 6 раз больше, а сопротивление ртути в 60 раз больше сопротивления меди. Сопротивление всех металлов увеличивается с повышением температуры.

Многие жидкости проводят электричество посредством электролиза. Проводимость такого рода будет рассмотрена в части II. Здесь же мы можем рассматривать все жидкости, содержащие воду, и все влажные вещества как проводники, значительно уступающие металлам, но неспособные изолировать электрический заряд в течение времени, достаточного для наблюдения. Сопротивление электролитов уменьшается с ростом температуры.

С другой стороны, газы при атмосферном давлении, как сухие, так и влажные, являются столь совершенными изоляторами при малых электрических натяжениях, что мы до сих пор не имеем свидетельств прохождения через них электричества за счет обычной проводимости. Постепенная потеря заряда наэлектризованным телом всегда в конце концов сводится к несовершенной изоляции опоры: электричество утекает либо через вещество его опоры, либо вдоль ее поверхности.

Поэтому если рядом подвешены два заряженных тела, то их заряд будет сохраняться дольше, если они заряжены разноименно, нежели в случае одноименного заряда. Ибо хотя электродвижущая сила, стремящаяся вызвать движение электричества через газ, разделяющий проводники, значительно больше в случае противоположного заряда тел, никакой заметной потери заряда через газ не наблюдается. Фактические потери происходят через опоры, а электродвижущая сила через опоры больше при одноименных зарядах тел.

Этот результат кажется странным лишь до тех пор, пока мы ожидаем утечки заряда за счет прохождения электричества через воздух между телами. Прохождение электричества через газы имеет место при пробое и не наступает, прежде чем электродвижущая напряженность достигнет определенного значения.

Предельное значение электродвижущей напряженности в диэлектрике, не вызывающей в нем разряда, называется Электрической Прочностью диэлектрика. Электрическая прочность воздуха уменьшается по мере понижения давления от атмосферного до примерно трех миллиметров ртутного столба. При дальнейшем уменьшении давления электрическая прочность быстро увеличивается, а при максимально достижимом в настоящий момент разряжении электродвижущая напряженность, необходимая для получения искры в четверть дюйма длиной, больше напряженности, вызывающей восьмидюймовую искру при обычном давлении.

Таким образом, вакуум, т. е. то, что остается в сосуде после того, как из него удалено все, что можно удалить, является изолятором с очень большой электрической прочностью.

Электрическая прочность водорода значительно меньше, чем прочность воздуха при том же давлении.

Некоторые сорта стекла в холодном состоянии являются изумительно хорошими изоляторами. Сэр У. Томсон сохранял электрические заряды в герметически запаянных колбах в течение нескольких лет. Однако то же стекло становится проводником при температуре, не превосходящей температуры кипения воды.

Гуттаперча, каучук, эбонит, парафин и смолы являются хорошими изоляторами; так сопротивление гуттаперчи при 75° F в 6×10^{19} раз больше сопротивления меди.

Лед, кристаллы и затвердевшие электролиты также являются изоляторами.

Некоторые жидкости, как, например, керосин, скипидар и некоторые масла, также являются изоляторами, но значительно уступающими хорошим твердым изоляторам.

ДИЭЛЕКТРИКИ

Удельная индуктивная способность

52. Все вещества, изолирующая способность которых такова, что при их помещении между двумя проводниками, находящимися под различным потенциалом, действующая на них электродвижущая сила не производит немедленного перераспределения электричества до установления постоянного значения потенциала, названы Фарадеем Диэлектриками.

Из пока не опубликованных работ Кавендиша видно, что он еще до 1773 г. измерил емкость пластин из стекла, смолы, пчелиного воска и шеллака и установил, во сколько раз их емкость больше емкости воздушной пластины тех же размеров.

Фарадей, которому эти исследования не были известны, установил, что емкость накопителя зависит от природы изолирующей среды между проводниками, а также от размеров самих проводников и их взаимного расположения. Заменяя воздух в накопителе на другие изолирующие среды в качестве диэлектрика и оставляя его во всем остальном неизменным, Фарадей установил, что при замене воздуха другими газами емкость заметно не меняется, но при замене воздуха на шеллак, серу, стекло и т. п. емкость воздуха возрастает в отношении, различном для разных веществ.

Благодаря применению более тонких методов измерения Больцману удалось заметить зависимость индуктивной способности газов от давления.

Эта характеристика диэлектриков, названная Фарадеем Удельной Индуктивной Способностью, называется также Диэлектрической Постоянной вещества. Она определяется как отношение емкости накопителя, в котором диэлектриком служит данное вещество, к емкости этого же накопителя с вакуумным диэлектриком.

Если диэлектрик является плохим изолятором, то измерить его диэлектрическую постоянную довольно трудно, так как заряд в накопителе не будет держаться достаточно долго, чтобы можно было произвести измерения. Однако ясно, что индуктивная способность существует не только для хороших изоляторов; возможно, она существует вообще для всех тел.

Поглощение электричества

53. Было обнаружено, что при использовании некоторых диэлектриков в накопителе имеют место следующие явления. Если накопитель был заряжен в течение некоторого времени, затем внезапно разряжен и вновь изолирован, то он становится опять заряженным электричеством того же знака, что и раньше, но в

меньшей степени, так что он может быть вновь разряжен несколько раз подряд все более слабыми разрядами. Это явление называется Остаточным Разрядом.

Мгновенный разряд оказывается всегда пропорциональным разности потенциалов в момент разряда, и отношение этих величин является истинной емкостью накопителя. Но если контакт с разряжающим элементом длительный, так что включает несколько остаточных разрядов, то кажущаяся емкость накопителя, рассчитанная при таком разряде, получится слишком большой.

Если такой накопитель зарядить и оставить изолированным, то кажется, что он теряет свой заряд за счет проводимости. Однако, как было показано, вначале относительная потеря заряда происходит значительно быстрее, чем позже, так что величина проводимости, если ее определить по начальному периоду, будет слишком большой. Так, при испытании изоляции подводного кабеля создается впечатление, что его изоляция улучшается по мере его электризации.

Аналогичные на первый взгляд явления имеют место при передаче тепла в случае, когда противоположные стороны тела поддерживаются при разных температурах. В случае теплоты мы знаем, что это объясняется теплотой, передаваемой самому телу или отдаваемой им. Поэтому и в случае электрических явлений было выдвинуто предположение, что электричество поглощается или испускается частями тела. Однако мы увидим в п. 329, что эти явления можно объяснить, не прибегая к гипотезе о поглощении электричества, приняв, что диэлектрик в некоторой степени неоднороден.

То, что эти явления, называемые Поглощением электричества, не есть истинное поглощение электричества веществом, можно показать, зарядив каким-либо образом электричеством тело, окруженное металлическим изолированным сосудом. Если после зарядки и изоляции этого тела мгновенно разрядить сосуд и оставить изолированным, то никакой заряд не будет впоследствии передан сосуду за счет постепенного растекания электричества с заряженного тела, находящегося внутри него.

54. Этот факт выражается утверждением Фарадея о том, что нельзя зарядить вещество абсолютным и независимым зарядом электричества одного рода [4].

Действительно, из всех проведенных экспериментов следует, что, каково бы ни было электрическое взаимодействие в системе тел, окруженных металлическим сосудом, заряд на внешней поверхности сосуда остается неизменным.

Между тем если бы какая-то часть электричества могла быть введена в тело и поглощена им, или переведена в скрытое состояние, или каким-либо образом могла существовать в нем, не будучи связанной с равной частью противоположного электричества линиями индукции, или же если бы это поглощенное электричество могло постепенно освобождаться и возвращаться в свое обычное состояние, то мы наблюдали бы некоторое изменение электризации окружающего сосуда.

Поскольку это никогда не наблюдается, Фарадей делает вывод, что нельзя сообщить абсолютный заряд веществу и что никакая часть материи не может за счет какого-либо изменения своего состояния испустить или поглотить тот или иной вид электричества. Поэтому он рассматривает индукцию как имеющую «существенную функцию при первом развитии и при последующих явлениях электричества». Его «индукция» (п. 1298) представляет собой поляризованное состояние

[4] *Exp. Res.*, vol. I, Series XI, II. «On the Absolute Charge of Matter» and § 1244.

частиц диэлектрика; каждая частица положительна с одного конца и отрицательна с другого, причем положительная и отрицательная электризация в каждой частице всегда в точности равны.

Пробой [5]

55. Если электродвижущую напряженность в какой-либо точке диэлектрика постепенно увеличивать, то в конце концов достигается предел, при котором происходит внезапный разряд через диэлектрик, обычно сопровождаемый светом и шумом и временным или постоянным разрушением диэлектрика.

Электродвижущая напряженность, при которой это имеет место, является мерой того, что мы можем назвать электрической прочностью диэлектрика. Она зависит от природы диэлектрика, для плотного воздуха она больше, чем для разреженного, для стекла больше, чем для воздуха, но во всех случаях при достаточно большой электродвижущей силе диэлектрик не выдерживает, его изолирующая способность рушится и по диэлектрику протекает электрический ток. Именно по этой причине не могут существовать распределения электричества, при которых где-либо напряженность поля становится бесконечной.

Электрическое свечение

Так, для заряженного проводника с острием теория, основанная на гипотезе сохранения заряда, приводит к выводу, что по мере приближения к острию поверхностная плотность электричества неограниченно возрастает, так что в самой точке острия поверхностная плотность, а значит, и электродвижущая напряженность будут бесконечны. Если бы у воздуха или другого окружающего диэлектрика была неограниченная изолирующая способность, это действительно имело бы место. Фактически же, как только результирующая напряженность в окрестности острия достигает определенного предела, изолирующая способность воздуха исчезает и воздух вблизи острия становится проводником. На некотором расстоянии от острия результирующая напряженность недостаточна для нарушения изоляции воздуха, так что электрический ток обрывается и в воздухе вокруг острия накапливается электрический заряд.

Таким образом, острие окружено частицами воздуха, заряженными электричеством того же рода, что и на острие. Этот заряженный воздух, окружающий острие, приводит к освобождению воздуха у самого острия от части той огромной электродвижущей напряжености, которая была бы при электризации одного лишь проводника. Фактически поверхность наэлектризованного тела теперь уже не имеет острия, так как острие окружено областью заряженного воздуха; теперь уже не граница твердого проводника, а плавная граница этой области может рассматриваться как внешняя наэлектризованная поверхность.

Если бы эта область заряженного воздуха оставалась неподвижной, то наэлектризованное тело сохраняло бы свой заряд, если не на самом себе, то, по крайней мере, в своей окрестности. Однако заряженные частицы воздуха, которым ничто не мешает перемещаться под действием электрической силы, стремятся удалиться от заряженного тела, поскольку оно заряжено электричеством того же рода. Поэтому заряженные частицы стремятся удалиться по направлению сило-

[5] Faraday, *Exp. Res.*, vol. I, Series XII and XIII.

вых линий и приблизиться к тем окружающим телам, которые имеют противоположную электризацию. На место ушедших частиц в область вблизи острия приходят другие, незаряженные частицы. Они уже не защищают частиц у самого острия от чрезмерного электрического натяжения, так что имеет место новый разряд, после чего вновь образовавшиеся заряженные частицы уходят от острия, и так до тех пор, пока тело остается заряженным.

Таким образом, получается следующее явление: на острие и вблизи него наблюдается постоянное свечение, вызываемое постоянным разрядом между острием и окружающем его воздухом.

Заряженные частицы воздуха стремятся удаляться в одном и том же направлении, вызывая тем самым течение воздуха от острия, состоящее из заряженных частиц, возможно, увлекающих собою незаряженные. Искусственно способствуя этому течению, мы можем увеличить свечение, а воспрепятствовав образованию течения, можем прервать свечение [6].

Электрический ветер вблизи острия бывает иногда весьма сильным, однако скорость его быстро падает, и воздух вместе с заряженными частицами переносится дальше общим движением атмосферы, образуя невидимое электрическое облако. Когда заряженные частицы приближаются к какой-либо проводящей поверхности, например к стенке, они наводят на этой поверхности заряд противоположного знака и притягиваются к стенке, но поскольку электродвижущая сила очень мала, они могут длительное время оставаться вблизи стенки, не притягиваясь к ней и не разряжаясь.

Таким образом, они образуют электрическую атмосферу вокруг проводника, наличие которой иногда обнаруживается электрометрами. Однако силы взаимодействия больших масс заряженного воздуха друг с другом и с другими телами чрезвычайно малы по сравнению с обычными силами, вызывающими ветер, зависящими от неодинаковости плотности, обусловленной разностью температур. Поэтому совершенно невероятно, чтобы электрическое взаимодействие вносило заметный вклад в движение обычных грозовых облаков.

Перемещение электричества из одного места в другое за счет движения заряженных частиц называется Электрической Конвекцией или Конвективным Разрядом.

Таким образом, электрическое свечение вызывается постоянным прохождением электричества по воздуху в небольшой области, где натяжение столь велико, что окружающие частицы воздуха заряжаются и непрерывно увлекаются электрическим ветром, являющимся существенной стороной явления.

Свечение легче образуется в разреженном воздухе, чем в плотном, и легче при положительном заряде острия, чем при отрицательном. Это одно из многих отличий положительного электричества от отрицательного, изучение которых необходимо для выявления природы электричества. Однако ни одна из существующих теорий это отличие не учитывает.

---

[6] См. Priestley, «*History of Electricity*», p. 117 and 591 и Cavendish, «Electrical Researches», *Phil. Trans.*, 1771, § 4 или Art. 125 в «*Electrical Researches of the Honourabte Henry Cavendish*».

Электрическая Щетка

56. Электрическая Щетка — это явление, получающееся при электризации затупленного острия или небольшого шарика, когда возникает электрическое поле, натяжение которого уменьшается с расстоянием, но не так быстро, как вблизи острия. Явление состоит в последовательности разрядов, разветвляющихся по мере удаления от шарика и заканчивающихся либо в заряженных областях воздуха, либо на других проводниках. Оно сопровождается звуком, тон которого зависит от интервала между последовательными разрядами. В отличие от случая свечения, никакого потока воздуха не наблюдается.

Электрическая искра

57. Если натяжение в пространстве между двумя проводниками значительно на всем пути между ними, как, например, в случае двух шаров, расстояние между которыми не велико по сравнению с их радиусами, то разряд, если он реализуется, обычно принимает форму искры, при которой почти весь заряд переносится одновременно.

В этом случае, если какая-либо часть диэлектрика не выдержала, то участки, прилегающие к ней по обе стороны в направлении электрической силы, оказываются в состоянии большего натяжения и также не выдерживают, и, таким образом, разряд происходит прямо по диэлектрику, подобно тому как лист бумаги, надорванный с краю, начинает рваться под действием натяжения сначала в месте надрыва, а затем случайным образом по тем местам, где бумага слабее. Точно так же электрическая искра начинается в том месте, где электрическое натяжение впервые преодолеет изоляцию диэлектрика, а затем расходится от этого места на вид весьма нерегулярным образом, проходя по другим слабым местам, например по частицам пыли, взвешенной в воздухе.

Все эти явления существенно различны в разных газах и даже в одном газе при разных давлениях. Некоторые виды электрического разряда в разреженных газах особенно замечательны. В некоторых случаях наблюдается регулярное чередование светящихся и темных слоев, так что, например, при прохождении электричества вдоль трубки, заполненной сильно разреженным газом, видно несколько светящихся дисков, перпендикулярных оси трубки, расположенных через почти одинаковые интервалы вдоль оси и разделенных темными слоями. С увеличением силы тока появляются дополнительные диски и все диски располагаются теснее. В трубке, описанной г-ном Гассио (Gassiot) [7], свечение дисков носит голубоватый оттенок на отрицательной стороне, красноватый — на положительной и ярко-красный — в центре.

Эти и многие другие явления электрического разряда чрезвычайно важны. Их лучшее понимание, возможно, прольет свет как на природу электричества, так и на природу газов и среды, заполняющей пространство. В настоящий момент, однако, они находятся за пределами математической теории электричества.

Электрические явления в турмалине

58. Некоторые кристаллы турмалина и других минералов обладают свойством, которое можно назвать Электрической Полярностью. Пусть кристалл турмали-

[7] *Intellectual Observer*, March, 1866.

на находится при постоянной температуре и не обладает никакой видимой электризацией на поверхности. Повысим теперь температуру кристалла, не нарушая его изоляции. При этом один край кристалла зарядится положительно, а другой — отрицательно. Снимем с поверхности эту видимую электризацию, например, с помощью пламени или иным способом. Если после этого нагреть кристалл еще больше, то на нем появится электризация того же знака, что и раньше, а если его охладить, то край, бывший при нагреве положительным, станет отрицательным.

Такая электризация наблюдается на концах кристаллографической оси. Некоторые кристаллы заканчиваются шестигранной пирамидой с одного конца и трехгранной — с другого. В таких кристаллах край с шестигранной пирамидой заряжается положительно, а с трехгранной — отрицательно.

Сэр У. Томсон предполагает, что каждый участок такого гемиэдрального кристалла и подобных ему имеет определенную электрическую полярность, величина которой зависит от температуры. Находясь в пламени, каждый участок поверхности электризуется ровно настолько, чтобы точно нейтрализовать во всех внешних точках влияние внутренней полярности. Кристал не будет при этом оказывать никакого внешнего электрического воздействия и не будет стремиться изменить свое состояние электризации. Но при нагреве или охлаждении внутренняя поляризация каждой частицы кристалла меняется и уже не может быть уравновешена поверхностной электризацией, так что возникает результирующее внешнее воздействие.

План трактата

59. В нижеследующем трактате я предполагаю сначала изложить обычную теорию электрического действия, которая считает, что оно зависит лишь от наэлектризованных тел и их взаимного расположения, и не учитывает каких-либо явлений в разделяющей их среде. Таким образом, мы установим закон обратных квадратов, теорию потенциала и уравнения Лапласа и Пуассона. Затем мы перейдем к зарядам и потенциалам системы заряженных проводников, связанным системой уравнений, коэффициенты которой можно считать определяемыми экспериментально в тех случаях, когда существующие математические методы неприменимы. Из этих уравнений мы найдем механические силы, действующие между различными заряженными телами.

Затем мы исследуем некоторые общие теоремы, которыми Грин, Гаусс и Томсон указали условия разрешимости задач о распределении электричества. Одно из утверждений этих теорем гласит, что если какая-либо функция удовлетворяет уравнению Пуассона и если на поверхности каждого проводника она принимает значение, совпадающее со значением потенциала этого проводника, то эта функция дает значение истинного потенциала системы в любой точке. Мы выведем также метод нахождения задач, допускающих точное решение.

В теореме Томсона полная энергия системы выражается в виде интеграла от определенной величины по всему пространству между заряженными телами, а также в виде интеграла по одним лишь заряженным поверхностям. Тождественности этих двух выражений можно дать физическую интерпретацию. Физическую взаимосвязь между заряженными телами можно понимать либо как результат состояния разделяющей их среды, либо как результат прямого взаимодействия заряженных тел на расстоянии. Если мы принимаем вторую точку зрения, мы мо-

жем установить закон взаимодействия, но не можем уже рассуждать о причине этого закона. Если же, наоборот, принять представление о действии через среду, то возникает вопрос о природе этого воздействия в каждой точке среды.

Из этой теоремы следует, что если говорить о распределении электрической энергии в различных частях диэлектрической среды, то количество энергии в каждом малом объеме среды должно зависеть от квадрата результирующей электродвижущей напряженности в этом месте, умноженного на коэффициент, названный ранее удельной индуктивной способностью среды.

Однако при рассмотрении теории диэлектриков с более общей точки зрения целесообразнее различать электродвижущую напряженность в каждой точке и электрическую поляризацию среды в этой точке, так как, хотя эти направленные величины и связаны друг с другом, в некоторых твердых веществах они направлены неодинаково. Самое общее выражение для электрической энергии среды в единице объема — половина произведения электродвижущей напряженности на электрическую поляризацию и на косинус угла между их направлениями. Во всех жидких диэлектриках электродвижущая напряженность и электрическая поляризация направлены одинаково и их отношение постоянно.

Если мы посчитаем по этой гипотезе полную энергию, сосредоточенную в среде, мы найдем, что она равна энергии зарядов на проводниках по гипотезе прямого взаимодействия на расстоянии. Таким образом, обе гипотезы математически эквивалентны.

Если мы теперь перейдем к исследованию механического состояния среды исходя из гипотезы, что наблюдаемое механическое взаимодействие наэлектризованных тел осуществляется через и посредством среды, подобно тому как в обычном случае воздействие одного тела на другое — через натяжение веревки или давление стержня, то мы придем к выводу, что среда должна находиться в состоянии механического напряжения.

Как показал Фарадей [8], это напряжение заключается в натяжении вдоль силовых линий и равном ему давлении по всем направлениям, перпендикулярным силовым линиям. Величина этих напряжений пропорциональна энергии электризации на единицу объема, т. е., иными словами, пропорциональна квадрату результирующей электродвижущей напряженности, умноженной на удельную индуктивную способность среды.

Такое распределение напряжения является единственным, согласующимся с наблюдаемым механическим воздействием на заряженные тела, а также с наблюдаемым равновесием жидкого диэлектрика, окружающего их. Поэтому я счел научно оправданным шагом признание фактического существования этого состояния напряжения и вывод следствий из этого предположения. Встретив выражение *электрическое натяжение* в различных, точно не очерченных значениях, я попытался ограничить его смысл тем значением, которое, как мне представляется, подразумевали некоторые из употреблявших это выражение, а именно состояние напряжения в диэлектрической среде, вызывающее движение заряженных тел и приводящее при постепенном увеличении к пробою.

При таком понимании электрическое натяжение является величиной такого же рода и измеряемой тем же способом, что и натяжение веревки, а о диэлектрической

---

[8] *Exp. Res.*, Series XI, 1297.

среде, могущей испытывать натяжение не более некоторого определенного значения, можно сказать, что она имеет определенную прочность точно в том же смысле, как мы говорим об определенной прочности веревки. Так, например, Томсон установил, что воздух при обычном давлении и температуре может выдержать электрическое натяжение в 9600 гран на квадратный фут, прежде чем образуется искра.

60. Из гипотезы о том, что электрическое воздействие не является прямым взаимодействием тел на расстоянии, а передается через среду между двумя телами, мы пришли к выводу, что эта среда должна находиться в напряженном состоянии. Мы установили также характер этого напряжения и сравнили его с напряжениями, возникающими в твердых телах. Вдоль силовых линий имеет место натяжение, а перпендикулярно им — давление, численно обе эти силы равны и обе пропорциональны квадрату результирующей напряженности в точке. Установив эти результаты, мы готовы к следующему шагу — к образованию представления о природе электрической поляризации в диэлектрической среде.

Элементарный участок тела можно назвать поляризованным, если он приобретает равные, но противоположные свойства с противоположных концов. Представление о внутренней поляризации удобнее всего изучить на примере постоянных магнитов; более подробно мы на нем остановимся, когда перейдем к рассмотрению магнетизма.

Электрическая поляризация элементарного участка диэлектрика — это вынужденное состояние, в которое среда переходит под воздействием электродвижущей силы, исчезающее при устранении этой силы. Мы можем представить его как некоторое электрическое смещение, вызываемое электродвижущей напряженностью. Если электродвижущая сила воздействует на проводящую среду, она вызывает в ней ток, если же среда непроводящая или диэлектрическая, то ток не может длительно по ней течь, но электричество смещается в среде в направлении электродвижущей напряженности, причем величина этого смещения зависит от величины напряженности, так что при увеличении или уменьшении электродвижущей напряженности в том же отношении увеличивается или уменьшается электрическое смещение.

Величина смещения измеряется количеством электричества, пересекающим единицу площади в процессе увеличения смещения от нуля до фактического значения. Таким образом, оно является мерой электрической поляризации.

Аналогия между действием электродвижущей напряженности, вызывающей электрическое смещение, и обычной механической силой, вызывающей смещение упругого тела, настолько очевидна, что я осмелился назвать отношение электродвижущей напряженности к соответствующему электрическому смещению *коэффициентом электрической упругости* среды. Этот коэффициент для разных сред различен и меняется обратно пропорционально диэлектрической постоянной среды.

Изменение электрического смещения, очевидно, представляет собой электрический ток. Однако этот ток может существовать лишь пока меняется смещение, а так как смещение не может превосходить определенного значения, не вызывая пробоя, то ток не может идти неограниченно долго в одном направлении, подобно току в проводниках.

В турмалине и других пироэлектрических кристаллах, по-видимому, может

существовать состояние электрической поляризации, зависящее от температуры, для создания которого не требуется внешняя электродвижущая сила. Если бы внутренность тела была в состоянии постоянной электрической поляризации, то внешняя поверхность тела постепенно зарядилась бы так, чтобы нейтрализовать действие внутренней поляризации во всех точках вне тела. Этот внешний поверхностный заряд нельзя было бы обнаружить ни одним из общепринятых способов и нельзя было бы удалить ни одним из обычных методов удаления поверхностного заряда. Поэтому внутренняя поляризация вещества никак не могла бы быть обнаружена, разве только если бы каким-либо способом, например изменением температуры, можно было увеличить или уменьшить величину внутренней поляризации. При этом внешняя электризация уже не смогла бы нейтрализовать внешний эффект от внутренней поляризации, и мы обнаружили бы кажущуюся электризацию, как в случае турмалина.

Если заряд e равномерно распределен по поверхности сферы, то результирующая напряженность в любой точке среды, окружающей сферу, пропорциональна заряду e, деленному на квадрат расстояния от центра сферы. Эта результирующая напряженность, согласно нашей теории, сопровождается смещением электричества в наружном направлении от сферы.

Если мы теперь проведем концентрическую сферу радиуса r, то полное смещение E через эту поверхность будет пропорционально результирующей напряженности, умноженной на площадь сферической поверхности. Но результирующая напряженность прямо пропорциональна заряду e и обратно пропорциональна квадрату радиуса, а площадь поверхности прямо пропорциональна квадрату радиуса.

Таким образом, полное смещение E пропорционально заряду e и не зависит от радиуса.

Чтобы определить соотношение между зарядом e и количеством электричества E, смещаемым наружу через любую сферическую поверхность, рассмотрим работу, совершаемую над средой в области между двумя концентрическими сферическими поверхностями при увеличении смещения от E до $E+\delta E$. Если V_1 и V_2 — потенциалы соответственно на внутренней и на наружной поверхности, то электродвижущая сила, производящая это дополнительное смещение, равна $V_1—V_2$, так что работа, затраченная на увеличение смещения, равна $(V_1—V_2)\delta E$.

Если теперь считать внутреннюю сферу совпадающей с наэлектризованной поверхностью, а радиус внешней сферы устремить в бесконечность, то V_1 перейдет в потенциал сферы V, а V_2 станет равным нулю, так что вся работа, совершаемая в окружающей среде, равна $V\delta E$.

Но, согласно обычной теории, работа, совершаемая при увеличении заряда, равна $V\delta e$, и если, как мы считаем, эта работа тратится на увеличение смещения, то $\delta E=\delta e$, а так как E и e одновременно обращаются в нуль, то $E=e$, т. е.:

смещение в наружную сторону через любую сферическую поверхность, концентрическую заряженной сфере, равно заряду на этой сфере.

Чтобы уточнить наше представление об электрическом смещении, рассмотрим накопитель, образуемый двумя проводящими пластинами A и B, разделенными слоем диэлектрика C. Пусть W — проводящая проволока, соединяющая A и B, и пусть под действием электродвижущей силы некоторая величина Q положительного электричества перешла по проволоке от B к A. Положительная электри-

зация на A и отрицательная электризация на B вызовут определенную электродвижущую силу, действующую от A к B в диэлектрическом слое, а она вызовет электрическое смещение от A к B в диэлектрике. Величина этого смещения, измеряемая количеством электричества, вынужденным пересечь воображаемое сечение диэлектрика, разделяющее его на два слоя, будет, согласно нашей теории, в точности равно Q. См. п. 75, 76, 111.

Таким образом, получается, что в то самое время, когда количество электричества Q переносится вдоль проволоки электродвижущей силой от B к A, пересекая при этом любое сечение проводника, такое же количество электричества пересекает любое сечение диэлектрика в направлении от A к B благодаря электрическому смещению.

Смещение электричества во время разряда накопителя будет обратным. В проволоке разряд означает перенос Q от A к B, а в диэлектрике смещение будет уменьшаться, так что количество электричества Q пересечет каждое сечение в направлении от B к A.

Поэтому каждый случай зарядки или разряда может рассматриваться как движение по замкнутому контуру, так что любое сечение контура пересекается одинаковым количеством электричества за одно и то же время, причем это имеет место не только в вольтовых цепях, где это всегда признавалось, но и в тех случаях, когда обычно электричество считали накапливающимся в определенных местах.

61. Таким образом, мы пришли к весьма замечательному следствию рассматриваемой теории, а именно что движение электричества подобно движению *несжимаемой* жидкости, так что полное количество его внутри воображаемой фиксированной замкнутой поверхности остается всегда неизменным. На первый взгляд этот результат находится в прямом противоречии с тем фактом, что мы можем зарядить проводник, внести его в замкнутое пространство и тем самым изменить количество электричества в этом пространстве.

Но нужно вспомнить, что обычная теория не учитывает электрического смещения в веществе диэлектрика, рассмотренного нами выше, сосредоточивая внимание лишь на рассмотрении электризации граничных поверхностей проводников и диэлектриков. Примем в случае заряженного проводника, что заряд его положительный. Тогда, если окружающий диэлектрик простирается во все стороны вне замкнутой поверхности, то имеет место электрическая поляризация, сопровождаемая смещением в наружную сторону через всю замкнутую поверхность, и поверхностный интеграл от смещения, взятый по этой поверхности, будет равен заряду проводника внутри нее.

Таким образом, при внесении заряженного проводника в замкнутое пространство немедленно возникает смещение равного этому заряду количества электричества наружу через поверхность, и полное количество электричества внутри поверхности остается неизменным.

Теория электрической поляризации будет более подробно рассмотрена в главе V, а механические иллюстрации ее будут даны в п. 344, но полное понимание ее значения не может быть достигнуто, пока мы не перейдем к рассмотрению электромагнитных явлений.

62. Специфические черты теории таковы.

Энергия электризации сосредоточена в диэлектрической среде независимо от того, является эта среда твердой, жидкой или газообразной, плотной или разре-

женной или даже является так называемым вакуумом, лишь бы она была способна передавать электрическое воздействие.

В каждом участке среды энергия запасена в форме напряженного состояния, называемого электрической поляризацией, величина которой зависит от результирующей электродвижущей напряженности в данном месте.

Электродвижущая сила, действующая на диэлектрик, вызывает так называемое электрическое смещение. Связь между напряженностью и смещением в наиболее общем случае будет исследована ниже при рассмотрении проводимости, но в наиболее важных случаях смещение происходит в направлении напряженности и численно равно напряженности, умноженной на $K/4\pi$, где K — удельная индуктивная способность диэлектрика.

Возникающая при электрической поляризации энергия, приходящаяся на единицу объема диэлектрика, равна половине произведения электродвижущей напряженности на электрическое смещение и (если необходимо) на косинус угла между их направлениями.

В жидких диэлектриках электрическая поляризация сопровождается натяжением в направлении линий индукции и равным ему давлением по всем направлениям, перпендикулярным линиям индукции, причем натяжение или давление на единицу площади численно равно энергии, приходящейся на единицу объема в данном месте.

Поверхность каждого элементарного объема, на которые можно считать разделенным диэлектрик, следует считать заряженной так, что поверхностная плотность в каждой точке поверхности равна по величине смещению в этой точке поверхности, *отсчитываемому внутрь*. Если смещение направлено в положительном направлении, то поверхность элемента объема будет заряжена отрицательно на положительной стороне элемента объема и положительно — на отрицательной. Эти поверхностные заряды вообще уничтожают друг друга при рассмотрении соседних элементов объема, за исключением случаев, когда в диэлектрике есть внутренний заряд, или же в случае заряда на поверхности диэлектрика.

Чем бы ни являлось электричество и что бы мы ни понимали под движением электричества, явление, называемое электрическим смещением, представляет собой движение электричества в том же смысле, в каком и перенос определенного количества электричества по проволоке является движением электричества. Единственное отличие заключается в том, что в диэлектрике имеется сила, называемая нами электрической упругостью, действующая против электрического смещения и заставляющая электричество возвращаться назад при устранении электродвижущей силы, тогда как в проводниках эта электрическая упругость непрерывно преодолевается, так что устанавливается истинный ток проводимости и сопротивление зависит не от полного количества электричества, смещенного со своего положения равновесия, а от количества электричества, пересекающего сечение проводника в заданное время.

Во всех случаях движение электричества подчиняется тому же условию, что и движение несжимаемой жидкости, а именно в каждый момент через любую заданную замкнутую поверхность должно вытекать столько, сколько в нее втекает. Отсюда следует, что любой электрический ток должен образовывать замкнутый контур. Важность этого результата станет видна при исследовании законов электромагнетизма.

Поскольку, как мы видели, теория прямого взаимодействия на расстоянии математически тождественна с теорией взаимодействия через среду, фактические явления могут объясняться как одной теорией, так и другой с привлечением в случае возникновения трудностей той или иной подходящей гипотезы.

Так, Моссотти развил математическую теорию диэлектриков, исходя из обычной теории притяжения, просто дав электрическую интерпретацию вместо магнитной для обозначений в исследовании Пуассона, где тот выводит теорию магнитной индукции из теории магнитных жидкостей. Он предположил существование внутри диэлектрика небольших проводящих элементов, противоположные поверхности которых могут через индукцию приобретать заряд противоположного знака, но которые не могут в целом терять или приобретать заряд, будучи изолированы друг от друга непроводящей средой. Эта теория диэлектриков согласуется с законами электричества и, возможно, действительно правильна. Если она правильна, то удельная индуктивная способность для диэлектрика может быть больше, но не может быть меньше, чем для вакуума.

До сих пор не найдено ни одного случая диэлектрика с индуктивной способностью меньше, чем у вакуума. Если бы такой диэлектрик был обнаружен, от физической теории Моссотти пришлось бы отказаться, хотя все его формулы остались бы справедливы, потребовалось бы лишь изменить знак коэффициента.

Во многих разделах физической науки уравнения одинакового вида оказываются применимыми к описанию явлений заведомо различной природы, как, например, электрическая индукция в диэлектриках, проводимость в проводниках, магнитная индукция. Во всех этих случаях связь между напряженностью и вызываемым ею эффектом описывается системой уравнений одного и того же вида, так что, решив какую-либо задачу в одной из областей, можно эту задачу и ее решение перевести на язык других областей, и эти новые утверждения тоже будут справедливы.

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТАТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Определение электричества как математической величины

63. Мы видели, что свойства заряженных тел таковы, что заряд одного тела может быть равен заряду другого или сумме зарядов двух тел и что два тела, заряженных одинаково, но противоположно, не оказывают никакого действия на внешние тела, если их поместить вместе внутрь замкнутого изолированного проводящего сосуда. Мы можем выразить все эти свойства в краткой и согласованной форме, считая наэлектризованное тело *заряженным* определенным *количеством электричества*, которое мы обозначим через e. Если заряд положителен, т. е., согласно обычному соглашению, стеклообразный, то e будет положительной величиной. Если заряд отрицателен, т. е. смолообразный, то e будет отрицательной величиной, а величину $-e$ можно истолковать либо как отрицательное количест-

во стеклянного электричества, либо как положительное количество смоляного электричества.

Сложение двух равных, но противоположных электрических зарядов $+e$ и $-e$ приводит к незаряженному состоянию, описываемому нулем. Поэтому незаряженное тело мы можем рассматривать как виртуально заряженное равными, но противоположными зарядами неопределенной величины, а заряженное тело можем считать виртуально заряженным неравными количествами положительного и отрицательного электричества, причем алгебраическая сумма этих зарядов дает наблюдаемую электризацию. Очевидно, однако, что такой способ рассмотрения заряженных тел совершенно искусственный. Его можно сравнить с пониманием скорости тела как состоящей из двух или нескольких различных скоростей, ни одна из которых не является настоящей скоростью тела.

ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ

Трехмерное распределение

64. *Определение.* Объемной плотностью электричества в данной точке пространства является предел отношения количества электричества внутри сферы с центром в данной точке к объему этой сферы при неограниченном уменьшении радиуса сферы.

Мы будем обозначать это отношение через ρ; оно может быть как положительным, так и отрицательным.

Поверхностное распределение

Как теория, так и эксперимент показывают, что в некоторых случаях заряд тела находится целиком на поверхности. Плотность в точке поверхности, определенная как указано выше, была бы бесконечно большой. Поэтому мы примем другой способ измерения поверхностной плотности.

Определение. Плотностью электричества в данной точке на поверхности является предел отношения количества электричества внутри сферы с центром в данной точке к площади поверхности, вырезаемой этой сферой при неограниченном уменьшении радиуса сферы.

Мы будем обозначать поверхностную плотность буквой σ.

Те читатели, которые представляют себе электричество материальной жидкостью или совокупностью частиц, должны в этом случае считать электричество распределенным по поверхности в виде слоя определенной толщины θ с плотностью равной ρ_0 или тому значению ρ, которое получится при максимально тесном расположении частиц на поверхности. Очевидно, в этой теории $\rho_0\theta=\sigma$. При отрицательном значении σ, согласно этой теории, определенный слой толщины θ остается полностью лишенным положительного электричества и заполненным целиком отрицательным электричеством или — в одножидкостной теории — веществом.

Нет, однако, никаких экспериментальных указаний ни на наличие электрического поверхностного слоя конечной толщины, ни на то, что электричество представляет собой жидкость или совокупность частиц. Поэтому мы предпочитаем не вводить обозначения для толщины слоя, а пользоваться специальным обозначением для поверхностной плотности.

Линейное распределение

Иногда удобно считать электричество распределенным на линии, т. е. на длинном узком теле, толщиной которого мы пренебрегаем. В этом случае мы можем определить линейную плотность в каждой точке как предел отношения заряда на элементе линии к длине этого элемента при неограниченном уменьшении этой длины.

Если линейную плотность обозначить через λ, то полное количество электричества на кривой будет равно $e=\int \lambda ds$, где ds — элемент длины кривой. Аналогично, если σ — поверхностная плотность, то полное количество электричества на поверхности равно $e=\iint \sigma dS$, где dS — элемент поверхности.

Наконец, если ρ — объемная плотность в каждой точке пространства, то полный заряд в некотором объеме равен $e=\iiint \rho dxdydz$, где $dxdydz$ — элемент объема. Пределами интегрирования во всех случаях являются границы кривой, поверхности или рассматриваемой части пространства.

Очевидно, e, λ, σ и ρ — величины различного рода, причем размерность каждой последующей величины меньше размерности предыдущей на множитель размерности длины, так что если l означает длину, то величины e, $l\lambda$, $l^2\sigma$ и $l^3\rho$ будут одного и того же рода, и если $[L]$ — единица длины, а $[\lambda]$, $[\sigma]$, $[\rho]$ — единицы плотностей различного рода, то $[e]$, $[L\lambda]$, $[L^2\sigma]$, $[L^3\rho]$ означают все единицу электричества.

Определение единицы электричества

65. Пусть A и B — две точки, находящиеся на расстоянии в единицу длины. Пусть два тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием AB, заряжены равными количествами положительного электричества и помещены соответственно в точки A и B и пусть заряды их таковы, что сила их взаимного расталкивания равна единичной силе (способ ее измерения указан в п. 6). Тогда заряд каждого тела считается равным единице количества электричества.

Если бы тело B было заряжено единицей отрицательного электричества, то, поскольку взаимодействие тел носило бы противоположный характер, тела бы притягивались с единичной силой. Если бы заряд A тоже был отрицательным и равным единице, мы вновь имели бы отталкивание с единичной силой.

Поскольку взаимодействие любых двух порций электричества не зависит от наличия остальных, сила расталкивания e единиц электричества в точке A и e' единиц электричества в точке B будет равна ee', если расстояние AB равно единице (см. п. 39).

Закон действия силы между заряженными телами

66. Кулон показал на опыте, что сила, действующая между заряженными телами, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними, меняется обратно пропорционально квадрату расстояния. Таким образом, сила расталкивания двух таких тел, несущих заряды e и e' и находящихся на расстоянии r, равна ee'/r^2.

В п. 74в, 74г и 74д мы покажем, что этот закон — единственный, согласующийся с наблюденным фактом, состоящим в том, что проводник, помещенный внутрь другого полого замкнутого проводника и находящийся с ним в контакте, полностью теряет свой электрический заряд. Наше убеждение в точности закона обратных квадратов следует считать основанным скорее на опытах такого рода, нежели на непосредственных измерениях Кулона.

Результирующая сила между двумя телами

67. Чтобы рассчитать результирующую силу между двумя телами, мы можем разделить каждое тело на элементы объема и рассмотреть силу отталкивания электричества, расположенного на каждом элементе одного объема, от электричества на каждом элементе второго объема. Таким образом, мы получим систему сил, число которых равно произведению чисел элементов, на которые разделено каждое тело. Затем следует сложить действие всех этих сил по правилам Статики. Таким образом, чтобы найти составляющую в направлении оси x, нужно найти значение шестикратного интеграла

$$\iiiiiint \frac{\rho\rho' (x-x')\, dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz'}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{3/2}},$$

где x, y, z — координаты точки первого тела, плотность заряда в которой равна ρ; x', y', z', ρ' — соответствующие величины для второго тела, и интегрирование производится сначала по одному телу, а затем по другому.

Результирующая напряженность в точке

68. Для упрощения математических выкладок удобно рассматривать действие заряженного тела не на другое тело произвольной формы, а на достаточно малое тело, заряженное достаточно малым количеством электричества, помещенное в произвольную точку пространства, куда простирается электрическое действие. Принимая заряд этого тела достаточно малым, мы делаем неощутимым его искажающее действие на заряд первого тела.

Пусть e — заряд малого тела, и пусть при помещении в точку (x, y, z) на него действует сила Re, направляющие косинусы которой l, m, n. Тогда мы можем назвать R результирующей электрической напряженностью в точке (x, y, z).

Если X, Y, Z — составляющие R, то $X=Rl$, $Y=Rm$, $Z=Rn$. Говоря о результирующей электрической напряженности в точке, мы не обязательно имеем в виду, что здесь фактически действует какая-то сила; мы только хотим сказать, что если бы в эту точку было помещено заряженное тело, то на него действовала бы сила Re, где e — заряд этого тела [1].

Определение. Результирующая электрическая напряженность в точке — это сила, которая действовала бы на малое тело, заряженное единичным положительным зарядом, если бы его поместили в эту точку, не исказив имеющегося распределения электричества.

Эта сила стремится не только переместить заряженное тело, но также переместить электричество на этом теле, так что положительное электричество стремится

[1] Электрическая и магнитная напряженности в электричестве и магнетизме соответствуют напряженности тяготения, обозначаемой обычно через g в теории тяготения.

сместиться в направлении R, а отрицательное — в противоположном направлении. Поэтому величина R называется также Электродвижущей Напряженностью в точке (x, y, z).

Если мы захотим выразить явно тот факт, что результирующая напряженность является вектором, мы будем обозначать ее готической буквой $\mathfrak{E}$. Если тело является диэлектриком, то, согласно принятой в этом трактате теории, электричество смещается в нем, причем количество электричества, смещаемое в направлении вектора $\mathfrak{E}$ через единичную площадку, перпендикулярную $\mathfrak{E}$, равно $\mathfrak{D} = K\mathfrak{E}/4\pi$, где $\mathfrak{D}$ — смещение, $\mathfrak{E}$ — напряженность поля, а K — индуктивная способность диэлектрика.

Если тело является проводником, то состояние напряжения непрерывно снимается, так что возникает ток проводимости, поддерживаемый до тех пор, пока в среде действует $\mathfrak{E}$.

Линейный интеграл от электрической напряженности или электродвижущая сила вдоль дуги кривой

69. Электродвижущая сила вдоль заданной дуги AP некоторой кривой измеряется численно работой, которая была бы совершена электрической напряженностью над единичным положительным зарядом, перемещаемым вдоль кривой, начиная с точки A и кончая точкой P дуги.

Если s — длина дуги, отмеряемая от точки A, а результирующая напряженность R в каждой точке кривой образует угол ε с касательной к кривой, проведенной в положительном направлении, то работа, совершенная над единичным электрическим зарядом при его перемещении вдоль элемента кривой ds, равна $R\cos\varepsilon ds$, а полная электродвижущая сила E равна $E = \int\limits_0^s R\cos\varepsilon\, ds$, где интегрирование производится от начала до конца дуги.

Если использовать составляющие напряженности, то это выражение примет вид

$$E = \int\limits_0^s \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Если X, Y, Z таковы, что $Xdx + Ydy + Zdz$ образует полный дифференциал функции — V от x, y, z, то

$$E = \int\limits_A^P (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = -\int\limits_A^P dV = V_A - V_P,$$

где интегрирование производится по любому пути от точки A к точке P, будь то заданная кривая или любая другая линия, соединяющая A и P.

Здесь V — скалярная функция положения точки в пространстве, т. е. значение координат точки определяет значение V, причем это значение не зависит от положения и направления осей координат (см. п. 16).

О функциях положения точки

В последующем, описывая какую-либо величину как функцию положения точки, мы имеем в виду, что для каждого положения точки функция имеет определенное значение. Мы не подразумеваем при этом, что это значение всегда выражается одной и той же формулой для всех точек пространства; оно может выражаться одной формулой по одну сторону от некоторой поверхности и другой — по другую сторону.

О потенциальных функциях

70. Величина $Xdx+Ydy+Zdz$ является полным дифференциалом во всех случаях, когда сила обусловлена притяжением или отталкиванием, напряженность которых зависит от расстояний до некоторого числа точек. Если r_1 — расстояние одной из этих точек от точки (x, y, z), а R_1 — напряженность отталкивания, то

$$X_1=R_1\frac{x-x_1}{r_1}=R_1\frac{dx_1}{dx}$$

и аналогично для Y_1 и Z_1, так что

$$X_1dx+Y_1dy+Z_1dz=R_1dr_1,$$

а поскольку R_1 зависит только от r_1, то R_1dr_1 является полным дифференциалом некоторой функции от r_1, скажем,— V_1.

Аналогично для любой другой силы R_2, действующей из центра, находящегося на расстоянии r_2,

$$X_2dx+Y_2dy+Z_2dz=R_2dr_2=-V_2.$$

Но $X=X_1+X_2+$ и т. д., и аналогично Y и Z, так что

$$Xdx+Ydy+Zdz=-dV_1-dV_2-\text{ и т. д.}=-dV.$$

Интеграл от этой величины, обращающийся в нуль на бесконечности, называется Потенциальной Функцией.

В теории притяжения эта функция была впервые применена Лапласом при расчете притяжения Земли. Грин в своем исследовании «О применении математического анализа к электричеству» дал ей название Потенциальной Функции. Гаусс независимо от Грина также пользовался термином Потенциал. Клаузиус и другие понимали под Потенциалом работу, которая была бы совершена при удалении двух тел или систем на бесконечное расстояние друг от друга. Мы будем придерживаться применения этого слова в том смысле, в каком оно используется в последних английских работах и избегнем неопределенности, приняв следующее определение сэра У. Томсона.

Определение потенциала. Потенциал в Точке — это работа, которая была бы совершена электрическими силами над единичным положительным зарядом, внесенным в эту точку без искажения распределения заряда, при переносе его из этой точки на бесконечное расстояние, или, что то же самое—работа внешнего источника при переносе единичного положительного заряда из бесконечности (или из любого места, где потенциал равен нулю) в данную точку.

Выражение напряженности и ее составляющих через потенциал

71. Поскольку полная электродвижущая сила вдоль любой дуги AB равна $E_{AB}=V_A-V_B$, то, положив дугу AB равной ds, получим для составляющей напряженности в направлении ds: $R\cos\varepsilon=-(dV/ds)$, откуда, приняв последовательно ds параллельными каждой из осей, получим

$$X=-\frac{dV}{dx},\qquad Y=-\frac{dV}{dy},\qquad Z=-\frac{dV}{dz},$$

$$R=\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Саму напряженность, величина которой равна R, а составляющие равны X, Y, Z, мы будем обозначать готической буквой $\mathfrak{E}$, как в п. 68.

Потенциал во всех точках внутри проводника одинаков

72. Проводник — это тело, которое позволяет электричеству перемещаться от одной части тела к другой под действием электродвижущей силы. Если электричество находится в равновесии, то внутри проводника не может быть электродвижущей напряженности. Таким образом, $R=0$ во всем объеме, занятом проводником. Отсюда следует, что $(dV/dx)=0$, $(dV/dy)=0$, $(dV/dz)=0$, так что для всех точек проводника $V=C$, где C — постоянная величина.

Поскольку потенциал во всех точках внутри проводника равен C, величину C называют Потенциалом проводника. C можно определить как работу, которую должна совершить внешняя сила, чтобы перенести единичный заряд из бесконечности на проводник в предположении, что распределение электричества не искажается в присутствии этого единичного заряда.

В п. 246 будет показано, что в общем случае контакта двух тел различного рода через поверхность контакта действует электродвижущая сила от одного тела к другому, так что, когда они находятся в равновесии, потенциал одного тела выше потенциала другого. Поэтому мы пока будем считать, что все наши проводники сделаны из одного и того же металла и находятся при одинаковой температуре.

Если потенциалы проводников A и B равны соответственно V_A и V_B, то электродвижущая сила вдоль проволоки, соединяющей A и B, равна V_A-V_B в направлении от A к B, т. е. положительное электричество будет стремиться перейти с проводника с большим потенциалом на другой проводник.

В науке об электричестве Потенциал находится в таком же соотношении с Электричеством, как Давление — с Жидкостью в Гидростатике или Температура — с Теплотой в Термодинамике. И Электричество, и Жидкость, и Теплота стремятся перейти из одного места в другое, если соответственно потенциал, давление или температура в первом месте больше, чем во втором. Жидкость, безусловно, является веществом, теплота, конечно, не является веществом, так что, хотя аналогии такого рода и могут оказать помощь в формировании представлений о формальных соотношениях между электрическими величинами, нужно быть внимательным, чтобы та или иная аналогия не была истолкована как указание на то, что электричество — это вещество, подобное воде, или состояние возбуждения, подобное теплоте.

Потенциал произвольной электрической системы

73. Если имеется единственный точечный заряд величины e и r — расстояние точки x', y', z' от этого заряда, то

$$V = \int_r^\infty R\,dr = \int_r^\infty \frac{e}{r^2}\,dr = \frac{e}{r}.$$

Если же имеется произвольное число точечных зарядов e_1, e_2 и т. д. в точках с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и т. д. и их расстояния до точки (x', y', z') равны r_1, r_2 и т. д., то потенциал системы в точке (x', y', z') равен $V=\Sigma\,(e/r)$.

Если плотность заряда в произвольной точке (x, y, z) заряженного тела равна ρ, то потенциал, создаваемый телом, равен $V=\iiint \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz$, где $r=\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{1/2}$, а интегрирование производится по всему телу.

О доказательстве закона обратных квадратов

74 а. Факт обратной пропорциональности силы, действующей между заряженными телами, квадрату расстояния между ними можно считать установленным прямыми опытами Кулона с крутильными весами. Однако выводимый из этих опытов результат с необходимостью содержит погрешность, обусловленную случайными ошибками каждого эксперимента, а как раз в опыте с крутильными весами такие ошибки у не слишком искусного экспериментатора весьма ощутимы.

Значительно более точное подтверждение закона действия силы может быть получено из опыта, аналогичного описанному в п. 32 (опыт VII).

В до сих пор еще не опубликованной работе по электричеству Кавендиш показал, что справедливость закона обратных квадратов определяется результатами такого опыта.

Он закрепил шар на изолирующей подставке и присоединил две полусферы с помощью стеклянных стержней к двум деревянным рамам, вращающимся на петлях вокруг оси, так что при сближении рам эти полусферы образовывали изолированную сферическую оболочку, концентрическую шару.

Шар можно было соединять с полусферами с помощью короткой проволочки, подвешенной на шелковой нити, так что проволочку можно было удалять, не разряжая прибора.

С помощью лейденских банок, потенциал которых был предварительно измерен электрометром, он заряжал полусферы, соединенные с шаром, и тотчас же вытаскивал соединяющую проволочку с помощью шелковой нити, разводил и разряжал полусферы и проверял электрическое состояние шара с помощью шарового электрометра.

Этот электрометр, считавшийся в то время (1773 г.) самым чувствительным, не обнаружил никаких следов заряда.

Затем Кавендиш сообщал шару заряд, составляющий известную долю заряда, ранее сообщенного полусферам, и вновь исследовал шар электрометром.

Таким образом он установил, что заряд шара в первоначальном опыте должен быть менее 1/60 заряда всей установки, так как больший заряд был бы обнаружен электрометром.

Затем он рассчитал отношение заряда на шаре к заряду на полусферах в предположении, что сила расталкивания обратно пропорциональна расстоянию в степени, слегка отличающейся от двойки, и нашел, что если бы это отличие составляло 1/50, то на шаре был бы заряд равный 1/57 от заряда всей установки, т. е. его мог бы обнаружить электрометр.

74 б. Недавно этот опыт был повторен в Кавендишской Лаборатории в несколько ином виде.

Полусферы были закреплены на изолированной подставке, а шар закреплен внутри в надлежащем положении с помощью эбонитового кольца. В таком приспособлении изолирующая подставка шара никогда не находится под действием заметной электрической силы и, следовательно, никогда не заряжается, так что полностью исключается искажающее действие переползания электричества вдоль поверхности изолятора.

Полусферы не отводились перед проверкой потенциала шара. Они оставались на своем месте, но разряжались на землю. Влияние заданного заряда шара на электрометр в этом случае было меньше, чем при отведенных полусферах, но этот недостаток с лихвой искупался полнейшей защитой от всех внешних электрических воздействий благодаря проводящим оболочкам.

Короткая проволочка, обеспечивавшая соединение оболочки с шаром, была прикреплена к небольшому металлическому диску, прикрывавшему небольшое отверстие в оболочке, так что, когда проволочка вместе с диском приподнималась с помощью шелковой нити, в отверстие можно было погрузить электрод электрометра до контакта с находящимся внутри шаром.

Электрометром служил Томсоновский Квадрантный Электрометр, описанный в п. 219. Корпус электрометра и один из его электродов были все время соединены с землей, а измерительный электрод соединялся с землей до разрядки оболочки.

Для определения первоначального заряда оболочки на значительном расстоянии от нее располагался на подставке небольшой латунный шарик.

Опыт проводился следующим образом.

Оболочка заряжалась контактом с лейденской банкой. Небольшой шарик соединялся с землей и приобретал отрицательный заряд через индукцию, после чего он изолировался. Проволочка, соединявшая шар и оболочки, удалялась с помощью шелковой нити. Затем оболочка разряжалась и оставалась заземленной. Измерительный электрод отключался от земли, и через отверстие в оболочке приводился в контакт с шаром.

Электрометр не регистрировал ни малейшего эффекта.

Для проверки чувствительности прибора оболочка отсоединялась от земли, а небольшой шарик разряжался на землю. При этом электрометр показывал положительное отклонение D.

Отрицательный заряд на шарике составлял около 1/54 от первоначального заряда оболочки, положительный заряд, индуцированный этим шариком при заземлении оболочки, составлял около 1/9 заряда шарика. Таким образом, после заземления шарика потенциал оболочки, регистрируемый электрометром, составлял 1/486 ее первоначального потенциала.

Если бы отталкивание было пропорционально r^{q-2}, то потенциал шара составлял бы долю $-0{,}1478q$ от потенциала оболочки согласно уравнению (22) п. 74 г.

Поэтому, если $\pm d$ — наибольшее отклонение электрометра, могущее оказаться не замеченным, а D — отклонение, зарегистрированное во второй части опыта, то q не может превосходить $\pm\frac{1}{72}\frac{d}{D}$ (поскольку $0{,}1478qV\Big/\frac{1}{486}V$ должно быть меньше, чем d/D).

Даже в грубых опытах D превосходило $300d$, так что q не может превосходить $\pm 1/21600$.

Теория этого опыта

74 в. Найдем потенциал в произвольной точке, создаваемый однородной сферической оболочкой при силе расталкивания двух единичных зарядов, описываемой заданной функцией расстояния.

Пусть $\varphi(r)$ — расталкивание двух единичных зарядов на расстоянии r, а $f(r)$ — такая функция, что

$$\frac{df(r)}{dr}\,(=f'(r))=r\int\limits_r^\infty \varphi(r)\,dr. \tag{1}$$

Пусть радиус оболочки равен a, а поверхностная плотность заряда на ней σ. Тогда если через α обозначить полный заряд на оболочке, то

$$\alpha=4\pi a^2\sigma. \tag{2}$$

Пусть b — расстояние заданной точки от центра оболочки, а r — расстояние этой точки от любой данной точки оболочки.

Если мы введем сферические координаты точки на оболочке, выбрав полюс в центре оболочки, а ось проходящей через заданную точку, то получим

$$r^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta. \tag{3}$$

Заряд элемента оболочки равен

$$\sigma a^2\sin\theta d\varphi d\theta, \tag{4}$$

а потенциал, создаваемый этим элементом в заданной точке, равен

$$\sigma a^2\sin\theta\frac{f'(r)}{r}\,d\theta\,d\varphi. \tag{5}$$

Это выражение нужно проинтегрировать по φ от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$, что дает

$$2\pi\sigma a^2\sin\theta\frac{f'(r)}{r}\,d\theta. \tag{6}$$

Остается провести интегрирование по θ от $\theta=0$ до $\theta=\pi$.

Дифференцируя (3), найдем

$$rdr=ab\sin\theta d\theta. \tag{7}$$

Подставляя значение $d\theta$ в (6), получим

$$2\pi\sigma\frac{a}{b}f'(r)\,dr. \tag{8}$$

Интегрирование дает

$$V = 2\pi\sigma \frac{a}{b} \{f(r_1) - f(r_2)\}, \tag{9}$$

где r_1 — наибольшее значение r, равное всегда $a+b$, а r_2 — наименьшее значение r, равное $b-a$ в случае, когда заданная точка находится вне оболочки, и $a-b$, когда эта точка внутри оболочки.

Если α — полный заряд оболочки, а V — создаваемый им потенциал в данной точке, то для точек вне оболочки

$$V = \frac{\alpha}{2ab} \{f(b+a) - f(b-a)\}, \tag{10}$$

на самой оболочке

$$V = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a), \tag{11}$$

а для точек внутри ее

$$V = \frac{\alpha}{2ab} \{f(a+b) - f(a-b)\}. \tag{12}$$

Найдем теперь потенциалы двух концентрических сферических оболочек с радиусами внешней и внутренней оболочек равными a и b и зарядами α и β.

Обозначая потенциал внешней оболочки через A, а внутренней через B, мы найдем из вышесказанного, что

$$A = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a) + \frac{\beta}{2ab} \{f(a+b) - f(a-b)\}, \tag{13}$$

$$B = \frac{\beta}{2b^2} f(2b) + \frac{\alpha}{2ab} \{f(a+b) - f(a-b)\}. \tag{14}$$

В первой части опыта оболочки соединены короткой проволочкой и приобретают обе одинаковый потенциал V.

Полагая $A=B=V$ и решая уравнения (13) и (14) относительно β, мы найдем заряд на внутреннем проводнике:

$$\beta = 2Vb \frac{bf(2a) - a[f(a+b) - f(a-b)]}{f(2a)f(2b) - [f(a+b) - f(a-b)]^2}. \tag{15}$$

В опыте Кавендиша полусферы, образующие оболочку, отводились на расстояние, которое мы можем считать бесконечным, и разряжались. Потенциал внутренней оболочки (т. е. шара) становился при этом равным

$$B_1 = \frac{\beta}{2b^2} f(2b). \tag{16}$$

При повторении опыта в Кавендишской Лаборатории наружная оболочка оставалась на месте, но заземлялась, так что $A=0$. В этом случае для потенциала внутреннего шара, выраженного через V, получим

$$B_2 = V\left\{1 - \frac{a}{b}\frac{f(a+b) - f(a-b)}{f(2a)}\right\}. \tag{17}$$

74 г. Примем теперь вместе с Кавендишем, что сила обратно пропорциональна некоторой степени расстояния, не сильно отличающейся от двойки.

Положим

$$\varphi(r)=r^{q-2}, \tag{18}$$

тогда

$$f(r)=\frac{1}{1-q^2}r^{q+1}. \tag{19}$$

Если считать q малым, то это выражение можно представить по теореме об экспоненте в виде разложения

$$f(r)=\frac{1}{1-q^2}r\left\{1+q\ln r+\frac{1}{1\cdot 2}(q\ln r)^2+\dots\right\}. \tag{20}$$

Если пренебречь членами, содержащими q^2, то выражения (16) и (17) примут вид

$$B_1=\frac{1}{2}\frac{a}{a-b}Vq\left[\ln\frac{4a^2}{a^2-b^2}-\frac{a}{b}\ln\frac{a+b}{a-b}\right], \tag{21}$$

$$B_2=\frac{1}{2}Vq\left[\ln\frac{4a^2}{a^2-b^2}-\frac{a}{b}\ln\frac{a+b}{a-b}\right]. \tag{22}$$

Отсюда можно найти q по данным опыта.

74 д. Лаплас первым показал, что никакая функция расстояния, кроме обратно пропорциональной квадрату расстояния, не удовлетворяет условию, что однородная сферическая оболочка не действует на частицу, находящуюся внутри нее [2].

Если мы примем, что β в выражении (15) всегда равно нулю, мы сможем применить метод Лапласа для нахождения вида $f(r)$. Из (15) следует, что

$$bf(2a)-af(a+b)+af(a-b)=0.$$

Дифференцируя дважды по b и деля на a, получим $f''(a+b)=f''(a-b)$.

Если это равенство выполняется тождественно, то $f''(r)=C_0=\text{const}$. Отсюда $f'(r)=C_0r+C_1$ и, согласно (1),

$$\int_r^\infty \varphi(r)\,dr=\frac{f'(r)}{r}=C_0+\frac{C_1}{r}, \qquad \varphi(r)=\frac{C_1}{r^2}.$$

Заметим здесь, что хотя предположение Кавендиша о том, что сила меняется как некоторая степень расстояния, представляется менее общим, чем предположение Лапласа, что сила является произвольной функцией расстояния, оно является единственным совместимым с тем фактом, что подобные поверхности могут быть заряжены так, чтобы иметь подобные электрические свойства.

Ибо, если бы сила была функцией расстояния, отличной от степенной, то отношение сил на двух различных расстояниях не было бы функцией отношения расстояний, а зависело бы от абсолютного значения этих расстояний и поэтому содержало бы отношения этих расстояний к абсолютно фиксированной длине.

[2] *Méc. Cél.*, I, 2.

Фактически Кавендиш сам отмечает, что, согласно его собственной гипотезе о строении электрической жидкости, распределение электричества на двух геометрически подобных проводниках не может быть в точности подобным, если только заряды проводников не пропорциональны объемам. Действительно, он предполагает, что частицы электрической жидкости плотно спрессованы вблизи поверхности тела, а это эквивалентно предположению о том, что закон взаимодействия не является законом обратных квадратов, и для сильно сблизившихся частиц расталкивание начинает расти значительно быстрее с дальнейшим уменьшением расстояния между ними.

Поверхностный интеграл от электрической индукции и электрическое смещение через поверхность

75. Пусть R — результирующая напряженность в произвольной точке поверхности, а ε — угол, который она образует с нормалью, проведенной к положительной стороне поверхности. Тогда $R\cos\varepsilon$ — составляющая напряженности по нормали к поверхности, и если dS — элемент поверхности, то электрическое смещение через dS будет, согласно п. 68, равно $(1/4\pi)KR\cos\varepsilon\,dS$. Поскольку мы сейчас не рассматриваем никаких диэлектриков, кроме воздуха, то $K=1$.

Мы можем, однако, избежать на этой стадии применения теории электрического смещения, назвав величину $R\cos\varepsilon\,dS$ Индукцией через элемент dS. Эта величина хорошо известна в математической физике, но название ее мы заимствовали у Фарадея. Поверхностный интеграл от индукции равен $\iint R\cos\varepsilon\,dS$. Из п. 21 следует, что если X, Y, Z — составляющие R и если они непрерывны в области, ограниченной замкнутой поверхностью S, то индукция, отсчитываемая изнутри наружу, равна

$$\iint R\cos\varepsilon\,dS=\iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

где интегрирование проводится по всему объему, охватываемому поверхностью.

Индукция через замкнутую поверхность, обусловленная отдельным силовым центром

76. Пусть в точке O находится количество электричества e и пусть r — расстояние произвольной точки P от точки O. Тогда напряженность в этой точке равна $R=er^{-2}$ и направлена по OP.

Пусть из точки O проведена в произвольном направлении прямая в бесконечность. Если точка O находится вне заданной замкнутой поверхности, то эта прямая либо не пересечет этой поверхности, либо выйдет из нее столько же раз, сколько войдет. Если O находится внутри поверхности, то прямая должна сначала выйти из поверхности, а потом она может попеременно входить и выходить любое число раз, но в конце концов она должна выйти из поверхности.

Пусть ε — угол между OP и наружной нормалью к поверхности в точке, где ее пересекает OP. Там, где прямая выходит из поверхности, $\cos\varepsilon$ положителен, а там, где входит,— отрицателен.

Опишем теперь вокруг точки O сферу единичного радиуса, и пусть прямая OP описывает коническую поверхность с малым углом раскрыва и с вершиной в точке O.

Этот конус вырежет малый элемент $d\omega$ на поверхности сферы и малые элементы dS_1, dS_2 и т. д. на замкнутой поверхности в различных местах пересечения прямой OP с нею.

Поскольку каждый из этих элементов dS пересекает конус на расстоянии r от вершины и наклонен под углом ε, то $dS=\pm r^2 \sec \varepsilon d\omega$, а так как $R=er^{-2}$, то $R\cos\varepsilon\, dS=\pm e\, d\omega$. При этом положительный знак берется, когда r выходит из поверхности, а отрицательный — когда входит.

Если точка O находится вне поверхности, то положительных значений столько же, сколько отрицательных, так что для любого направления $\sum R\cos\varepsilon\, dS=0$, и, следовательно, $\iint R\cos\varepsilon dS=0$, где интегрирование производится по всей замкнутой поверхности.

Если же точка O находится внутри замкнутой поверхности, то радиус-вектор OP сначала выходит из поверхности, что дает положительный вклад $ed\omega$, а потом равное число раз входит и выходит, так что в этом случае $\sum R\cos\varepsilon dS=ed\omega$.

Взяв интеграл по всей замкнутой поверхности, мы охватим всю сферическую поверхность, площадь которой равна 4π, так что

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS=e\iint d\omega=4\pi e.$$

Таким образом, мы заключаем, что полная индукция в наружном направлении через замкнутую поверхность, обусловленная силовым центром e, находящимся в точке O, равна нулю, если точка O находится вне поверхности, и равна $4\pi e$, если точка O находится внутри поверхности.

Поскольку в воздухе смещение равно индукции, деленной на 4π, то смещение через замкнутую поверхность, отсчитываемое наружу, равно количеству электричества внутри поверхности.

Следствие. Отсюда следует также, что если поверхность не замкнута, а ограничена некоторой заданной замкнутой кривой, то полная индукция через эту поверхность равна ωe, где ω — телесный угол из точки O, опирающийся на эту замкнутую кривую. Эта величина зависит, следовательно, только от самой замкнутой кривой, а форма поверхности, ограниченной этой кривой, может меняться произвольным образом, лишь бы только она не переходила с одной стороны силового центра на другую.

Об уравнениях Лапласа и Пуассона

77. Поскольку значение полной индукции одного силового центра через замкнутую поверхность зависит лишь от того, находится ли он внутри поверхности или нет, и никак не зависит от положения этого центра, то если имеется несколько таких силовых центров e_1, e_2 и т. д. внутри поверхности и несколько центров e_1', e_2' и т. д. вне поверхности, то $\iint R\cos\varepsilon\, dS=4\pi e$, где e означает алгебраическую сумму количеств электричества всех силовых центров внутри замкнутой поверхности, т. е. полное количество электричества, находящееся внутри поверхности, причем смоляное электричество считается отрицательным.

Если электричество распределено внутри поверхности так, что плотность его нигде не обращается в бесконечность, то согласно п. 64 $4\pi e = 4\pi \iiint \rho\, dx\, dy\, dz$, а согласно п. 75

$$\iint R \cos \varepsilon\, dS = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) dx\, dy\, dz.$$

Если мы примем в качестве поверхности замкнутую поверхность, ограничивающую элемент объема $dx\, dy\, dz$, то, приравнивая эти выражения, получим

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi\rho.$$

Если существует потенциал V, то согласно п. 71

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 4\pi\rho = 0.$$

Это уравнение в случае плотности, равной нулю, называется Уравнением Лапласа. В более общей форме оно было впервые приведено Пуассоном. Оно позволяет нам при известном потенциале во всех точках определить распределение электричества. Обозначим, как в п. 26, величину

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

через $-\nabla^2 V$. Тогда мы можем выразить уравнение Пуассона словами: плотность электричества, умноженная на 4π, есть концентрация потенциала $\nabla^2 V$. Там, где нет заряда, нет концентрации потенциала, в этом и заключается интерпретация уравнения Лапласа.

Согласно п. 72 потенциал V постоянен внутри проводника. Значит, внутри проводника объемная плотность заряда равна нулю, и весь заряд должен быть на поверхности проводника.

Если предположить, что при поверхностном и линейном распределении электричества объемная плотность ρ остается конечной, а электричество распределено в виде тонкого слоя или узкой нити, то в пределе, увеличивая ρ и уменьшая толщину слоя или сечение нити, мы можем прийти к истинному поверхностному или линейному распределению. Уравнение для потенциала, справедливое в процессе всего предельного перехода, останется справедливым и в пределе, если его интерпретация соответствует реальным обстоятельствам.

Изменение потенциала на заряженной поверхности

78 а. Потенциальная функция V должна быть физически непрерывной в смысле п. 7, за исключением граничных поверхностей между двумя различными средами, на которых, как мы увидим в п. 246, может существовать разность потенциалов между различными веществами, так что при равновесии электричества потенциал в некоторой точке одного вещества больше потенциала в смежной точке второго вещества на постоянную величину C, зависящую от природы обоих веществ и от их температуры.

Что касается первых производных от V по x, y или z, то они могут быть разрывны, и, согласно п. 8, точки разрыва должны лежать на поверхности, уравнение которой можно записать в виде

$$\varphi=\varphi(x, y, z)=0. \tag{1}$$

Эта поверхность отделяет область отрицательного φ от области положительного φ.

Пусть V_1 — потенциал в произвольной заданной точке в отрицательной области, а V_2 — потенциал в произвольной заданной точке положительной области. Тогда в любой точке на поверхности, где $\varphi=0$, которую можно считать принадлежащей обеим областям,

$$V_1+C=V_2, \tag{2}$$

где C — постоянная разность потенциалов (если таковая имеется) между положительной и отрицательной сторонами поверхности.

Пусть l, m, n — направляющие косинусы нормали ν_2 в данной точке поверхности в сторону положительной области. Направляющие косинусы нормали ν_1 в сторону отрицательной области будут $-l$, $-m$ и $-n$.

Скорости изменения V вдоль нормалей будут равны

$$\frac{dV_1}{d\nu_1}=-l\frac{dV_1}{dx}-m\frac{dV_1}{dy}-n\frac{dV_1}{dz}, \tag{3}$$

$$\frac{dV_2}{d\nu_2}=l\frac{dV_2}{dx}+m\frac{dV_2}{dy}+n\frac{dV_2}{dz}. \tag{4}$$

Проведем на поверхности какую-либо кривую, и пусть s — длина, отсчитываемая вдоль этой кривой от некоторой фиксированной точки на ней. В каждой точке поверхности, а значит, и в каждой точке этой кривой, $V_2-V_1=C$. Дифференцируя это равенство по s, получим

$$\left(\frac{dV_2}{dx}-\frac{dV_1}{dx}\right)\frac{dx}{ds}+\left(\frac{dV_2}{dy}-\frac{dV_1}{dy}\right)\frac{dy}{ds}+\left(\frac{dV_2}{dz}-\frac{dV_1}{dz}\right)\frac{dz}{ds}=0, \tag{5}$$

а поскольку нормаль перпендикулярна этой кривой, то

$$l\frac{dx}{ds}+m\frac{dy}{ds}+n\frac{dz}{ds}=0. \tag{6}$$

Из (3), (4), (5) и (6) следует, что

$$\frac{dV_2}{dx}-\frac{dV_1}{dx}=l\left(\frac{dV_1}{d\nu_1}+\frac{dV_2}{d\nu_2}\right), \tag{7}$$

$$\frac{dV_2}{dy}-\frac{dV_1}{dy}=m\left(\frac{dV_1}{d\nu_1}+\frac{dV_2}{d\nu_2}\right), \tag{8}$$

$$\frac{dV_2}{dz}-\frac{dV_1}{dz}=n\left(\frac{dV_1}{d\nu_1}+\frac{dV_2}{d\nu_2}\right). \tag{9}$$

Если рассматривать изменение электродвижущей напряженности в точке при прохождении через поверхность, то составляющая напряженности, перпендикулярная поверхности, может скачком измениться на поверхности, но две

другие составляющие, параллельные касательной плоскости, остаются непрерывными при пересечении поверхности.

78 б. Чтобы определить величину заряда на поверхности, рассмотрим замкнутую поверхность, находящуюся частично в положительной области и частично в отрицательной, так что она охватывает часть поверхности разрыва.

Поверхностный интеграл $\iint R\cos\varepsilon dS$ по этой поверхности равен $4\pi e$, где e — количество электричества внутри замкнутой поверхности.

Повторяя рассуждения п. 21, получим

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS = \iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)dx\,dy\,dz+\iint\{l\,(X_2-X_1)+ \\ +m\,(Y_2-Y_1)+n\,(Z_2-Z_1)\}\,dS, \tag{10}$$

где трехкратный интеграл берется по всему объему внутри замкнутой поверхности, а двукратный — по поверхности разрыва.

Подставляя значения входящих сюда величин согласно (7), (8) и (9), получим

$$4\pi e=\iiint 4\pi\rho\,dx\,dy\,dz-\iint\left(\frac{dV_1}{d\nu_1}+\frac{dV_2}{d\nu_2}\right)dS. \tag{11}$$

Но по определению объемной плотности ρ и поверхностной плотности σ

$$4\pi e=4\pi\iiint\rho\,dx\,dy\,dz+4\pi\iint\sigma\,dS. \tag{12}$$

Сравнивая два последних слагаемых этих уравнений, получим

$$\frac{dV_1}{d\nu_1}+\frac{dV_2}{d\nu_2}+4\pi\sigma=0. \tag{13}$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением для V на заряженной поверхности с поверхностной плотностью σ.

78 в. Если V — функция от x, y, z, удовлетворяющая в данной непрерывной области пространства уравнению Лапласа

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0$$

и в некоторой конечной части этой области V постоянно и равно C, то V постоянно и равно C во всей области, где справедливо уравнение Лапласа.

Если V не равно C во всей области, то обозначим через S поверхность, ограничивающую конечную область, где $V=C$.

На поверхности S $V=C$.

Пусть ν — наружная нормаль к поверхности S. Поскольку S является границей непрерывной области, в которой $V=C$, то при перемещении по нормали от поверхности S значение V начинает отличаться от C. Таким образом, $dV/d\nu$ сразу вне поверхности может быть положительно или отрицательно, но не может быть равно нулю, за исключением нормалей на граничной линии между положительной и отрицательной областью.

Для нормали ν', направленной внутрь поверхности S, очевидно, $V'=C$ и $(dV'/d\nu')=0$.

Итак, в каждой точке поверхности S, за исключением некоторых граничных линий,

$$\frac{dV}{d\nu}+\frac{dV'}{d\nu'}\;(=-4\pi\sigma)$$

является конечной величиной, положительной или отрицательной, так что на всей поверхности S, кроме некоторых граничных линий, разделяющих положительные и отрицательные области, имеется непрерывное распределение заряда.

На этой поверхности уравнение Лапласа не выполняется (за исключением точек, лежащих на некоторых линиях). Таким образом, поверхность S, ограничивающая область, внутри которой $V=C$, охватывает всю непрерывную область, в которой выполняется уравнение Лапласа.

Сила, действующая на заряженную поверхность

79. Общие выражения для составляющих силы, действующей на заряженное тело, параллельных трем координатным осям, имеют вид

$$A=\iiint \rho X\,dx\,dy\,dz \tag{14}$$

и аналогичные выражения для составляющих B и C, параллельных осям y и z.

Однако на заряженной поверхности ρ бесконечно, а X может претерпевать разрыв, так что рассчитать силу непосредственно по этим формулам мы не можем.

Однако мы показали, что разрыв претерпевает лишь составляющая напряженности, нормальная заряженной поверхности, две другие составляющие остаются непрерывными.

Примем ось x перпендикулярной поверхности в данной точке и допустим также, по крайней мере на первом этапе рассмотрения, что X меняется в действительности не скачком, а непрерывно от X_1 до X_2 при изменении x от x_1 до x_2. Если в результате расчета мы получим определенный предел для силы при x_2-x_1 стремящемся к нулю, мы сможем считать его справедливым при $x_2=x_1$, когда заряженная поверхность имеет нулевую толщину.

Подставляя для ρ его значение по п. 77, получим

$$A=\frac{1}{4\pi}\iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)X\,dx\,dy\,dz. \tag{15}$$

Интегрирование по x от $x=x_1$ до $x=x_2$ дает

$$A=\frac{1}{4\pi}\iint\left[\frac{1}{2}(X_2^2-X_1^2)+\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)X\,dx\right]dy\,dz. \tag{16}$$

Таково значение A для слоя, параллельного плоскости yz, толщиной x_2-x_1.

Поскольку Y и Z непрерывны, то $(dY/dy)+(dZ/dz)$ конечно, а поскольку X также конечно, то

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)X\,dx<C(x_2-x_1),$$

где C — наибольшее значение $[(dY/dy)+(dZ/dz)]X$ между $x=x_1$ и $x=x_2$.

При неограниченном уменьшении x_2-x_1 этот член стремится к нулю, так что

$$A=\iint \frac{1}{8\pi}(X_2^2-X_1^2)\,dy\,dz, \tag{17}$$

где X_1 — значение X на отрицательной стороне поверхности, а X_2 — на положительной.

Согласно п. 78б,

$$X_2-X_1=\frac{dV_1}{dx}-\frac{dV_2}{dx}=4\pi\sigma, \tag{18}$$

так что (17) можно переписать в виде

$$A=\iint \frac{1}{2}(X_2+X_1)\,\sigma\,dy\,dz. \tag{19}$$

Здесь $dydz$ — элемент поверхности, σ — поверхностная плотность, а $(X_2+X_1)/2$ — арифметическое среднее значение электродвижущих напряженностей по обе стороны поверхности.

Таким образом, на элемент заряженной поверхности действует сила, составляющая которой по нормали к поверхности равна произведению заряда этого элемента на арифметическое среднее значений нормальной составляющей напряженности по обе стороны поверхности.

Поскольку обе оставшиеся составляющие электродвижущей напряженности не испытывают разрыва, вычисление их вклада в силу, действующую на поверхность, не вызывает осложнений.

Теперь мы можем считать, что нормаль к поверхности расположена произвольным образом относительно осей координат, и написать общее выражение для составляющих силы, действующей на элемент поверхности dS:

$$\begin{aligned} A&=(1/2)\,(X_1+X_2)\sigma dS,\\ B&=(1/2)\,(Y_1+Y_2)\sigma dS,\\ C&=(1/2)\,(Z_1+Z_2)\sigma dS. \end{aligned} \tag{20}$$

Заряженная поверхность проводника

80. Мы показали выше (п. 72), что всюду в веществе проводника при электрическом равновесии $X=Y=Z=0$, так что V постоянно.
Следовательно,

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=4\pi\rho=0,$$

т. е. ρ равно нулю во всей толщине проводника: внутри проводника не может быть никаких зарядов.

Таким образом, на проводнике, находящемся в электрическом равновесии, возможно лишь поверхностное распределение электричества.

Распределение электричества в толще тела возможно лишь для непроводящих тел.

Поскольку внутри проводника результирующая напряженность равна нулю, то вне проводника, непосредственно у его поверхности, она должна быть направлена по нормали к поверхности, равняться $4\pi\sigma$ и действовать в наружном направлении.

Это соотношение между поверхностной плотностью и результирующей напряженностью вблизи поверхности проводника известно как Закон Кулона, поскольку Кулон экспериментально установил, что электродвижущая напряженность вблизи некоторой точки поверхности проводника перпендикулярна поверхности и пропорциональна поверхностной плотности в этой точке. Численное значение $R=4\pi\sigma$ было установлено Пуассоном.

Сила, действующая на элемент заряженной поверхности проводника dS, равна, согласно п. 79, $(R\sigma/2)dS=2\pi\sigma^2 dS=(R^2/8\pi)dS$, поскольку с внутренней стороны поверхности напряженность равна нулю.

Эта сила действует по нормали к проводнику и направлена наружу независимо от того, заряжена поверхность положительно или отрицательно.

Сила в динах, действующая на один квадратный сантиметр поверхности, равна $(R\sigma/2)=2\pi\sigma^2=R^2/8\pi$, она действует как натяжение наружу от поверхности проводника.

81. Если теперь представить себе заряженное продолговатое тело, то, уменьшая его поперечные размеры, можно прийти к понятию заряженной линии.

Пусть ds — длина небольшого элемента продолговатого тела, c — его периметр, а σ — поверхностная плотность заряда на его поверхности. Обозначая через λ заряд, приходящийся на единицу длины, получим $\lambda=c\sigma$. При этом результирующая электрическая напряженность вблизи поверхности будет равна $4\pi\sigma=4\pi\lambda/c$.

Если при постоянном λ неограниченно уменьшать c, то напряженность на поверхности будет стремиться к бесконечности. Но для каждого диэлектрика существует предел, выше которого напряженность не может подняться, не вызывая пробоя. Поэтому распределение электричества, при котором конечное количество электричества расположено на конечном участке линии, несовместимо с условиями, существующими в природе.

Даже если бы и нашелся такой изолятор, в котором бесконечная напряженность не вызывает пробоя, линейный проводник все равно нельзя было бы зарядить конечным количеством электричества, так как, поскольку конечный заряд создал бы бесконечный потенциал, потребовалось бы бесконечно большая электродвижущая сила, чтобы перенести заряд на линейный проводник.

Аналогично можно показать, что и точечный заряд конечной величины не может существовать в природе. Однако в некоторых случаях удобно говорить о линейных зарядах и точечных зарядах. Мы будем представлять их как заряженные проволоки или малые тела, размеры которых пренебрежимы по сравнению с основными существенными расстояниями.

Поскольку количество электричества на любом заданном участке провода при заданном потенциале стремится к нулю при неограниченном уменьшении диаметра провода, распределение заряда на телах конечных размеров не изменится существенно при внесении очень тонкой металлической проволочки в поле, например, для соединения этих тел с землей, электрической машиной или электрометром.

О силовых линиях

82. Если построить кривую, направление которой совпадает в каждой точке с направлением результирующей напряженности в этой точке, то такая кривая называется Силовой Линией.

На любом участке силовой линии она идет от места с большим потенциалом к месту с меньшим потенциалом.

Поэтому силовая линия не может пересекать саму себя, но должна иметь начало и конец. Начало силовой линии, согласно п. 80, должно быть расположено на положительно заряженной поверхности, а конец силовой линии должен находиться на отрицательно заряженной поверхности.

Началом и концом силовой линии называются соответствующие точки положительной и отрицательной заряженной поверхности.

Если силовая линия перемещается так, что ее начало описывает замкнутую кривую на положительной поверхности, то ее конец описывает соответствующую замкнутую кривую на отрицательной поверхности, а сами силовые линии образуют трубчатую поверхность, называемую трубкой индукции. Такую трубку называют Соленоидом [3].

В каждой точке боковой поверхности трубки сила лежит в касательной плоскости, так что индукции поперек поверхности нет. Следовательно, если в трубке не содержится заряженного вещества, то, согласно п. 77, полная индукция через замкнутую поверхность, образуемую боковой поверхностью трубки и двумя ее торцами, равна нулю, следовательно, значение $\iint R\cos\varepsilon dS$ для обоих торцов должно быть одинаково по величине и отличаться знаком.

Если эти торцевые поверхности являются поверхностями проводников, то $\varepsilon=0$ и $R=-4\pi\sigma$, так что интеграл $\iint R\cos\varepsilon\, dS$ переходит в $-4\pi\iint\sigma\, dS$, т. е. равен заряду поверхности, умноженному на 4π.

Таким образом, положительный заряд участка поверхности, охватываемого замкнутой кривой в начале силовой трубки, численно равен отрицательному заряду, охватываемому соответствующей замкнутой кривой в конце силовой трубки.

Из свойств силовых линий можно вывести ряд важных следствий.

Внутренняя поверхность замкнутого проводящего сосуда совершенно лишена заряда, и потенциал всех точек внутри нее тот же, что и у проводника, если внутри сосуда нет заряженных тел.

Действительно, поскольку силовая линия должна начинаться на положительно заряженной поверхности, а кончаться на отрицательно заряженной, а никаких заряженных тел внутри сосуда нет, то силовая линия, если она существует внутри сосуда, должна начинаться и кончаться на самой поверхности сосуда. Но потенциал в начале силовой линии должен быть больше, чем в конце, между тем мы показали, что потенциал во всех точках проводника один и тот же.

Значит, в объеме внутри полого проводящего сосуда не может быть никаких силовых линий, если там нет никаких заряженных тел.

---

[3] От σωλήν — труба. Фарадей (§ 3271) употребляет термин «сфондилоид» в том же смысле.

Если проводник, находящийся внутри замкнутого полого сосуда, соединен с этим сосудом, то его потенциал становится равным потенциалу сосуда, а поверхность его становится непрерывно связанной с внутренней поверхностью сосуда. Следовательно, на проводнике нет никакого заряда.

Если представить себе произвольную заряженную поверхность разбитой на элементарные участки так, что заряд каждого участка равен единице, и если построить в силовом поле соленоиды, опирающиеся на эти элементарные площадки, то поверхностный интеграл через любую другую поверхность будет выражаться числом соленоидов, пересекаемых этой поверхностью. Именно в этом смысле Фарадей применяет понятие силовых линий для указания не только на направление, но и на величину силы в произвольной точке поля.

Мы пользуемся выражением Силовые Линии потому, что им пользовались Фарадей и другие. Строго говоря, их следовало бы назвать Линиями Электрической Индукции.

В обычных случаях линии индукции указывают также величину и направление результирующей электродвижущей напряженности в каждой точке, поскольку напряженность и индукция направлены одинаково и находятся в постоянном отношении. Однако бывают случаи, когда важно помнить, что эти линии указывают именно индукцию, а напряженность непосредственно определяется эквипотенциальными поверхностями: она перпендикулярна этим поверхностям и обратно пропорциональна расстоянию между соседними поверхностями.

Об удельной индуктивной способности

83a. Выше при исследовании поверхностных интегралов мы приняли обычное представление о прямом воздействии на расстоянии и не учитывали никаких эффектов, зависящих от природы диэлектрической среды, в которой наблюдаются эти силы.

Но Фарадей заметил, что количество электричества, наводимое заданной электродвижущей силой на поверхности проводника, граничащего с диэлектриком, для разных диэлектриков различно. Для большинства твердых и жидких диэлектриков оно больше, чем для воздуха и для газов. Поэтому говорят, что у этих веществ удельная индуктивная способность больше, чем у воздуха, который Фарадей принял за эталонную среду.

Мы можем выразить теорию Фарадея на математическом языке, сказав, что в диэлектрической среде индукция через поверхность представляет собой произведение нормальной составляющей электрической напряженности на коэффициент, являющийся удельной индуктивной способностью этой среды. Если этот коэффициент обозначить через K, то всюду при вычислении поверхностных интегралов нам надо будет умножить X, Y, Z на K, так что уравнение Пуассона примет вид

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)+4\pi\rho=0. \qquad (1)$$

На поверхности раздела двух сред с индуктивными способностями K_1 и K_2, потенциалы в которых мы обозначим V_1 и V_2, характеристическое уравнение

можно записать в виде

$$K_1 \frac{dV_1}{d\nu_1} + K_2 \frac{dV_2}{d\nu_2} + 4\pi\sigma = 0, \tag{2}$$

где ν_1, ν_2 — нормали в сторону первой и второй среды, а σ — истинная поверхностная плотность заряда на поверхности раздела, т. е. количество электричества, фактически находящееся на поверхности в виде заряда, изменить которое можно, лишь подведя к данному месту или отведя от него какой-то заряд.

Кажущееся распределение электричества

83 б. Если исходить из фактического распределения потенциала и найти по нему объемную плотность ρ' и поверхностную плотность σ' в предположении, что K всюду равно единице, то величину ρ' можно назвать кажущейся объемной плотностью, а σ' — кажущейся поверхностной плотностью, потому что полученное таким образом распределение электричества создавало бы фактически имеющееся распределение потенцала в предположении, что приведенный в п. 66 закон для электрической силы не требует никакой поправки для учета различия в свойствах диэлектриков.

Кажущийся заряд электричества внутри заданного объема может увеличиваться или уменьшаться без какого-либо прохождения электричества через границы этого объема. Поэтому его следует отличать от истинного заряда, удовлетворяющего уравнению непрерывности.

В неоднородном диэлектрике, в котором K меняется непрерывно, для кажущейся объемной плотности ρ' справедливо соотношение

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + 4\pi\rho' = 0. \tag{3}$$

Сопоставляя его с уравнением (1), получим

$$4\pi(\rho - K\rho') + \frac{dK}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{dK}{dy}\frac{dV}{dy} + \frac{dK}{dz}\frac{dV}{dz} = 0. \tag{4}$$

Истинная электризация, обозначаемая через ρ, создаст в диэлектрике с неоднородной индуктивной способностью, обозначаемой через K, такой же потенциал в каждой точке, какой создала бы кажущаяся электризация с плотностью ρ' в диэлектрике с индуктивной способностью, равной всюду единице.

Кажущаяся поверхностная плотность σ' определяется по электрическим силам, действующим в окрестности поверхности с помощью обычного характеристического уравнения

$$\frac{dV_1}{d\nu_1} + \frac{dV_2}{d\nu_2} + 4\pi\sigma' = 0.$$

Если твердый диэлектрик произвольной формы является идеальным изолятором и на его поверхность не внесен никакой заряд, то истинный заряд на ней равен нулю, каковы бы ни были действующие на нее электрические силы. Таким образом,

$$K_1 \frac{dV_1}{d\nu_1} + K_2 \frac{dV_2}{d\nu_2} = 0,$$

откуда

$$\frac{dV_1}{d\nu_1}=\frac{4\pi\sigma' K_2}{K_1-K_2}, \qquad \frac{dV_2}{d\nu_2}=\frac{4\pi\sigma' K_1}{K_2-K_1}.$$

Поверхностная плотность σ' — это кажущаяся электризация, создаваемая индукцией на поверхности твердого диэлектрика. Она полностью исчезает при устранении индуцирующей силы, но если в период действия индуцирующей силы разрядить кажущуюся электризацию поверхности, проведя по ней пламенем, то после устранения индуцирующей силы появится истинная электризация, равная и противоположная σ' [4].

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ II

Уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)+4\pi\rho=0,$$

$$K_2\frac{dV}{d\nu_2}+K_1\frac{dV}{d\nu_1}+4\pi\sigma=0$$

выражают условие, что смещение через любую замкнутую поверхность отличается множителем 4π от количества электричества внутри нее. Первое уравнение получается сразу при применении этого принципа к параллелепипеду, грани которого перпендикулярны координатным осям, а второе — применением к цилиндру, охватывающему элемент заряженной поверхности.

Предваряя результаты следующей главы, мы можем вывести эти уравнения непосредственно из фарадеевского определения удельной индуктивной способности. Рассмотрим случай конденсатора, состоящего из двух бесконечных параллельных пластин. Пусть V_1 и V_2 — потенциалы этих пластин, d — расстояние между ними, а E — заряд на площади A одной из пластин. Тогда, если K — удельная индуктивная способность разделяющего их диэлектрика, то

$$E=KA\frac{V_1-V_2}{4\pi d}.$$

Энергия системы Q, согласно п. 84, равна

$$\frac{1}{2}E(V_1-V_2)=\frac{1}{2}KA\frac{(V_1-V_2)^2}{4\pi d},$$

или, если обозначить через F электродвижущую напряженность в произвольной точке между пластинами, $Q=(1/8\pi)KAdF^2$. Если мы считаем энергию сосредоточенной в диэлектрике, то на единицу объема придется энергия Q/Ad, так что количество энергии в единице объема равно $KF^2/8\pi$. Этот результат остается справедливым и для неоднородного поля, так что энергия для произвольного электрического поля равна

$$Q=\frac{1}{8\pi}\iiint KF^2\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{8\pi}\iiint K\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz.$$

---

[4] См. Фарадей «Remarks on Static Induction», *Proceedings of the Royal Institution*, Feb. 12, 1858.

Предположим, что потенциал каждой точки поля увеличился на малую величину δV, где δV — произвольная функция от x, y, z, тогда вариация энергии δQ будет даваться уравнением

$$\delta Q=\frac{1}{4\pi}\iiint\left(K\left\{\frac{dV}{dx}\frac{d\,\delta V}{dx}+\frac{dV}{dy}\frac{d\,\delta V}{dy}+\frac{dV}{dz}\frac{d\,\delta V}{dz}\right\}\right)dx\,dy\,dz,$$

или, согласно теореме Грина,

$$\delta Q=-\frac{1}{4\pi}\iint\left(K_1\frac{dV}{d\nu_1}+K_2\frac{dV}{d\nu_2}\right)\delta V\,dS-\frac{1}{4\pi}\iiint\left\{\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)\right\}\delta V\,dx\,dy\,dz,$$

где $d\nu_1$ и $d\nu_2$ — элементы нормалей к поверхности в сторону первой и второй среды соответственно.

Но согласно п. 85, 86

$$\delta Q=\sum(e\delta V)=\iint\sigma\delta V\,dS+\iiint\rho\delta V\,dx\,dy\,dz,$$

и поскольку δV произвольно, то

$$-\frac{1}{4\pi}\left(K_1\frac{dV}{d\nu_1}+K_2\frac{dV}{d\nu_2}\right)=\sigma,$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)\right\}=\rho,$$

что и совпадает с уравнениями в тексте.

В опытах Фарадея пламя можно рассматривать как проводник, связанный с землей. Влияние диэлектрика выражается в появлении кажущейся электризации на его поверхности. Эта кажущаяся электризация, воздействуя на проводящее пламя, притягивает к себе электричество противоположного знака, распределяющееся по поверхности диэлектрика, тогда как электричество того же знака отталкивается через пламя на землю. Таким образом, на поверхности диэлектрика появляется действительная электризация, компенсирующая влияние кажущейся электризации. При устранении индуцирующей силы кажущаяся электризация исчезает, а действительная электризация остается и уже не компенсируется кажущейся.

ГЛАВА III

О РАБОТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛ И ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПРОВОДНИКОВ

84. *О Работе, которую должен совершить внешний агент, чтобы зарядить систему заданным образом.*

Работа, затрачиваемая при перенесении количества электричества δe с бесконечного расстояния (или из любой точки, где потенциал равен нулю) в данную часть системы с потенциалом V, равна, по определению (п. 70), $V\delta e$.

В результате такой операции заряд в данной части системы возрастает на δe, так что если до этого он был равен e, его значение становится равным $e+\delta e$.

Следовательно, работа, совершаемая при заданном изменении зарядов системы, выражается интегралом

$$W = \Sigma\left(\int V\delta e\right), \tag{1}$$

где суммирование производится по всем частям заряженной системы.

Из выражения для потенциала, приведенного в п. 73, видно, что потенциал в данной точке может рассматриваться как сумма нескольких слагаемых, каждое из которых представляет собой потенциал соответствующей части заряда системы.

Таким образом, если V — потенциал в данной точке, обусловленный некоторой системой зарядов, которую мы обозначим $\Sigma\,(e)$, а V' — потенциал в той же точке, обусловленный другой системой зарядов, обозначаемой через $\Sigma\,(e')$, то потенциал в этой точке, обусловленный одновременным наличием обеих систем зарядов, будет $V+V'$.

Следовательно, если каждый заряд системы увеличивается в отношении n к 1, то и потенциал в любой точке системы также изменяется в отношении n к 1.

Поэтому предположим, что внесение заряда в систему происходит следующим образом. Пусть сначала система не заряжена и находится под нулевым потенциалом и пусть все части системы заряжаются одновременно со скоростью, пропорциональной их окончательному заряду.

Так, если e — окончательное значение заряда, а V — окончательное значение потенциала какой-либо части системы, то если на некотором этапе этого процесса заряд равен ne, то и потенциал равен nV, и мы можем описать весь процесс зарядки как непрерывное увеличение n от 0 до 1.

Когда n меняется от n до $n+\delta n$, каждая часть системы, окончательный заряд которой равен e, а окончательный потенциал V, увеличивает свой заряд на $e\delta n$, а поскольку ее потенциал равен nV, то совершаемая над ней работа равна $eVn\delta n$.

Отсюда полная работа, совершаемая при зарядке системы, равна

$$\sum(eV)\int_0^1 n\,dn = \frac{1}{2}\sum(eV), \tag{2}$$

т. е. полусумме произведений зарядов различных частей системы на соответствующие им потенциалы.

Такова работа, затрачиваемая внешним источником при зарядке системы описанным нами способом, но поскольку система консервативная, то работа, затрачиваемая на приведение системы в это же состояние любым другим способом, будет той же.

Поэтому мы называем величину

$$W = \frac{1}{2}\sum(eV) \tag{3}$$

электрической энергией системы, выраженной через заряды различных частей системы и их потенциалы.

85 а. Предположим теперь, что система переходит из состояния (e, V) в состояние (e', V') таким образом, что различные заряды одновременно изменяются со скоростями, пропорциональными их полному приращению $e'-e$.

Если в какой-либо момент заряд определенной части системы равен $e+n\ (e'-e)$, то ее потенциал равен $V+n\ (V'-V)$, а работа, совершенная при изменении заряда этой части системы, равна

$$\int_0^1 (e'-e)\left[V+n(V'-V)\right]dn=\frac{1}{2}(e'-e)(V'+V),$$

так что если W' — энергия системы в состоянии (e', V'), то

$$W'-W=\frac{1}{2}\sum(e'-e)(V'+V). \qquad (4)$$

$$\text{Но}\ \ W=\frac{1}{2}\sum(eV)\quad \text{и}\quad W'=\frac{1}{2}\sum(e'V').$$

Подставляя эти значения в (4), получим

$$\Sigma\ (eV')=\Sigma\ (e'V). \qquad (5)$$

Таким образом, если рассмотреть два различных состояния электризации одной и той же заданной системы заряженных проводников, то сумма произведений зарядов в первом состоянии на значения потенциалов соответствующих проводников во втором состоянии равна сумме произведений зарядов во втором состоянии на потенциалы соответствующих проводников в первом состоянии.

Это соотношение из элементарной теории электричества соответствует Теореме Грина из аналитической теории. Выбрав надлежащим образом начальное и конечное состояние системы, можно получить целый ряд полезных результатов.

85 б. Из (4) и (5) можно прийти к другому выражению для превращения энергии, где оно выражается через приращение потенциала:

$$W'-W=\frac{1}{2}\sum(e'+e)(V'-V). \qquad (6)$$

Для бесконечно малых приращений (4) и (6) запишутся в виде

$$dW=\Sigma\ (V\delta e)=\Sigma\ (e\delta V). \qquad (7)$$

Если обозначить через W_e и W_V выражения для W соответственно через заряды и через потенциалы системы, а через A_r, e_r и V_r — один из проводников системы, его заряд и его потенциал, то

$$V_r=(dW_e/de_r), \qquad (8)$$

$$e_r=(dW_V/dV_r). \qquad (9)$$

86. Пусть в произвольно заданной системе проводников какой-либо из них, который мы обозначим через A_t, не имеет заряда ни в начальном, ни в конечном состоянии, тогда для этого проводника $e_t=0$ и $e'_t=0$, так что члены, соответствующие проводнику A_t, отсутствуют в обеих частях равенства (5).

Если какой-либо другой проводник, скажем A_u, имеет нулевой потенциал в обоих состояниях системы, то $V_u=0$ и $V'_u=0$, так что соответствующие проводнику A_u члены отсутствуют в обеих частях равенства (6).

Предположим теперь, что все проводники, за исключением двух, скажем A_r и A_s, либо изолированы и не заряжены, либо заземлены, тогда уравнение (5) примет вид

$$e_r V'_r + e_s V'_s = e'_r V_r + e'_s V_s. \tag{10}$$

Пусть в начальном состоянии $e_r=1$ и $e_s=0$, а в конечном $e'_r=0$ и $e'_s=1$, тогда уравнение (10) примет вид

$$V'_r = V_s, \tag{11}$$

т. е. если единичный заряд, сообщенный проводнику A_r, повышает потенциал изолированного проводника A_s до V, то единичный заряд, сообщенный проводнику A_s, повышает потенциал изолированного проводника A_r до того же значения V при условии, что все остальные проводники системы либо изолированы и не заряжены, либо заземлены, так что их потенциал равен нулю.

Здесь мы впервые встречаемся в области электричества с соотношением взаимности. Такие соотношения взаимности встречаются во всех областях знания и помогают нам часто находить решения новых задач по известным решениям более простых задач.

Так, из того факта, что в точке вне проводящей сферы с единичным зарядом потенциал равен r^{-1}, где r — расстояние от центра сферы, мы заключаем, что малое тело с единичным зарядом, помещенное на расстоянии r от центра проводящей незаряженной сферы, подымает ее потенциал до значения r^{-1}.

Предположим теперь, что в начальном состоянии $V_r=1$ и $V_s=0$, а в конечном $V'_r=0$ и $V'_s=1$, тогда уравнение (10) примет вид

$$e_s = e'_r, \tag{12}$$

т. е. если при повышении потенциала A_r до 1 на заземленном проводнике A_s индуцируется заряд e, то при повышении потенциала A_s до 1 на заземленном проводнике A_r индуцируется такой же заряд e.

Наконец, сделаем третье предположение, что в начальном состоянии $V_r=1$, а $e_s=0$, а в конечном $V'_r=0$, а $e'_s=1$; уравнение (10) принимает на этот раз вид

$$e'_r + V_s = 0. \tag{13}$$

Таким образом, если при незаряженном проводнике A_s повышение потенциала A_r до 1 приводит к повышению потенциала A_s до V, то при заземленном проводнике A_r единичный заряд, сообщенный A_s, индуцирует на проводнике A_r отрицательный заряд, численно равный V.

Во всех этих случаях часть остальных проводников может быть изолирована и не заряжена, остальные должны быть заземлены.

Третий рассмотренный случай является элементарной формой одной из теорем Грина. В качестве примера его применения предположим, что мы установили распределение электрического заряда на различных частях проводящей системы, находящейся под нулевым потенциалом, индуцированное единичным зарядом, сообщенным определенному телу системы A_s.

Пусть η_r — заряд тела A_r при этих условиях. Тогда, если предположить, что на A_s заряда нет, а остальным телам сообщены различные потенциалы, то потенциал тела A_s будет

$$V_s = -\Sigma\,(\eta_r V_r). \tag{14}$$

Таким образом, если мы установили поверхностную плотность в любой точке полого проводящего сосуда, находящегося под нулевым потенциалом, обусловленную единичным зарядом, находящимся в заданной точке внутри сосуда, то, зная значение потенциала в каждой точке поверхности этого же размера и формы, что и внутренняя поверхность проводника, мы можем найти потенциал в точке внутри этой поверхности, где находился единичный заряд.

Следовательно, если потенциал известен во всех точках замкнутой поверхности, то его можно определить и в любой точке внутри, если внутри поверхности нет заряженных тел, и во всех точках снаружи, если снаружи нет заряженных тел.

Теория системы проводников

87. Пусть A_1, A_2, . . ., A_n — n проводников произвольной формы, e_1, e_2, ..., e_n — их заряды, а V_1, V_2, . . ., V_n — их потенциалы. Пусть диэлектрическая среда, разделяющая проводники, остается неизменной и не заряжается при рассматриваемых ниже операциях.

В п. 84 было показано, что потенциал каждого проводника является однородной линейной функцией от n зарядов проводников. Следовательно, электрическая энергия системы, являющаяся полусуммой произведений потенциала каждого проводника на его заряд, должна быть однородной квадратичной функцией от n зарядов типа

$$W_e = (1/2)\,p_{11}e_1^2 + p_{12}e_1e_2 + (1/2)\,p_{22}e_2^2 + p_{13}e_1e_3 + p_{23}e_2e_3 + (1/2)\,p_{33}e_3^2 + \ldots . \tag{15}$$

Индекс e указывает, что W представлено как функция зарядов. W без индекса будет означать выражение (3), в которое входят и заряды и потенциалы.

Из выражения (15) можно найти потенциал любого проводника. Потенциал определяется как работа, необходимая для переноса единичного заряда из области нулевого потенциала в точку с данным потенциалом, а поскольку эта работа идет на увеличение W, то достаточно продифференцировать W_e по заряду определенного проводника, чтобы найти его потенциал. Таким образом, получим систему n линейных уравнений

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}e_1 + \ldots + p_{r1}e_r + \ldots + p_{n1}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_s &= p_{1s}e_1 + \ldots + p_{rs}e_r + \ldots + p_{ns}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n &= p_{1n}e_1 + \ldots + p_{rn}e_r + \ldots + p_{nn}e_n, \end{aligned} \tag{16}$$

выражающих n потенциалов через n зарядов.

Коэффициенты p_{rs} называются коэффициентами потенциала. Каждый коэффициент имеет два индекса, первый из которых указывает на заряд, а второй — на потенциал.

Коэффициент p_{rr} с одинаковыми индексами показывает величину потенциала проводника A_r при единичном заряде на нем и при нулевых зарядах на всех остальных проводниках. Существует n таких коэффициентов по числу проводников.

Коэффициент p_{rs} с разными индексами показывает величину потенциала на проводнике A_s при единичном заряде на проводнике A_r и при нулевых зарядах всех остальных проводников, кроме A_r.

Мы уже показали в п. 86, что $p_{rs}=p_{sr}$. Мы можем доказать это сейчас короче, рассмотрев цепочку равенств

$$p_{rs}=\frac{dV_s}{de_r}=\frac{d}{de_r}\frac{dW_e}{de_s}=\frac{d}{de_s}\frac{dW_e}{de_r}=\frac{dV_r}{de_s}=p_{sr}. \tag{17}$$

Число *различных* коэффициентов с двумя отличающимися индексами равно, следовательно, $n(n-1)/2$, по одному для каждой пары проводников.

Решая уравнения (16) относительно e_1, e_2 и т. д., мы получим n уравнений, выражающих заряды через потенциалы

$$\begin{aligned} e_1 &= q_{11}V_1+\ldots+q_{1s}V_s+\ldots+q_{1n}V_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e_r &= q_{r1}V_1+\ldots+q_{rs}V_s+\ldots+q_{rn}V_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e_n &= q_{n1}V_1+\ldots+q_{ns}V_s+\ldots+q_{nn}V_n. \end{aligned} \tag{18}$$

В этом случае также $q_{rs}=q_{sr}$, так как

$$q_{rs}=\frac{de_r}{dV_s}=\frac{d}{dV_s}\frac{dW_V}{dV_r}=\frac{d}{dV_r}\frac{dW_V}{dV_s}=\frac{de_s}{dV_r}=q_{sr}. \tag{19}$$

Подставляя значения зарядов в выражение для электрической энергии

$$W=[e_1V_1+\ldots+e_rV_r+\ldots+e_nV_n]/2, \tag{20}$$

мы получим выражение для энергии через потенциалы

$$W_V=\frac{1}{2}q_{11}V_1^2+q_{12}V_1V_2+\frac{1}{2}q_{22}V_2^2+q_{13}V_1V_3+q_{23}V_2V_3+\frac{1}{2}q_{33}V_3^2+\ldots. \tag{21}$$

Коэффициент с одинаковыми индексами называется Электрической Емкостью того проводника, к которому он относится.

Определение. Емкость проводника — это его заряд при единичном потенциале этого проводника и при нулевом потенциале остальных проводников.

Это подходящее определение для емкости проводника, если не делается никаких дополнительных уточнений. Но иногда оказывается удобным задавать другие условия на некоторых или на всех прочих проводниках, например, считать часть из них незаряженными. Мы можем тогда определить емкость проводника при этих условиях как его заряд при единичном потенциале.

Прочие коэффициенты называются коэффициентами индукции. Каждый из этих коэффициентов q_{rs} показывает величину заряда, появляющегося на A_r при единичном потенциале проводника A_s и нулевых потенциалах всех остальных проводников, кроме A_s.

Математический расчет коэффициентов потенциала и коэффициентов емкости в общем случае весьма труден. Ниже мы покажем, что эти коэффициенты имеют всегда вполне определенное значение, а в некоторых частных случаях рассчитаем их. Мы покажем также, как их можно определить на опыте.

Если идет речь о емкости проводника без указания формы и положения остальных проводников системы, то подразумевается его емкость при условии, что никаких других проводников или заряженных тел нет на конечном расстоянии от рассматриваемого проводника.

Если иметь дело только с емкостями и коэффициентами индукции, то иногда оказывается удобным записывать их в виде $[A.P]$. Этот символ означает заряд на проводнике A при единичном потенциале проводника P (и при нулевом потенциале остальных проводников).

Аналогично $[(A+B).\ (P+Q)]$ будет означать заряд на $A+B$ при единичных потенциалах на P и Q. Легко видеть, что, поскольку

$$[(A+B).\ (P+Q)]=[A.P]+[A.Q]+[B.P]+[B.Q]=[(P+Q).\ (A+B)],$$

эти составные символы ведут себя по отношению к сложению и умножению как обычные числа.

Символ $[A.A]$ означает заряд на проводнике A при единичном потенциале A, т. е. емкость проводника A.

Аналогично $[(A+B).\ (A+Q)]$ означает сумму зарядов на проводниках A и B при единичном потенциале на A и на Q и при нулевом потенциале остальных проводников, кроме A и Q. Эту величину можно разложить на сумму $[A.A]+$ $+[A.B]+[A.Q]+[B.Q]$.

Коэффициенты потенциала не могут быть рассмотрены таким же способом. Коэффициенты индукции представляют собой заряды, и эти заряды можно складывать, а коэффициенты потенциала представляют собой потенциалы. Если потенциал проводника A равен V_1, а потенциал проводника B равен V_2, то сумма V_1+V_2 не описывает какое-либо физическое явление, хотя разность V_1-V_2 является электродвижущей силой от A к B.

Коэффициенты индукции между двумя проводниками можно выразить через емкости этих проводников и через совместную емкость обоих проводников: $[A.B]=$ $=[(A+B).\ (A+B)]/2-[A.A]/2-[B.B]/2$.

Размерность коэффициентов

88. Поскольку потенциал заряда e на расстоянии r равен e/r, то размерность электрического заряда равна произведению размерностей потенциала и длины.

Поэтому коэффициенты емкости и индукции имеют ту же размерность, что и длина, так что каждый из них может быть представлен отрезком прямой, длина которого не зависит от принятой системы единиц.

По тем же соображениям коэффициенты потенциала имеют размерность, обратную размерности длины.

О некоторых условиях, которым должны удовлетворять коэффициенты

89 а. Прежде всего, поскольку электрическая энергия системы является существенно положительной величиной, то выражающая ее квадратичная форма

от зарядов или от потенциалов должна быть положительной при любых положительных или отрицательных значениях зарядов или потенциалов.

Существует n условий того, что однородная квадратичная функция n переменных всегда положительна; их можно записать в виде

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11}, & p_{12} \\ p_{21}, & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots \begin{vmatrix} p_{11} & \ldots, & p_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ p_{n1}, & \ldots, & p_{nn} \end{vmatrix} > 0. \qquad (22)$$

Эти n условий необходимы и достаточны для того, чтобы квадратичная форма W_e была существенно положительной [1]. Но поскольку в выражении (16) проводники могут быть расположены в произвольном порядке, то положительным должен быть любой детерминант, образованный симметрично из коэффициентов, относящихся к любому сочетанию из n проводников, причем число таких сочетаний равно $2^n—1$. Однако из всех этих условий лишь n оказываются независимыми.

Коэффициенты емкости и индукции удовлетворяют таким же условиям.

89 б. *Все коэффициенты потенциала положительны, причем ни один из коэффициентов p_{rs} не превосходит p_{rr} или p_{ss}.*

Пусть проводнику A_r сообщен единичный заряд, а все остальные проводники не заряжены. При этом образуется некоторая система эквипотенциальных поверхностей. Одна из них совпадает с поверхностью проводника A_r; потенциал на ней равен p_{rr}. Если проводник A_s расположен в полости внутри проводника A_r, т. е. полностью окружен им, то потенциал A_s тоже равен p_{rr}.

Если же проводник A_s находится вне A_r, то его потенциал p_{rs} будет заключаться между p_{rr} и нулем.

Действительно, рассмотрим силовые линии, выходящие из заряженного проводника A_r. Заряд проводника измеряется превышением числа выходящих из проводника линий над числом заканчивающихся на нем. Поэтому для незаряженного проводника число входящих в проводник линий должно равняться числу выходящих из него. Линии, входящие в проводник, приходят из области с большим потенциалом, а выходящие линии уходят в области с меньшим потенциалом. Поэтому потенциал незаряженного проводника должен быть промежуточным между наибольшим и наименьшим потенциалом в поле, и, следовательно наибольший и наименьший потенциал не может достигаться на незаряженном теле.

Таким образом, наибольшим потенциалом должен быть потенциал p_{rr} заряженного тела A_r, а наименьшим — потенциал на бесконечном расстоянии, равный нулю; потенциалы всех остальных проводников p_{rs} должны лежать между p_{rr} и нулем.

Если A_s полностью охватывает A_t, то $p_{rs}=p_{rt}$.

89 в. *Ни один из коэффициентов индукции не может быть положительным и сумма всех коэффициентов индукции, относящихся к определенному проводнику*

[1] См. Williamson, «*Differential Calculus*», 3rd edition, p. 407.

численно не превышает коэффициента емкости этого проводника, который всегда положителен.

Пусть A_r находится под единичным потенциалом, тогда как на всех остальных проводниках поддерживается нулевой потенциал. Тогда заряд на A_r будет равен q_{rr}, а на любом прочем проводнике A_s равен q_{rs}.

Число силовых линий, выходящих из A_r, равно q_{rr}. Часть из них кончается на других проводниках, часть может уходить в бесконечность, но ни одна силовая линия не может идти с одного из прочих проводников на другой или же в бесконечность, так как все они находятся под нулевым потенциалом.

Ни одна силовая линия не может выйти из такого проводника A_s, так как ни одна область поля не имеет потенциал ниже, чем на A_s. Если проводник A_s полностью отрезан от проводника A_r замкнутой поверхностью одного из проводников, то q_{rs} равно нулю. Если A_s не отрезано полностью, то q_{rs} отрицательно.

Если один из проводников A_t полностью окружает A_r, то все силовые линии, выходящие из A_r, попадают на A_t и на проводники, находящиеся внутри A_t, и сумма коэффициентов индукции этих проводников по отношению к A_r будет равна величине q_{rr} с обратным знаком. Если же A_r не полностью окружено проводником, то арифметическая сумма коэффициентов индукции q_{rs} будет меньше, чем q_{rr}.

Мы вывели эти две теоремы независимо, исходя из физических соображений. Предоставляем любителям математики установить, является ли одна из них следствием другой.

89 г. Если в поле имеется единственный проводник, то его собственный коэффициент потенциала равен обратной величине его емкости.

Центр распределения электричества в отсутствие внешних сил называется электрическим центром проводника. Если проводник симметричен относительно своего геометрического центра, то эта точка и является электрическим центром. Если размеры проводника малы по сравнению с рассматриваемыми расстояниями, то положение электрического центра можно определить достаточно точно на глаз.

Потенциал на расстоянии c от электрического центра имеет значение между $\frac{e}{c}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)$ и $\frac{e}{c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}\right)$, где e — заряд проводника, а a — наибольшее расстояние точек его поверхности от электрического центра.

Действительно, если предположить, что заряд сосредоточен в двух точках, находящихся на расстоянии a по обе стороны от электрического центра, то первое из приведенных выражений даст потенциал в точке, лежащей на прямой, соединяющей заряды, а второе — на перпендикулярной ей прямой. Для всех остальных распределений заряда внутри сферы радиуса a потенциал будет иметь значение, промежуточное между этими двумя.

Если в поле имеется два проводника, то их взаимный коэффициент потенциала равен $1/c'$, где c' отличается от расстояния c между их электрическими центрами не больше чем на $(a^2+b^2)/c$. Здесь a и b — наибольшие расстояния точек поверхностей обоих тел от их электрических центров.

89 д. Если в поле вносится новый проводник, то собственные коэффициенты потенциала всех остальных проводников уменьшаются.

Действительно, предположим сначала, что новое тело B — диэлектрик (с такой же удельной индуктивной способностью, как у воздуха) и не несет на себе

никаких зарядов. Тогда если одному из проводников A_1 сообщить заряд e_1, то на распределение электричества на проводниках тело B не повлияет, так как B остается всюду незаряженным, и электрическая энергия системы будет просто равна $(e_1V_1)/2=(e_1^2p_{11})/2$.

Пусть теперь B становится проводником. Заряд начнет по нему перетекать из областей с большим потенциалом в области с меньшим потенциалом, при этом электрическая энергия системы уменьшится, так что величина $(e_1^2p_{11})/2$ должна уменьшиться.

Поскольку e_1 остается постоянным, должно уменьшиться p_{11}.

Если к телу B будет добавлено другое тело b, находящееся в контакте с ним, то p_{11} еще больше уменьшится.

В самом деле, предположим сначала, что тела B и b не соединены. Внесение нового тела b уменьшит p_{11}. Пусть после этого тела B и b соединены. Если какой-либо заряд перейдет с одного тела на другое, то он пойдет от большего потенциала к меньшему, так что, как мы показали, p_{11} опять уменьшится.

Таким образом, уменьшение p_{11} проводящим телом B больше того, которое было бы при внесении любого проводника, поверхность которого вписывается в B, и меньше того, которое было бы при внесении любого проводника, поверхность которого охватывает B.

В главе XI мы покажем (п. 146), что сфера диаметром b на расстоянии r, большом по сравнению с b, уменьшает величину p_{11} приблизительно на $b^3/(8r^4)$.

Отсюда следует, что если тело B любой другой формы, и b — его наибольший поперечный размер, то уменьшение p_{11} должно быть меньше $b^3/(8r^4)$.

Поэтому если наибольший размер тела B настолько мал по сравнению с расстоянием от тела A_1, что величинами порядка $b^3/(8r^4)$ мы можем пренебречь, то в качестве достаточного приближения для p_{11} можно рассматривать обратную величину емкости уединенного тела A_1.

90 а. Пусть емкость уединенного проводника A_1 равна K_1, емкость уединенного проводника A_2 равна K_2, и пусть среднее расстояние между этими проводниками равно r, причем r очень велико по сравнению с наибольшими поперечными размерами A_1 и A_2. Тогда $p_{11}=(1/K_1)$, $p_{12}=(1/r)$, $p_{22}=(1/K_2)$, $V_1=e_1K_1^{-1}+e_2r^{-1}$, $V_2=e_1r^{-1}+e_2K_2^{-1}$.

Отсюда $q_{11}=K_1(1-K_1K_2r^{-2})^{-1}$, $q_{12}=-K_1K_2r^{-1}(1-K_1K_2r^{-2})^{-1}$, $q_{22}=K_2(1-K_1K_2r^{-2})^{-1}$.

Здесь q_{11} и q_{22} — емкости проводников A_1 и A_2, когда они уже не удалены по отдельности на бесконечное расстояние от всех тел, а помещены на расстоянии r друг от друга.

90 б. Если два проводника настолько близки друг к другу, что их коэффициент взаимной индукции велик, то такую комбинацию мы называем Конденсатором.

Пусть A и B — два проводника (электрода) конденсатора.

Пусть L — емкость A, N — емкость B, а M — коэффициент взаимной индукции (следует помнить, что M отрицательно, так что численные значения $L+M$ и $M+N$ меньше, чем L и N).

Пусть a и b — электроды другого конденсатора, находящегося на расстоянии R от первого, причем R много больше размеров каждого конденсатора, и пусть коэффициенты емкости и индукции уединенного конденсатора ab равны соот-

ветственно l, n, m. Рассчитаем влияние одного из конденсаторов на коэффициенты другого.

Положим

$$D=LN-M^2, \qquad d=\ln-m^2.$$

Тогда коэффициенты потенциала для каждого из конденсаторов в отдельности будут равны

$$\begin{aligned} p_{AA}&=D^{-1}N, & p_{aa}&=d^{-1}n, \\ p_{AB}&=-D^{-1}M, & p_{ab}&=-d^{-1}m, \\ p_{BB}&=D^{-1}L, & p_{bb}&=d^{-1}l. \end{aligned}$$

Значения этих коэффициентов существенно не изменятся от присутствия другого конденсатора на расстоянии R.

Коэффициент потенциала для любых двух проводников, находящихся на расстоянии R, равен R^{-1}, так что $p_{Aa}=p_{Ab}=p_{Ba}=p_{Bb}=R^{-1}$.

Таким образом, уравнения для потенциала имеют вид

$$\begin{aligned} V_A&=D^{-1}Ne_A-D^{-1}Me_B+R^{-1}e_a+R^{-1}e_b, \\ V_B&=-D^{-1}Me_A+D^{-1}Le_B+R^{-1}e_a+R^{-1}e_b, \\ V_a&=R^{-1}e_A+R^{-1}e_B+d^{-1}ne_a-d^{-1}me_b, \\ V_b&=R^{-1}e_A+R^{-1}e_B-d^{-1}me_a+d^{-1}le_b. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно зарядов, получим

$$\begin{aligned} q_{AA}&=L'=L+\frac{(L+M)^2(l+2m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)}, \\ q_{AB}&=M'=M+\frac{(L+M)(M+N)(l+2m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)}, \\ q_{Aa}&=-\frac{R(L+M)(l+m)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)}, \\ q_{Ab}&=-\frac{R(L+M)(m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)}, \end{aligned}$$

где L', M', N' — значения L, M, N при внесении второго конденсатора в поле.

Если в поле вносится лишь один проводник a, то $m=n=0$ и

$$\begin{aligned} q_{AA}&=L'=L+\frac{(L+M)^2 l}{R^2-l(L+2M+N)}, \\ q_{AB}&=M'=M+\frac{(L+M)(M+N)l}{R^2-l(L+2M+N)}, \\ q_{Aa}&=-\frac{Rl(L+M)}{R^2-l(L+2M+N)}. \end{aligned}$$

Если имеется просто два проводника A и a, то $M=N=m=n=0$, и

$$q_{AA}=L+\frac{L^2l}{R^2-Ll}, \qquad q_{Aa}=-\frac{RLl}{R^2-Ll},$$

что согласуется с выражениями, найденными в п. 90 а.

Величина $L+2M+N$ дает полный заряд конденсатора при единичном потенциале на электродах. Она не может превосходить половины наибольшего размера конденсатора.

$L+M$ — заряд первого электрода, а $M+N$ — заряд второго при единичном потенциале на обоих электродах. Обе эти величины должны быть положительны и меньше емкости самого электрода. Поэтому поправки в коэффициентах емкости конденсатора значительно меньше, чем для простого проводника той же емкости.

Приближения такого рода часто полезны при оценке емкости проводников неправильной формы, находящихся на значительном расстоянии от остальных проводников.

91. Если в поле вносится округлый проводник A_3, размеры которого малы по сравнению с расстоянием между проводниками, то коэффициент потенциала A_1 относительно A_2 увеличивается, если A_3 находится внутри сферы, построенной на прямой A_1A_2 как на диаметре, и уменьшается, если A_3 вне этой сферы.

Действительно, единичный положительный заряд на A_1 создает распределение электричества на A_3, при котором $+e$ находится на стороне, наиболее удаленной от A_1, а $-e$ — на стороне, ближайшей к A_1. Потенциал на A_2, создаваемый этим распределением электричества на A_3, будет положительным или отрицательным в зависимости от того, какой из зарядов, $+e$ или $-e$, ближе к A_2, и если тело A_3 не очень вытянуто, то это зависит от того, будет ли угол $A_1A_3A_2$ тупым или острым, т. е. находится ли точка A_3 внутри или вне сферы, построенной на A_1A_2 как на диаметре.

Для продолговатого тела A_3 легко видеть, что если его наибольшая ось расположена по касательной к окружности, проходящей через точки A_1, A_3 и A_2, то оно может повысить потенциал A_2, даже находясь полностью вне сферы, и, наоборот, если его наибольшая ось направлена по радиусу этой окружности, то оно может уменьшить потенциал A_2, даже находясь полностью внутри сферы. Эти соображения служат лишь для грубой оценки ожидаемых явлений при заданной конфигурации прибора.

92. Если в поле вносится новый проводник A_3, то емкости всех имевшихся ранее в поле проводников увеличиваются, а численные значения коэффициентов индукции любой пары проводников уменьшаются.

Действительно, допустим, что A_1 находится под единичным потенциалом, а все остальные проводники — под нулевым. Поскольку заряд вновь внесенного проводника будет отрицательным, он индуцирует на всех остальных проводниках положительный заряд, тем самым увеличивая положительный заряд A_1 и уменьшая отрицательные заряды всех остальных проводников.

93 а. *Работа, совершаемая электрическими силами при перемещении системы изолированных заряженных проводников.*

Поскольку проводники изолированы, то их заряды остаются при перемещении постоянными. Пусть их потенциалы равны $V_1, V_2, \ldots, V_n$ до перемещения и $V'_1, V'_2, \ldots, V'_n$ — после. Тогда электрическая энергия равна $W = (1/2)\Sigma\ (eV)$ до перемещения и $W' = (1/2)\Sigma\ (eV')$ — после.

Работа, совершаемая при перемещении электрическими силами, равна разности начальной энергии W и конечной энергии W', т. е. $W - W' = (1/2)\Sigma[e(V-V')]$.

Это выражение дает значение работы при любом перемещении системы изолированных проводников, большом или малом.

Чтобы найти силу, стремящуюся произвести какой-либо частный вид перемещения, обозначим через φ переменную, изменение которой соответствует этому виду перемещения, а через Φ — соответствующую силу, которую мы считаем положительной, если электрическая сила стремится увеличить φ. Тогда $\Phi d\varphi = -dW_e$, т. е. $\Phi = -(dW_e/d\varphi)$, где W_e — электрическая энергия, выраженная как квадратичная функция от зарядов.

93 б. Докажем, что $(dW_e/d\varphi) + (dW_V/d\varphi) = 0$.

У нас есть три различных выражения для энергии системы.

Во-первых, $W = (1/2)\Sigma(eV)$. Это определенная функция от n зарядов и n потенциалов.

Во-вторых, $W_e = (1/2)\Sigma\Sigma\,(e_r e_s p_{rs})$, где r и s могут быть и одинаковыми и разными, причем в сумму включается как rs, так и sr. Это функция от n зарядов и от переменных, определяющих их расположение. Пусть φ одна из этих переменных.

И, в-третьих, $W_V = (1/2)\Sigma\Sigma\,(V_r V_s q_{rs})$, где суммирование производится как и выше. Это функция от n потенциалов и от переменных, определяющих конфигурацию, одной из которых является φ.

Поскольку $W = W_e = W_V$, то $W_e + W_V - 2W = 0$.

Представим себе, что n зарядов, n потенциалов и φ как-то меняются согласованным образом. Тогда

$$\sum\left[\left(\frac{dW_e}{de_r} - V_r\right)\delta e_r\right] + \sum\left[\left(\frac{dW_V}{dV_s} - e_s\right)\delta V_s\right] + \left(\frac{dW_e}{d\varphi} + \frac{dW_V}{d\varphi}\right)\delta\varphi = 0.$$

Однако n зарядов, n потенциалов и φ не являются независимыми, так как лишь $n+1$ из этих величин независимы. Но мы уже доказали, что $(dW_e/de_r) = V_r$, так что первая сумма тождественно обращается в нуль. Отсюда следует, что $(dW_V/dV_s) = e_s$ (даже если бы мы это уже не доказали раньше) и, наконец, что $(dW_e/d\varphi) + (dW_V/d\varphi) = 0$.

Работа, совершаемая электрическими силами при перемещении системы проводников, потенциалы которых поддерживаются постоянными

93 в. Из последнего уравнения следует, что сила равна $\Phi = (dW_V/d\varphi)$, так что если система перемещается при условии, что все потенциалы остаются постоянными, то работа, совершаемая электрическими силами, равна

$$\int \Phi\, d\varphi = \int dW_V = W_V' - W_V,$$

т. е. равна в этом случае *приращению* электрической энергии.

Таким образом, мы имеем здесь увеличение энергии при одновременном совершении системой работы. Следовательно, в систему должна подводиться энергия от какого-либо внешнего источника, например от вольтовой батареи, обеспечивающей постоянство потенциалов при перемещении.

Совершаемая батареей работа равна, следовательно, сумме совершаемой системой работы и приращения энергии, а поскольку они равны, то работа, совершаемая батареей, равна удвоенной работе, совершаемой системой проводников при перемещении.

О сравнении подобных заряженных систем

94. Если две заряженные системы геометрически подобны, так что соответствующие длины в этих системах относятся как L к L', и если диэлектрик, разделяющий проводники в обеих системах, один и тот же, то коэффициенты индукции и емкости этих систем относятся как L к L'. Действительно, если рассмотреть соответствующие части A и A' этих систем и предположить, что количество электричества на A равно e, а на A' равно e', то создаваемые этими зарядами потенциалы V и V' в соответствующих точках B и B' будут равны $V=(e/AB)$, $V'=(e'/A'B')$. Но AB относится к $A'B'$ как L к L', так что $e : e'=LV : L'V'$.

В случае же, когда индуктивные способности диэлектриков в этих системах различны и равны K для первой и K' для второй, если потенциалы в соответствующих точках первой и второй систем относятся как V к V', а заряды в соответствующих частях систем — как e к e', то $e : e'=LVK : L'V'K'$. По этой пропорции мы можем находить отношение полных зарядов соответствующих частей двух систем, которые, во-первых, геометрически подобны, во-вторых, содержат среды, удельные индуктивные способности которых относятся друг к другу в соответствующих точках как K и K', и, в-третьих, заряжены так, что их потенциалы в соответствующих точках относятся как V к V'.

Отсюда следует, что если q — какой-либо коэффициент емкости или индукции первой системы, а q' — соответствующий коэффициент второй системы, то $q : q'=LK : L'K'$, а если p и p' — соответствующие коэффициенты потенциала в обеих системах, то $p : p'=(1/LK) : (1/L'K')$.

Если одно из тел смещено в первой системе, а соответствующее ему тело смещено подобным образом во второй системе, то эти смещения относятся как L к L'; если действующие на тела силы обозначить через F и F', то работы, совершенные в обеих системах, относятся как FL к $F'L'$.

Но полная электрическая энергия равна полусумме произведений зарядов на потенциалы заряженных тел, так что, обозначая через W и W' полную электрическую энергию двух подобных систем, получим $W : W'=eV : e'V'$, и разности энергий, получающихся при подобных перемещениях в обеих системах, будут находиться в том же отношении. Поскольку FL пропорционально работе электрической силы на перемещении, то $FL : F'L'=eV : e'V'$.

Комбинируя эти пропорции, мы найдем, что отношение силы, действующей на какое-либо тело в одной системе к силе, действующей на соответствующее тело во второй системе, равно

$$F : F'=V^2K : V'^2K',$$

или

$$F:F'=\frac{e^2}{L^2K}:\frac{e'^2}{L'^2K'}.$$

Первая пропорция показывает, что в подобных системах сила пропорциональна квадрату электродвижущей силы и индуктивной способности среды и не зависит от фактических размеров системы.

Следовательно, два проводника, помещенные в жидкость с индуктивной способностью больше, чем у воздуха, и заряженные до определенного потенциала,

будут притягиваться сильнее, чем они притягивались бы в воздухе при тех же потенциалах.

Вторая пропорция показывает, что если количество электричества на каждом теле задано, то силы пропорциональны квадратам зарядов и обратно пропорциональны квадратам расстояний, а также обратно пропорциональны индуктивным способностям сред. Следовательно, два проводника с заданными зарядами, помещенные в жидкость с индуктивной способностью большей, чем у воздуха, будут притягиваться слабее, чем они притягивались бы в воздухе при тех же зарядах.

ГЛАВА IV

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

95 а. Во второй главе мы рассчитали потенциальную функцию и исследовали некоторые ее свойства, исходя из предположения, что существует непосредственное действие на расстоянии между заряженными телами, являющееся равнодействующей непосредственного воздействия различных заряженных элементов этих тел друг на друга.

Если этот метод исследования назвать прямым, то обратный ему метод будет заключаться в принятии предположения, что потенциал — это функция, обладающая теми свойствами, которые мы вывели выше, и в исследовании вида этой функции.

В прямом методе потенциал вычисляется по распределению заряда с помощью интегрирования, причем оказывается, что он удовлетворяет определенным уравнениям в частных производных. В обратном методе эти уравнения в частных производных считаются заданными, а ищется потенциал и распределение электричества.

Прямой метод применим лишь в тех случаях, когда задано распределение электричества. Если распределение заряда по проводнику подлежит определению, то следует применять обратный метод.

Мы должны показать, что обратный метод приводит во всех случаях ко вполне определенному результату, и установить некоторые общие теоремы, вытекающие из уравнения в частных производных Пуассона

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho=0.$$

Выражаемые этим уравнением математические идеи отличны по своему характеру от идей, выражаемых интегральным соотношением

$$V=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho}{r}\,dx'\,dy'\,dz'.$$

В дифференциальном уравнении мы выражаем тот факт, что сумма вторых производных от V в окрестности любой точки связана определенным образом с плотностью заряда в этой точке, и никак не связываем значение V в данной

точке со значениями ρ в различных точках, находящихся на конечном расстоянии от данной.

Наоборот, в определенном интеграле обозначенное через r расстояние между точкой (x', y', z'), в которой находится заряд, и точкой (x, y, z), в которой нас интересует потенциал, явно входит в подынтегральное выражение.

Таким образом, интеграл является подходящим математическим выражением для теории взаимодействия частиц на расстоянии, в то время как дифференциальное уравнение подходит для теории взаимодействия смежных элементов среды.

Мы видели, что результат интегрирования удовлетворяет дифференциальному уравнению. Теперь нужно показать, что это единственное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее определенным условиям.

Тем самым мы не только установим математическую эквивалентность обоих выражений, но и подготовимся к переходу от теории прямого действия на расстоянии к теории взаимодействия смежных элементов среды.

95 б. Рассматриваемые в этой главе теоремы относятся к свойствам некоторых объемных интегралов, взятых по конечной области пространства, которую мы будем называть электрическим полем.

Элементами этих интегралов, т. е. входящими в подынтегральное выражение величинами, являются либо квадрат некоторого вектора, величина и направление которого меняются от точки к точке, либо произведение одного вектора на проекцию другого вектора на его направление.

Из различных распределений векторной величины в пространстве два распределения представляют особый интерес.

Первое распределение — это такое, при котором вектор может быть представлен как пространственная вариация (см. п. 17) скалярной функции, называемой Потенциалом.

Такое распределение можно назвать невращательным, Безвихревым. Равнодействующая сила, возникающая из-за притяжения или отталкивания любой совокупности центров сил, при любом законе зависимости силы от расстояния имеет безвихревое распределение.

Второй тип распределения — такое распределение, при котором конвергенция (сходимость) (п. 25) равна нулю в каждой точке. Такое распределение можно назвать Соленоидальным. Скорость несжимаемой жидкости имеет соленоидальное распределение.

Если центральные силы, которые, как мы уже говорили, дают безвихревое распределение равнодействующей силы, меняются обратно пропорционально квадрату расстояния и если центры сил находятся вне поля, то распределение силы в поле будет как соленоидальным, так и безвихревым.

Если движение несжимаемой жидкости, которое, как мы уже отмечали, является соленоидальным, происходит под действием центральных сил, зависящих от расстояния, или под действием поверхностного давления на первоначально покоившуюся жидкость без трения, то распределение скоростей будет как безвихревым, так и соленоидальным.

Распределение, являющееся одновременно безвихревым и соленоидальным, мы будем называть Лапласовым распределением, поскольку Лаплас указал на ряд наиболее интересных свойств этого распределения.

Рассматриваемые в этой главе объемные интегралы представляют собой, как

мы увидим, выражения для энергии электрического поля. В первой группе теорем, начинающейся с теоремы Грина, энергия выражается через напряженность электрического поля, являющуюся безвихревым вектором во всех случаях равновесия электричества. Показывается, что при заданных потенциалах поверхностей из всех безвихревых распределений наименьшую энергию имеет распределение, являющееся также и соленоидальным. Отсюда следует, что возможно лишь одно лапласово распределение, согласующееся с потенциалами поверхностей.

Во второй группе теорем, включающей теорему Томсона, энергия выражается через электрическое смещение, являющееся соленоидальным вектором. Показывается, что при заданных зарядах поверхностей из всех соленоидальных распределений распределение, имеющее наименьшую энергию, является также и безвихревым. Отсюда также следует, что возможно лишь одно лапласово распределение, согласующееся с заданными зарядами поверхностей.

Доказательство всех этих теорем проводится однотипно. Во избежание повторений мы каждый раз при проведении поверхностного интегрирования в прямоугольной системе координат будем использовать теорему III из п. 21 [1], где дан подробный вывод соотношения между объемным интегралом и соответствующим поверхностным интегралом. Нам нужно будет лишь подставить вместо X, Y и Z в формулировке теоремы составляющие конкретного рассматриваемого вектора.

В первом издании этой книги утверждения каждой теоремы осложнялись множеством взаимно исключающих условий, имевших целью показать степень общности теоремы и многообразие случаев ее применения, однако это лишь приводило к смешению в умах читателей того, что предполагается, и того, что требуется доказать.

В настоящем издании каждая теорема сначала устанавливается в более определенной, подчас в более ограниченной, форме, а затем показывается возможность ее дальнейших обобщений.

До сих пор мы обозначали потенциал буквой V. Мы будем продолжать пользоваться этим обозначением и дальше в пределах электростатики. Однако в этой главе, а также в тех разделах второго тома, где электрический потенциал встречается в электромагнитных расчетах, мы будем использовать специальное обозначение Ψ для электрического потенциала.

Теорема Грина

96 а. Следующая важная теорема дана Джорджем Грином в его «Опыте применения математики к электричеству и магнетизму».

Теорема эта относится к пространству, ограниченному замкнутой поверхностью s. Мы будем называть это конечное пространство Полем. Пусть ν — нормаль, проведенная от поверхности в сторону поля, а l, m, n — направляющие косинусы этой нормали. Тогда выражение

$$l\frac{d\Psi}{dx}+m\frac{d\Psi}{dy}+n\frac{d\Psi}{dz}=\frac{d\Psi}{d\nu} \tag{1}$$

[1] Эта теорема была, по-видимому, впервые дана Остроградским в его работе, доложенной в 1828 г., но опубликованной лишь в 1831 г. в *Mem. de L'Acad. de St. Pétersbourg*. T. I, p. 39. Ее можно рассматривать, однако, как одну из форм уравнения непрерывности.

дает скорость изменения функции Ψ при движении вдоль нормали ν. В дальнейшем будет считаться, что значение $d\Psi/d\nu$ берется на самой поверхности, где $\nu=0$.

Будем, как и в п. 26 и 77 пользоваться обозначением

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}=-\nabla^2\Psi, \tag{2}$$

а для двух функций Ψ и Φ будем писать

$$\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Phi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Phi}{dz}=-S.\nabla\Psi\nabla\Phi. \tag{3}$$

Читатель, незнакомый с методом Кватернионов, может, если угодно, считать выражения $\nabla^2\Psi$ и $S.\nabla\Psi\nabla\Phi$ просто удобными сокращенными обозначениями соответствующих величин, к которым они приравнены выше, а поскольку мы будем в дальнейшем использовать лишь обычные декартовы координаты, то Кватернионное истолкование этих выражений нам не понадобится. Мы, однако, пользуемся именно этими обозначениями, а не произвольными другими сокращениями, поскольку на языке Квартернионов они полностью представляют соответствующую величину. Оператор ∇ в применении к скалярной функции Ψ дает пространственную вариацию этой функции, а выражение $-S.\nabla\Psi\nabla\Phi$ дает скалярную часть произведения двух пространственных вариаций, т. е. произведение одной из пространственных вариаций на составляющую другой вариации в направлении первой. Выражение $d\Psi/d\nu$ записывается в терминах Кватернионов как $S.U\nu\nabla\Psi$, где $U\nu$ — единичный вектор в направлении нормали. На данном этапе не видно особой выгоды в применении этого обозначения, однако оно окажется удобным при рассмотрении анизотропных сред.

Доказательство теоремы Грина

Пусть Ψ и Φ — две функции от x, y, z, конечные и непрерывные вместе со своими первыми производными в односвязной области ς, ограниченной замкнутой поверхностью s. Тогда

$$\iint\Psi\frac{d\Phi}{d\nu}ds-\iiint\Psi\nabla^2\Phi\,d\varsigma=\iiint S.\nabla\Psi\nabla\Phi\,d\varsigma=\iint\Phi\frac{d\Psi}{d\nu}ds-\iiint\Phi\nabla^2\Psi\,d\varsigma, \tag{4}$$

где двойное интегрирование производится по всей замкнутой поверхности s, а тройное — по полю ς, ограниченному этой поверхностью.

Для доказательства положим в Теореме III, п. 21,

$$X=\Psi\frac{d\Phi}{dx},\qquad Y=\Psi\frac{d\Phi}{dy},\qquad Z=\Psi\frac{d\Phi}{dz}. \tag{5}$$

Тогда

$$R\cos\varepsilon=-\Psi\left(l\frac{d\Phi}{dx}+m\frac{d\Phi}{dy}+n\frac{d\Phi}{dz}\right)=-\Psi\frac{d\Phi}{d\nu},\ \text{согласно (1)}, \tag{6}$$

и

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=\Psi\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\frac{d^2\Phi}{dy^2}+\frac{d^2\Phi}{dz^2}\right)+\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Phi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Phi}{dz}=$$
$$=-\Psi\nabla^2\Phi-S.\nabla\Psi\nabla\Phi,\ \text{согласно (2) и (3)}. \tag{7}$$

По Теореме III

$$\iint R\cos\varepsilon\, ds = \iiint \left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right) d\varsigma,$$

так что (6) и (7) дают

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds - \iiint \Psi\nabla^2\Phi\, d\varsigma = \iiint S.\nabla\Psi\nabla\Phi\, d\varsigma. \qquad (8)$$

Поскольку в правой части равенства Ψ и Φ можно поменять местами, это можно сделать и в левой части равенства. Таким образом, мы получили полное доказательство Теоремы Грина, даваемой равенством (4).

96 б. Теперь мы покажем, что Теорема Грина справедлива и в случае, когда одна из функций, скажем Ψ, многозначна, если ее первые производные однозначны и не обращаются в бесконечность в односвязной области ς.

Поскольку $\nabla\Psi$ и $\nabla\Phi$ однозначны, то средняя часть равенств (4) однозначна. Однако из-за многозначности Ψ оба слагаемых левой части равенств (4) многозначны. Но если выбрать какое-либо одно значение Ψ_0 из многих значений Ψ в точке A внутри области ς, то тем самым определяется значение функции Ψ в любой другой точке P. Действительно, поскольку выбранное значение Ψ является непрерывным внутри объема, то значение Ψ в точке P должно совпадать с тем решением, которое получается непрерывным изменением вдоль любого пути от A к P, начиная со значения Ψ_0 в точке A. Если бы значение Ψ в точке P получалось различным для различных путей из A в P, то эти два пути должны были бы охватывать замкнутую кривую, на которой первые производные от Ψ бесконечны. Но это противоречит нашим условиям. Поскольку первые производные по условию не обращаются в бесконечность внутри области ς, эта замкнутая кривая должна быть целиком вне этой области, а поскольку область односвязна, два пути внутри области не могут охватывать чего-либо вне области.

Таким образом, при заданном значении Ψ_0 функции в точке A ее значение в точке P определяется однозначно.

Если в точке A выбрано какое-либо другое значение Ψ, скажем $\Psi_0+n\varkappa$, то значение функции в точке P будет $\Psi+n\varkappa$. Однако значение левой части равенства (4) останется тем же, что и раньше, потому что это изменение приводит к добавлению в левой части (4) члена

$$n\varkappa\left[\iint \frac{d\Phi}{d\nu} ds - \iiint \nabla^2\Phi\, d\varsigma\right],$$

который, согласно Теореме III из п. 21, равен нулю.

96 в. Если область ς двухсвязная или многосвязная, то ее можно свести к односвязной области, замкнув каждый ее контур диафрагмой (что позволит применить рассматриваемую теорему к области, ограниченной поверхностью области ς, а также положительной и отрицательной сторонами диафрагмы).

Пусть s_1 — одна из этих диафрагм, а $\varkappa_1$ — соответствующая циклическая постоянная, т. е. приращение при однократном обходе по контуру в положительном направлении. Поскольку область ς расположена по обе стороны от диафрагмы s_1, то каждый элемент s_1 войдет дважды в поверхностный интеграл.

Пусть нормаль ν_1 проведена в положительную сторону ds_1, а ν_1' — в отрицательную. Тогда $(d\Phi/d\nu_1')=-(d\Phi/d\nu_1)$ и $\Psi_1'=\Psi_1+\varkappa_1$, и так что элемент поверхностного интеграла, обусловленный ds_1, будет равен

$$\Psi_1 \frac{d\Phi}{d\nu_1} ds_1 - \Psi_1' \frac{d\Phi}{d\nu_1'} ds_1 = -\varkappa_1 \frac{d\Phi}{d\nu_1} ds_1,$$

поскольку $d\nu_1$ — элемент внутренней нормали к положительной поверхности.

Таким образом, если область ς многосвязная, то первая часть уравнения (4) запишется в виде

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds - \varkappa_1 \iint \frac{d\Phi}{d\nu_1} ds_1 - \ldots - \varkappa_n \iint \frac{d\Phi}{d\nu_n} ds_n - \iiint \Psi \nabla^2 \Phi \, d\varsigma, \qquad (4a)$$

где $d\nu$ — элемент внутренней нормали к граничной поверхности, первый поверхностный интеграл берется по граничной поверхности, а остальные — по различным диафрагмам, каждый элемент поверхности которых входит в интеграл один раз с нормалью, направленной в соответствии с положительным направлением контура.

Необходимость такой модификации теоремы для многосвязных областей была впервые показана Гельмгольцем [2], а первое ее применение к рассматриваемой теореме принадлежит Томсону [3].

96 г. Предположим теперь вместе с Грином, что одна из функций, скажем Φ, не удовлетворяет тому условию, что сама функция и ее первые производные не обращаются в бесконечность внутри заданной области. Пусть она обращается в бесконечность в точке P этой области, и только в ней, причем вблизи точки P функция Φ равна Φ_0+e/r, где Φ_0 — конечная и непрерывная величина, а r — расстояние от P. Такой случай имеет место, если Φ — потенциал количества электричества e, сосредоточенного в точке P, и любого распределения электричества с объемной плотностью, нигде не обращающейся в бесконечность в рассматриваемой области.

Предположим теперь, что вокруг точки P как центра описана сфера очень малого радиуса a. Поскольку в области вне сферы, но внутри поверхности s, функция Φ никаких особенностей не имеет, то мы можем применить к ней Теорему Грина, не забыв учесть при поверхностном интегрировании и поверхность малой сферы.

При вычислении объемных интегралов следует из интеграла, взятого по всей области, вычесть интеграл по объему малой сферы.

Но интеграл

$$\iiint \Phi \nabla^2 \Psi \, dx\, dy\, dz$$

по объему сферы не может по абсолютной величине превосходить

$$(\nabla^2\Psi)_g \iiint \Phi \, dx\, dy\, dz,$$

т. е.

$$(\nabla^2\Psi)_g \left(2\pi e a^2 + \frac{4}{3}\pi a^3 \Phi_0\right),$$

[2] «Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen», *Crelle*, 1858. Англ. перевод проф. Тэта; *Phil. Mag.*, 1867 (I).

[3] «On Vortex Motion», *Trans. R. S. Edin.*, XXV, part. I, p. 241 (1867).

где индекс g какой-либо величины означает наибольшее численное значение этой величины внутри рассматриваемой сферы.

Таким образом, этот объемный интеграл порядка a^2 и может быть опущен при стремлении a к нулю.

Второй объемный интеграл

$$\iiint \Psi \nabla^2 \Phi \, dx\, dy\, dz$$

мы будем считать взятым по объему между малой сферой и поверхностью s, так что область интегрирования не включает точки, где Φ обращается в бесконечность.

Поверхностный интеграл $\iint \Phi \frac{d\Phi}{d\nu} ds'$ для сферы не может численно превосходить $\Phi_g \iint \frac{d\Psi}{d\nu} ds'$.

Но по Теореме III, п. 21,

$$\iint \frac{d\Psi}{d\nu} ds = -\iiint \nabla^2 \Psi \, dx\, dy\, dz,$$

так как здесь $d\nu$ отсчитывается наружу от сферы. Этот интеграл не может численно превосходить $(\nabla^2\Psi)_g \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$, а Φ_g на поверхности примерно равно e/a, так что $\iint \Phi \frac{d\Psi}{d\nu} ds$ не может численно превосходить

$$\frac{4}{3}\pi a^2 e (\nabla^2\Psi)_g,$$

т. е. он порядка a^2 и в пределе при a, стремящемся к нулю, может быть опущен.

Однако поверхностный интеграл по сфере, стоящий в правой части равенства (4):

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds',$$

не обращается в нуль, так как

$$\iint \frac{d\Phi}{d\nu} ds' = -4\pi e$$

($d\nu$ отсчитывается наружу от сферы).

Обозначая через Ψ_0 значение Ψ в точке P, получим

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds = -4\pi e \Psi_0.$$

Таким образом, уравнение (4) принимает вид

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu} ds - \iiint \Psi \nabla^2 \Phi \, d\varsigma - 4\pi e \Psi_0 = \iint \Phi \frac{d\Psi}{d\nu} ds - \iiint \Phi \nabla^2 \Psi \, d\varsigma. \qquad (4b)$$

97 а. Следуя Грину, применим этот вариант Теоремы Грина для определения поверхностной плотности распределения, создающего потенциал, значения кото-

рого заданы внутри и вне заданной замкнутой поверхности. Эти значения должны совпадать на поверхности; внутри поверхности $\nabla^2\Psi=0$, а вне нее $\nabla^2\Psi'=0$, где Ψ и Ψ' означают потенциалы внутри и вне поверхности.

Грин начинает с прямой задачи, когда задано распределение поверхностной плотности σ, а потенциалы во внутренней точке P и во внешней точке P' находятся интегрированием:

$$\Psi_P=\iint \frac{\sigma}{r}\,ds, \qquad \Psi'_{P'}=\iint \frac{\sigma}{r'}\,ds, \tag{9}$$

где r и r' соответственно расстояния от точек P и P'.

Полагая $\Phi=1/r$ и применив Теорему Грина к объему внутри поверхности с учетом того, что $\nabla^2\Phi=0$ и $\nabla^2\Psi=0$ в области интегрирования, получим

$$\iint \Psi \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu'}\,ds-4\pi\Psi_P=\iint \frac{1}{r}\frac{d\Psi}{d\nu'}\,ds, \tag{10}$$

где Ψ_P — значение Ψ в точке P.

Применим еще раз эту теорему к объему, ограниченному поверхностью s и охватывающей ее поверхностью на бесконечно большом расстоянии a. Вклад в поверхностный интеграл от бесконечно удаленной поверхности будет порядка $1/a$ и может быть опущен, откуда

$$\iint \Psi' \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\,ds=\iint \frac{1}{r}\frac{d\Psi'}{d\nu}\,ds. \tag{11}$$

Но на поверхности $\Psi=\Psi'$, а поскольку нормали ν и ν' направлены в противоположные стороны, то

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}+\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu'}=0.$$

Таким образом, при сложении уравнений (10) и (11) члены в левой части сократятся, и мы получим

$$-4\pi\Psi_P=\iint \frac{1}{r}\left(\frac{d\Psi}{d\nu'}+\frac{d\Psi'}{d\nu}\right)ds. \tag{12}$$

97 б. Грин показал также, что при произвольно заданном потенциале Ψ в каждой точке замкнутой поверхности s можно найти потенциал в любой точке внутри и вне поверхности, если $\nabla^2\Psi=0$ вне и внутри поверхности.

Для этого он выбрал функцию Φ такой, что вблизи точки P она близка к $1/r$, а на поверхности s равна нулю, причем в каждой точке внутри поверхности $\nabla^2\Phi=0$.

Существование такой функции Грин доказывает из физических соображений: если представить себе, что s — проводящая заземленная поверхность, а в точке P находится единичный заряд, то соответствующий потенциал удовлетворял бы приведенным условиям. Действительно, если поверхность s заземлена, то потенциал в каждой ее точке должен равняться нулю, а поскольку потенциал создан зарядом в точке P и наведенными зарядами на s, то $\nabla^2\Phi=0$ во всех точках внутри поверхности.

Применяя к этому случаю Теорему Грина, получим

$$4\pi\Psi_P = \iint \Psi \frac{d\Phi}{d\nu'} ds, \quad (13)$$

где Ψ под интегралом означает заданное значение потенциала на элементе поверхности ds. Если σ_P — плотность электричества, наведенного единичным зарядом в точке P, то

$$4\pi\sigma_P + \frac{d\Phi}{d\nu'} = 0 \quad (14)$$

и уравнение (13) можно переписать в виде

$$\Psi_P = -\iint P\sigma\, ds, \quad (15)$$

где σ — поверхностная плотность электричества, индуцированная на ds единичным зарядом в точке P.

Таким образом, если значение σ известно в каждой точке поверхности для данного положения точки P, то мы можем рассчитать простым интегрированием потенциал в точке P при заданном потенциале в каждой точке поверхности и при условии $\nabla^2\Psi=0$ внутри поверхности.

Ниже мы покажем, что если мы нашли решение Ψ, удовлетворяющее этим условиям, то оно единственно.

Функция Грина

98. Пусть замкнутая поверхность s находится под нулевым потенциалом. Пусть P и Q — две точки с положительной стороны от поверхности s (мы можем принять за положительную как внутреннюю, так и внешнюю сторону) и пусть в точке P находится небольшое тело, несущее единичный заряд. Тогда потенциал в точке Q состоит из двух частей; одна часть вызывается непосредственным действием заряда в точке P, другая — обусловлена действием заряда, индуцированного на поверхности s зарядом в P. Эта вторая часть потенциала называется Функцией Грина и обозначается через G_{pq}.

Функция Грина зависит от положения двух точек P и Q; вид функции зависит от формы поверхности s. Она была рассчитана для сферической поверхности и еще для нескольких других случаев. Функция Грина дает потенциал в точке Q, создаваемый электричеством, наводимым на поверхности s единичным зарядом в точке P.

Фактический потенциал в точке Q, создаваемый зарядом в точке P и наводимыми им зарядами на s, равен $1/r_{pq}+G_{pq}$, где r_{pq}—расстояние от P до Q.

На поверхности s и во всех точках по отрицательную сторону от s потенциал равен нулю, так что

$$G_{pa} = -(1/r_{pa}), \quad (1)$$

где индекс a показывает, что вместо точки Q взята точка A на поверхности s.

Если обозначить через $\sigma_{pa'}$ поверхностную плотность в точке A' на поверхности s, то, поскольку G_{pq} является потенциалом, создаваемым в точке Q

поверхностным распределением,

$$G_{pq} = \iint (\sigma_{pa'}/r_{qa'})\,ds', \tag{2}$$

где ds' — элемент поверхности s у точки A', и интегрирование производится по всей поверхности s.

Если бы единичный заряд был расположен в точке Q, то, согласно (1), мы имели бы

$$(1/r_{qa'}) = -G_{qa'} \tag{3}$$

$$= -\iint (\sigma_{qa}/r_{aa'})\,ds, \tag{4}$$

где σ_{qa} — плотность в точке A, наводимая единичным зарядом в Q, ds — элемент поверхности, а $r_{aa'}$ — расстояние между точками A и A'. Подставляя это значение $1/r_{qa'}$ в выражение для G_{pq}, получим

$$G_{pq} = -\iiiint \frac{\sigma_{qa}\sigma_{pa'}}{r_{aa'}}\,ds\,ds'. \tag{5}$$

Поскольку это выражение не меняется от перестановки индексов q и p, мы заключаем, что

$$G_{pq} = G_{qp}. \tag{6}$$

К этому результату мы пришли еще в п. 86, но теперь мы видим, что он выводится математически методом, позволяющим рассчитать функцию Грина.

Предположим, что у нас имеется произвольное распределение электричества, и поместим в поле точечный единичный заряд. Пусть поверхность нулевого потенциала полностью отделяет эту точку от имеющегося распределения заряда. Тогда, приняв эту поверхность за поверхность s, а точку — за точку P, получим, что функция Грина для любой точки с той же стороны поверхности, что и P, будет совпадать с потенциалом распределения электричества, существующего по другую сторону поверхности. Таким способом можно построить сколько угодно примеров, позволяющих найти функцию Грина для частных случаев расположения точки P. Значительно труднее найти вид функции при заданной поверхности s и при произвольном положении точки P, хотя, как мы показали, математически это возможно.

Предположим, что эта задача решена, и что точка P находится внутри поверхности. Тогда во всех точках вне поверхности потенциал поверхностного распределения равен и противоположен по знаку потенциалу точки P. Таким образом, поверхностное распределение *центробарично*[4] и его действие во всех внешних точках эквивалентно действию единичного положительного заряда в точке P.

99 а. Если положить в Теореме Грина $\Psi = \Phi$, то мы получим

$$\iint \Psi \frac{d\Psi}{d\nu}\,ds - \iiint \Psi\nabla^2\Psi\,d\varsigma = \iiint (\nabla\Psi)^2\,d\varsigma. \tag{16}$$

Если Ψ — потенциал распределения заряда в пространстве с объемной плотностью ρ и на проводниках с поверхностями s_1, s_2 и т. д., имеющих потенциалы

[4] Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, § 526.

Ψ_1, Ψ_2 и т. д., с поверхностной плотностью σ_1, σ_2 и т. д., то

$$\nabla^2\Psi = 4\pi\rho, \tag{17}$$

$$\frac{d\Psi}{d\nu} = -4\pi\sigma \tag{18}$$

($d\nu$ направлено наружу от проводника) и

$$\iint \frac{d\Psi}{d\nu_1}\, ds_1 = -4\pi e_1, \tag{19}$$

где e_1 — заряд поверхности s_1.

Поделив (16) на -8π, получим

$$\frac{1}{2}(\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \ldots) + \frac{1}{2}\iiint \Psi\rho\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right] dx\, dy dz. \tag{20}$$

Первый член слева представляет собой электрическую энергию системы, обусловленную поверхностными распределениями, а второй — энергию, обусловленную объемным распределением электричества в поле, если таковое распределение имеется.

Таким образом, правая часть уравнения выражает полную электрическую энергию системы при заданном потенциале как функции координат.

Поскольку мы часто будем пользоваться этим объемным интегралом, мы введем для него специальное обозначение W_ψ, так что

$$W_\psi = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right] dx\, dy\, dz. \tag{21}$$

Если заряд распределен лишь на поверхностях проводников, то $\rho=0$ и второй член слева в (20) отсутствует.

Первый член слева выражает, как и в п. 84, энергию заряженной системы через заряды и пот циалы проводников, мы обозначаем это выражение через W.

99 б. Пусть Ψ — функция от x, y, z, удовлетворяющая тому условию, что на замкнутой поверхности s она принимает во всех точках известные значения $\overline{\Psi}$. Значения Ψ в точках вне поверхности s совершенно произвольны.

Напишем интеграл

$$\mathcal{W} = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right] dx\, dy\, dz, \tag{22}$$

где интегрирование производится по объему внутри поверхности s. Докажем, что если Ψ_1 — такая из функций Ψ, удовлетворяющих условию на поверхности, которая удовлетворяет также уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Psi_1 = 0 \tag{23}$$

во всех точках внутри поверхности, то значение W_1 интеграла W, вычисленное для Ψ_1, меньше, чем для любой другой функции, отличающейся от Ψ_1 хотя бы в одной точке внутри поверхности.

Действительно, пусть Ψ — любая функция, совпадающая с Ψ_1 на поверхности, но не совпадающая всюду внутри поверхности, и положим

$$\Psi=\Psi_1+\Psi_2. \tag{24}$$

Тогда Ψ_2 обращается в нуль во всех точках поверхности.

Значение W для Ψ равно, очевидно,

$$W=W_1+W_2+\frac{1}{4\pi}\iiint\left(\frac{d\Psi_1}{dx}\frac{d\Psi_2}{dx}+\frac{d\Psi_1}{dy}\frac{d\Psi_2}{dy}+\frac{d\Psi_1}{dz}\frac{d\Psi_2}{dz}\right)dx\,dy\,dz. \tag{25}$$

По Теореме Грина последнее выражение можно написать в виде

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\Psi_2\nabla^2\Psi_1\,d\varsigma-\frac{1}{4\pi}\iint\Psi_2\frac{d\Psi_1}{d\nu}\,ds. \tag{26}$$

Объемный интеграл обращается в нуль, так как $\nabla^2\Psi_1=0$ внутри поверхности, а поверхностный интеграл равен нулю, потому что на поверхности $\Psi_2=0$. Таким образом, уравнение (25) принимает вид

$$W=W_1+W_2. \tag{27}$$

Но подынтегральное выражение в интеграле W_2 представляет собой сумму трех квадратов и не может быть отрицательно, так что сам интеграл может быть либо положительным, либо нулем. Итак, если W_2 не равно нулю, то оно положительно, и, следовательно, W больше W_1. Если же W_2 равно нулю, то каждое слагаемое под интегралом должно быть равно нулю, т. е. $(d\Psi_2/dx)=0$, $(d\Psi_2/dy)=0$, $(d\Psi_2/dz)=0$ во всех точках внутри поверхности, а Ψ_2 постоянно внутри поверхности. Но на поверхности $\Psi_2=0$, значит, оно равно нулю и в любой точке внутри поверхности, т. е. $\Psi=\Psi_1$, так что, если W не больше W_1, то Ψ должно совпадать с Ψ_1 во всех точках внутри поверхности.

Отсюда следует, что Ψ_1 — единственная функция от x, y, z, равная $\overline{\Psi}$ на поверхности и удовлетворяющая уравнению Лапласа внутри поверхности.

Если бы этим условиям удовлетворяла какая-нибудь другая функция Ψ_3, то W_3 должно было бы быть меньше любого другого значения W. Но мы уже показали, что W_1 меньше любого другого значения, а следовательно, и меньше W_3. Следовательно, никакая функция, отличная от Ψ_1, не может удовлетворять этим условиям.

Ниже мы увидим, что наиболее часто встречается случай, когда поле ограничено одной внешней поверхностью s и некоторым числом внутренних поверхностей s_1, s_2 и т. д., причем принимает нулевое значение на s и постоянные на каждой поверхности значения: Ψ_1 на s_1, Ψ_2 на s_2 и т. д., как для системы проводников с заданными потенциалами.

Из всех функций Ψ, удовлетворяющих этим условиям, W_Ψ минимально для той функции, которая для каждой точки в поле удовлетворяет условию $\nabla^2\Psi=0$.

Теорема Томсона

Лемма

100 а. Пусть Ψ — произвольная функция x, y, z, конечная и непрерывная внутри замкнутой поверхности s и принимающая на некоторых замкнутых по-

верхностях $s_1, s_2, \ldots, s_p, \ldots$ значения $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_p, \ldots$, постоянные на каждой поверхности.

Пусть u, v, w — функции x, y, z, которые мы можем рассматривать как составляющие вектора $\mathfrak{C}$, удовлетворяющего условию соленоидальности

$$-S.\nabla\mathfrak{C} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0. \tag{28}$$

Положим в Теореме III

$$X = \Psi u, \qquad Y = \Psi v, \qquad Z = \Psi w. \tag{29}$$

В результате этих подстановок получим

$$\sum_p \iint \Psi_p (l_p u + m_p v + n_p w)\, ds_p + \iiint \Psi \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) dx\, dy\, dz + + \iiint \left(u\frac{d\Psi}{dx} + v\frac{d\Psi}{dy} + w\frac{d\Psi}{dz}\right) dx\, dy\, dz = 0; \tag{30}$$

где поверхностные интегралы берутся по различным поверхностям, объемные интегралы — по всему полю, а l_p, m_p, n_p — направляющие косинусы нормали к поверхности s_p в сторону поля. Первый объемный интеграл равен нулю вследствие соленоидальности u, v, w, а поверхностные интегралы равны нулю в следующих случаях:

1) если для любой точки поверхности $\Psi = 0$,

2) если для любой точки поверхности $lu + mv + nw = 0$,

3) если поверхность состоит вся из частей, на которых выполняется либо (1), либо (2),

4) если Ψ постоянно на каждой замкнутой поверхности и $\iint (lu + mv + nw)\, ds = 0$.

В этих четырех случаях объемный интеграл

$$M = \iiint \left(u\frac{d\Psi}{dx} + v\frac{d\Psi}{dy} + w\frac{d\Psi}{dz}\right) dx\, dy\, dz = 0. \tag{31}$$

100 б. Рассмотрим теперь поле, ограниченное замкнутой поверхностью s и внутренними замкнутыми поверхностями $s_1, s_2, \ldots$.

Пусть Ψ — функция x, y, z, конечная и непрерывная в точках поля, удовлетворяющая Уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Psi = 0, \tag{32}$$

имеющая постоянные, но не заданные значения $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ соответственно на поверхностях $s_1, s_2, \ldots$ и нулевое значение на внешней поверхности s.

Заряд любой из заряженных поверхностей, скажем s_1, дается поверхностным интегралом

$$e_1 = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{d\Psi}{d\nu_1} ds_1, \tag{33}$$

где нормаль ν_1, направлена от поверхности s_1 в сторону электрического поля.

100 в. Пусть теперь f, g, h — функции x, y, z, которые можно рассматривать как составляющие некоторого вектора $\mathfrak{D}$, удовлетворяющие только тому усло-

вию, что в каждой точке поля должно выполняться условие соленоидальности

$$\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=0, \tag{34}$$

и что на каждой из внутренних замкнутых поверхностей, скажем s_1, интеграл типа

$$\iint (l_1 f+m_1 g+n_1 h)\,ds=e_1, \tag{35}$$

где l_1, m_1, n_1 — направляющие косинусы нормали ν_1 к поверхности s_1 в сторону электрического поля, а e_1 — та же величина, что и в (33), т. е. фактически электрический заряд проводника, ограниченного поверхностью s_1.

Рассмотрим объемный интеграл

$$W_{\mathfrak{D}}=2\pi\iiint (f^2+g^2+h^2)\,dx\,dy\,dz \tag{36}$$

по всему полю внутри s и вне s_1, s_2, . . . и сравним его с интегралом

$$W_\Psi=\frac{1}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz \tag{37}$$

по тому же объему.

Положим

$$u=f+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dx},\qquad v=g+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dy},\qquad w=h+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dz} \tag{38}$$

и введем

$$W_{\mathfrak{E}}=2\pi\iiint (u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz. \tag{39}$$

Тогда, поскольку

$$f^2+g^2+h^2=\frac{1}{16\pi^2}\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]+u^2+v^2+w^2-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\left[u\frac{d\Psi}{dx}+v\frac{d\Psi}{dy}+w\frac{d\Psi}{dz}\right], \tag{40}$$

то

$$W_{\mathfrak{D}}=W_\Psi+W_{\mathfrak{E}}-\iiint\left(u\frac{d\Psi}{dx}+v\frac{d\Psi}{dy}+w\frac{d\Psi}{dz}\right)dx\,dy\,dz.$$

Но, во-первых, u; v, w удовлетворяют условию соленоидальности в любой точке поля, поскольку, согласно (38),

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\Psi, \tag{41}$$

а по (34) и (32) оба слагаемых правой части (41) равны нулю.

Во-вторых, имеет место равенство

$$\iint (l_1 u+m_1 v+n_1 w)\,ds_1=\iint (l_1 f+m_1 g+n_1 h)\,ds_1+\frac{1}{4\pi}\iint\frac{d\Psi}{d\nu_1}ds_1. \tag{42}$$

Но согласно (35) первое слагаемое справа равно e_1, а согласно (33) второе слагаемое справа равно $-e_1$, так что

$$\iint (l_1 u+m_1 v+n_1 w)\,ds_1=0. \tag{43}$$

Таким образом, так как Ψ_1 постоянно, выполняется четвертое условие п. 100 а, так что последнее слагаемое в правой части (40) равно нулю и уравнение сводится к

$$W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi} + W_{\mathfrak{G}}. \tag{44}$$

Далее, подынтегральное выражение в $W_{\mathfrak{G}}$ является суммой трех квадратов $u^2+v^2+w^2$ и, следовательно, либо положительно, либо равно нулю. Если хоть в одной точке в поле u, v и w не равны одновременно нулю, то интеграл $W_{\mathfrak{G}}$ положителен, так что $W_{\mathfrak{D}}$ больше W_{Ψ}. Но и значения $u=v=w=0$ во всех точках этим условиям удовлетворяют.

Таким образом, если в каждой точке

$$f = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dx}, \qquad g = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dy}, \qquad h = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dz}, \tag{45}$$

то

$$W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi} \tag{46}$$

и величина $W_{\mathfrak{D}}$ для этих значений f, g, h меньше, чем для любых других значений f, g, h.

Итак, задача определения смещения и потенциала в каждой точке поля при заданных зарядах на каждом проводнике имеет одно и только одно решение.

Эта теорема в одном из более общих вариантов была впервые установлена сэром У. Томсоном[5]. Ниже мы укажем возможные обобщения теоремы.

100 г. Можно видоизменить эту теорему, предположив, что вектор $\mathfrak{D}$ не соленоидальный в каждой точке, а удовлетворяет условию

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \rho, \tag{47}$$

где ρ — конечная функция, значение которой задано в каждой точке поля; она может быть положительной и отрицательной, непрерывной и разрывной, но интеграл от нее по конечному объему должен быть конечен.

Можно также предположить, что на некоторых поверхностях, расположенных в поле, имеет место соотношение

$$lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h' = \sigma, \tag{48}$$

где l, m, n и l', m', n' — направляющие косинусы нормалей из точки поверхности в области, где составляющие смещения равны соответственно f, g, h и f', g', h' а σ — величина, заданная во всех точках поверхности, интеграл от которой по конечной поверхности конечен.

100 д. Можно также изменить условие на граничных поверхностях, приняв, что в каждой точке этих поверхностей

$$lf + mg + nh = \sigma, \tag{49}$$

где σ задано во всех точках.

(В первоначальной формулировке теоремы мы считали заданным лишь *интеграл* от σ по каждой из поверхностей. Здесь мы считаем заданным значение σ на каждом элементе. Это все равно, что рассматривать в первоначальной формулировке теоремы каждый элемент как отдельную поверхность.)

[5] *Cambridge and Dublin Mathematical Journal, February*, 1848.

Во всех этих модификациях теорема остается справедливой, если только помнить, что Ψ должно удовлетворять соответствующим условиям, т. е. общему условию

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}+4\pi\rho=0 \tag{50}$$

и условию на поверхности

$$\frac{d\Psi}{d\nu}+\frac{d\Psi'}{d\nu'}+4\pi\sigma=0. \tag{51}$$

Действительно, положив, как ранее,

$$f+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dx}=u, \qquad g+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dy}=v, \qquad h+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dz}=w,$$

получим, что u, v, w удовлетворяют общему условию соленоидальности

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

условию на поверхности

$$lu+mv+nw+l'u'+m'v'+n'w'=0$$

и условию на граничной поверхности

$$lu+mv+nw=0,$$

откуда опять следует, что

$$M=\iiint\left(u\frac{d\Psi}{dx}+v\frac{d\Psi}{dy}+w\frac{d\Psi}{dz}\right)dx\,dy\,dz=0$$

и

$$W_{\mathfrak{D}}=W_{\Psi}+W_{\mathfrak{E}}.$$

Как и прежде, показывается, что $W_{\mathfrak{D}}$ имеет единственный минимум при $W_{\mathfrak{E}}=0$, что означает равенство нулю $u^2+v^2+w^2$ во всех точках, так что

$$f=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dx}, \quad g=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dy}, \qquad h=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dz}$$

101 а. В нашем доказательстве этих теорем мы до сих пор ограничивались той теорией электричества, которая считает свойства электрических систем зависящими от формы и относительного расположения проводников и их зарядов, но никак не учитывает природы диэлектрической среды, находящейся между проводниками.

Согласно этой теории, существует, например, неизменное соотношение между поверхностной плотностью на проводнике и электродвижущей напряженностью вне проводника у самой поверхности, даваемое законом Кулона: $R=4\pi\sigma$. Но это верно только для эталонной среды, за которую можно принять воздух. В других средах соотношение будет иным, как показал экспериментально, хотя и не опубликовал, Кавендиш, а затем независимо вновь открыл Фарадей.

Для полного описания этого явления мы нашли необходимым рассмотреть две векторные величины, соотношение между которыми в разных средах раз-

лично. Одна — это электродвижущая напряженность, другая — электрическое смещение. Электродвижущая напряженность связана соотношением неизменного вида с потенциалом, электрическое смещение связано соотношением неизменного вида с распределением заряда, но соотношение между электродвижущей напряженностью и электрическим смещением зависит от природы диэлектрической среды и должно выражаться уравнениями, наиболее общая форма которых до сих пор еще полностью не установлена и может быть установлена лишь в результате опытов с диэлектриками.

101 б. Электродвижущая напряженность — вектор, определенный в п. 68 как отношение механической силы, действующей на малый заряд, к величине этого заряда e. Ее составляющие мы обозначим через P, Q, R, а сам вектор — через $\mathfrak{E}$.

В электростатике криволинейный интеграл от $\mathfrak{E}$ всегда не зависит от пути интегрирования, т. е., иными словами, $\mathfrak{E}$ является пространственной вариацией потенциала. Таким образом, $P=-d\Psi/dx$, $Q=-d\Psi/dy$, $R=-d\Psi/dz$, или, короче, пользуясь Кватернионными обозначениями, $\mathfrak{E}=-\nabla\Psi$.

101 в. Составляющая электрического смещения в каком-либо направлении определена в п. 60 как отношение количества электричества, прошедшего через небольшую площадку A, плоскость которой перпендикулярна рассматриваемому направлению, к величине площадки A. Мы обозначим прямоугольные составляющие электрического смещения буквами f, g, h, а сам вектор — буквой $\mathfrak{D}$.

Объемная плотность в каждой точке определяется уравнением

$$\rho=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz},$$

или в Кватернионных обозначениях $\rho=-S.\nabla\mathfrak{D}$.

Поверхностная плотность в любой точке заряженной поверхности определяется соотношением

$$\sigma=lf+mg+nh+l'f'+m'g'+n'h',$$

где f, g, h — составляющие смещения на одной стороне поверхности, а l, m, n — направляющие косинусы нормали к поверхности в эту сторону; соответственно f', g', h' и l', m', n' — составляющие смещения и направляющие косинусы нормали для другой стороны.

В Кватернионных обозначениях это уравнение примет вид

$$\sigma=-[S.U\nu\mathfrak{D}+S.U\nu'\mathfrak{D}'],$$

где $U\nu$, $U\nu'$ — единичные нормали с обеих сторон поверхности, а S указывает на то, что берется скалярная часть произведения.

Для поверхности проводника, обозначая через ν внешнюю нормаль и учитывая, что f', g', h' и $\mathfrak{D}'$ равны нулю, это уравнение сводится к виду

$$\sigma=lf+mg+nh$$
$$=-S.U\nu\mathfrak{D}.$$

Таким образом, полный заряд проводника равен

$$\sigma = \iint (lf + mg + nh)\, ds$$
$$= -\iint S.U\nu\mathfrak{D}\, ds.$$

101 г. Как показано в п. 84, электрическая энергия системы равна полусумме произведений зарядов на соответствующие потенциалы. Обозначая ее через W, получим

$$W = \frac{1}{2}\sum (e\Psi) = \frac{1}{2}\iiint \rho\Psi\, dx\, dy\, dz + \frac{1}{2}\iint \sigma\Psi\, ds =$$
$$= \frac{1}{2}\iiint \Psi\left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\right) dx\, dy\, dz + \frac{1}{2}\iint \Psi (lf + mg + nh)\, ds,$$

где объемный интеграл берется по всему электрическому полю, а поверхностный — по поверхностям проводников.

Полагая в Теореме III, п. 21, $X = \Psi f$, $Y = \Psi g$, $Z = \Psi h$, получим

$$\iint \Psi (lf + mg + nh)\, ds = -\iiint \Psi\left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\right) dx\, dy\, dz -$$
$$-\iiint \left(f\frac{d\Psi}{dx} + g\frac{d\Psi}{dy} + h\frac{d\Psi}{dz}\right) dx\, dy\, dz,$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали к поверхности в сторону поля.

Подставляя это значение поверхностного интеграла в W, получим

$$W = -\frac{1}{2}\iiint \left(f\frac{d\Psi}{dx} + g\frac{d\Psi}{dy} + h\frac{d\Psi}{dz}\right) dx\, dy\, dz,$$

или

$$W = \frac{1}{2}\iiint (fP + gQ + hR)\, dx\, dy\, dz.$$

101 д. Теперь перейдем к соотношению между $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$. Единица заряда обычно определяется из опытов в воздухе. Из опытов Больцмана мы знаем теперь, что диэлектрическая постоянная для воздуха несколько больше, чем для вакуума, и что она зависит от плотности воздуха. Поэтому, строго говоря, подобно тому как значения коэффициентов преломления в воздухе нуждаются в поправке, так и все измерения электрических величин следует скорректировать, сведя их либо к воздуху при нормальной температуре и нормальном давлении, либо, что с научной точки зрения более предпочтительно, к вакууму. Но в обоих случаях поправки столь малы, что обнаруживаются лишь при чрезвычайно точных измерениях.

В эталонной среде $4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, т. е. $4\pi f = P$, $4\pi g = Q$; $4\pi h = R$.

В изотропной среде с диэлектрической постоянной K

$$4\pi\mathfrak{D} = K\mathfrak{E}, \quad 4\pi f = KP, \quad 4\pi g = KQ, \quad 4\pi h = KR.$$

Однако есть некоторые среды, из которых наиболее исследовано стекло, в которых соотношение между $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ более сложное и содержит производные по

времени от одной или от обеих этих величин, так что оно имеет вид

$$F(\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \dot{\mathfrak{D}}, \dot{\mathfrak{E}}, \ddot{\mathfrak{D}}, \ddot{\mathfrak{E}}, \ldots)=0.$$

Мы сейчас не будем рассматривать соотношений такого более общего вида и ограничимся случаем, когда $\mathfrak{D}$ является линейной векторной функцией от $\mathfrak{E}$.

Самый общий вид такого соотношения может быть записан в виде $4\pi\mathfrak{D} = \varphi(\mathfrak{E})$, где через φ мы будем всюду в нашем исследовании обозначать линейную векторную функцию. Таким образом, составляющие $\mathfrak{D}$ являются линейными однородными функциями от составляющих $\mathfrak{E}$ и могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} 4\pi f &= K_{xx}P + K_{xy}Q + K_{xz}R, \\ 4\pi g &= K_{yx}P + K_{yy}Q + K_{yz}R, \\ 4\pi h &= K_{zx}P + K_{zy}Q + K_{zz}R, \end{aligned}$$

где первый индекс в каждом коэффициенте K указывает направление составляющей смещения, а второй — направление составляющей электродвижущей напряженности.

В самом общем виде в линейную векторную функцию входят девять независимых коэффициентов. Если коэффициенты с одинаковой парой индексов равны между собой, то такая функция называется самосопряженной.

Если выразить $\mathfrak{E}$ через $\mathfrak{D}$, то получится соотношение типа $\mathfrak{E} = 4\pi\varphi^{-1}(\mathfrak{D})$, т. е.

$$\begin{aligned} P &= 4\pi(k_{xx}f + k_{yx}g + k_{zx}h), \\ Q &= 4\pi(k_{xy}f + k_{yy}g + k_{zy}h), \\ R &= 4\pi(k_{xz}f + k_{yz}g + k_{zz}h). \end{aligned}$$

101 е. Работа, совершаемая в единице объема среды электродвижущей напряженностью с составляющими P, Q, R при создании смещения с составляющими df, dg, dh, равна

$$dW = Pdf + Qdg + Rdh.$$

Поскольку диэлектрик, в котором имеет место электрическое смещение, является консервативной системой, то W должно быть функцией f, g, h, а поскольку f, g, h могут меняться независимо, то

$$P\frac{dW}{df}, \qquad Q=\frac{dW}{dg}, \qquad R=\frac{dW}{dh}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dP}{dg}=\frac{d^2W}{dg\,df}=\frac{d^2W}{df\,dg}=\frac{dQ}{df}.$$

Но $dP/dg=4\pi k_{yx}$ — коэффициент перед g в выражении для P, а $dQ/df=4\pi k_{xy}$ — коэффициент перед f в выражении для Q.

Таким образом, если диэлектрическая среда является консервативной системой (а мы знаем, что это так, потому что ее энергия может сохраняться неограниченно долго), то $k_{xy}=k_{yx}$, т. е. φ^{-1} — самосопряженная функция.

Отсюда следует, что и φ — самосопряженная функция, т. е. $K_{xy}=K_{yx}$.

101 ж. Следовательно, выражение для энергии можно представить в любой из следующих форм:

$$W_{\mathfrak{E}}=\frac{1}{8\pi}\iiint [K_{xx}P^2+K_{yy}Q^2+K_{zz}R^2+2K_{yz}QR+2K_{zx}RP+2K_{xy}PQ]\,dx\,dy\,dz,$$

или

$$W_{\mathfrak{D}}=2\pi\iiint [k_{xx}f^2+k_{yy}g^2+k_{zz}h^2+2k_{yz}gh+2k_{zx}hf+2k_{xy}fg]dxdydz,$$

где индекс указывает на вектор, через который выражается W. Если индекс не указан, то подразумевается, что энергия выражена через оба вектора.

Таким образом, мы имеем всего шесть различных выражений для энергии электрического поля. Три из них содержат заряды и потенциалы поверхностей проводников и приведены в п. 87. Три других выражения являются объемными интегралами по всему электрическому полю и содержат составляющие электродвижущей напряженности, или электрического смещения, или и те и другие.

Поэтому первые три интеграла относятся к теории взаимодействия на расстоянии, а три последних — к теории воздействия через посредство промежуточной среды. Их можно представить в виде

$$W=-\frac{1}{2}\iiint S.\mathfrak{D}\mathfrak{E}\,d\varsigma,$$

$$W_{\mathfrak{E}}=-\frac{1}{8\pi}\iiint S.\mathfrak{E}\varphi(\mathfrak{E})\,d\varsigma,\qquad W_{\mathfrak{D}}=-2\pi\iiint S.\mathfrak{D}\varphi^{-1}(\mathfrak{D})\,d\varsigma.$$

101 з. Чтобы обобщить Теорему Грина на случай неоднородной анизотропной среды, достаточно лишь положить в Теореме III, п. 21,

$$X=\Psi\left[K_{xx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{xy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{xz}\frac{d\Phi}{dz}\right],$$

$$Y=\Psi\left[K_{yx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{yy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{yz}\frac{d\Phi}{dz}\right],\qquad Z=\Psi\left[K_{zx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{zy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{zz}\frac{d\Phi}{dz}\right],$$

и мы получим

$$\iint\Psi\Big[(K_{xx}l+K_{yx}m+K_{zx}n)\frac{d\Phi}{dx}+(K_{xy}l+K_{yy}m+K_{zy}n)\frac{d\Phi}{dy}+$$
$$+(K_{xz}l+K_{yz}m+K_{zz}n)\frac{d\Phi}{dz}\Big]ds-\iiint\Psi\Big[\frac{d}{dx}\left(K_{xx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{xy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{xz}\frac{d\Phi}{dz}\right)+$$
$$+\frac{d}{dy}\left(K_{yx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{yy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{yz}\frac{d\Phi}{dz}\right)+\frac{d}{dz}\left(K_{zx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{zy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{zz}\frac{d\Phi}{dz}\right)\Big]dx\,dy\,dz=$$
$$=\iiint\Big[K_{xx}\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{yy}\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{zz}\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Phi}{dz}+K_{yz}\left(\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Phi}{dz}+\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Phi}{dy}\right)+$$
$$+K_{zx}\left(\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Phi}{dz}\right)+K_{xy}\left(\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Phi}{dy}+\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Phi}{dx}\right)\Big]dx\,dy\,dz=$$
$$=\iint\Phi\Big[(K_{xx}l+K_{yx}m+K_{zx}n)\frac{d\Psi}{dx}+(K_{xy}l+K_{yy}m+$$
$$+K_{zy}n)\frac{d\Psi}{dy}+(K_{xz}l+K_{yz}m+K_{zz}n)\frac{d\Psi}{dz}\Big]ds-$$
$$-\iiint\Phi\Big[\frac{d}{dx}\left(K_{xx}\frac{d\Psi}{dx}+K_{xy}\frac{d\Psi}{dy}+K_{xz}\frac{d\Psi}{dz}\right)+\frac{d}{dy}\left(K_{yx}\frac{d\Psi}{dx}+K_{yy}\frac{d\Psi}{dy}+K_{yz}\frac{d\Psi}{dz}\right)+$$
$$+\frac{d}{dz}\left(K_{zx}\frac{d\Psi}{dx}+K_{zy}\frac{d\Psi}{dy}+K_{zz}\frac{d\Psi}{dz}\right)\Big]dx\,dy\,dz,$$

где l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности (следует помнить, что порядок индексов в коэффициентах безразличен).

В кватернионных обозначениях эти соотношения записываются короче:

$$\iint \Psi S.U\nu\varphi(\nabla\Phi)\,ds - \iiint \Psi S.\{\nabla\varphi(\nabla\Psi)\}\,d\varsigma =$$
$$= \iiint S.\nabla\Psi\varphi(\nabla\Phi)\,d\varsigma = -\iiint S.\nabla\Phi\varphi(\nabla\Psi)\,d\varsigma =$$
$$= \iint \Phi S.U\nu\varphi(\nabla\Psi)\,ds - \iiint \Phi S.\{\nabla\varphi(\nabla\Psi)\}\,d\varsigma.$$

Границы возможных значений электрической емкости проводника

102 а. Мы уже определили емкость проводника или системы проводников как заряд этого проводника или системы проводников при сообщении им единичного потенциала и при нулевом потенциале всех остальных проводников, находящихся в поле.

Излагаемый ниже метод определения предельных значений, между которыми должно находиться значение емкости проводника, был предложен Дж. У. Стреттом в его работе «О теории резонанса», Phil. Trans., 1871, Art. 306.

Пусть s_1 — поверхность проводника или системы проводников, емкость которых следует определить, а s_0 — поверхность всех остальных проводников. Пусть потенциал s_1 равен Ψ_1, потенциал s_0 равен Ψ_0. Если заряд на s_1 равен e_1, то заряд на s_0 равен $-e_1$.

Емкость q проводника s_1 равна

$$q = e_1/(\Psi_1 - \Psi_0). \tag{1}$$

Если W — энергия системы при фактическом распределении заряда, то

$$W = e_1(\Psi_1 - \Psi_0)/2, \tag{2}$$

так что

$$q = \frac{2W}{(\Psi_1 - \Psi_0)^2} = \frac{e_1^2}{2W}. \tag{3}$$

Чтобы найти верхнюю границу возможных значений емкости, рассмотрим любую функцию Ψ, равную 1 на s_1 и нулю на s_0, и вычислим значение объемного интеграла

$$W_\Psi = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right] dx\,dy\,dz \tag{4}$$

по всему полю.

Поскольку мы показали (в п. 99б), что W не может превышать W_Ψ, емкость q не может быть больше $2W_\Psi$.

Чтобы найти нижнюю границу возможных значений емкости, рассмотрим любую систему значений f, g, h, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0, \tag{5}$$

и пусть

$$\iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h)\,ds_1 = e_1. \tag{6}$$

Вычислим теперь значение объемного интеграла

$$W_{\mathfrak{D}}=2\pi\iiint(f^2+g^2+h^2)\,dx\,dy\,dz \tag{7}$$

по всему полю.

Поскольку мы показали в п. 100 в, что W не может превышать $W_{\mathfrak{D}}$, то емкость q не может быть меньше

$$e_1^2/(2W_{\mathfrak{D}}). \tag{8}$$

Проще всего найти совокупность функций f, g, h, удовлетворяющую условию соленоидальности, приняв какое-то распределение заряда на s_1 и на s_0 так, чтобы суммарный заряд равнялся нулю, и рассчитав потенциал Ψ, соответствующий этому распределению, и электрическую энергию такой системы.

Если теперь положить

$$f=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dx},\qquad g=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dy},\qquad h=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dz},$$

то эти значения f, g, h будут удовлетворять условию соленоидальности.

Однако в этом случае можно найти $W_{\mathfrak{D}}$ и не производя объемного интегрирования. Поскольку для этого решения $\nabla^2\Psi=0$ во всех точках поля, то $W_{\mathfrak{D}}$ можно выразить в виде поверхностного интеграла

$$W_{\mathfrak{D}}=\frac{1}{2}\iint\Psi\sigma_1\,ds_1+\frac{1}{2}\iint\Psi\sigma_0\,ds_0, \tag{9}$$

где первый интеграл берется по поверхности s_1, а второй — по s_0.

Если поверхность s_0 находится на бесконечно большом расстоянии от s_1, то потенциал на ней равен нулю и второй член исчезает.

102 б. Приближенное решение любой задачи о распределении заряда на проводниках с заданными потенциалами может быть получено следующим образом.

Пусть s_1 — поверхность проводника или системы проводников, находящихся под потенциалом 1, а s_0 — поверхность всех остальных проводников, в том числе и полого проводника, охватывающего все остальные. Впрочем, этот последний проводник может в некоторых случаях находиться на бесконечно большом расстоянии от остальных.

Начнем с построения совокупности линий, прямых или кривых, идущих от s_1 к s_0.

Вдоль каждой из этих линий будем считать Ψ меняющимся от 1 на s_1 до 0 на s_0. Если P — точка на одной из таких линий (а s_1 и s_0 — точки пересечения линии с поверхностями), то в качестве первого приближения можно положить $\Psi_1=(Ps_0/s_1s_0)$.

Таким образом, мы получаем первое приближение для функции Ψ_1, равной единице на s_1 и нулю на s_0.

Рассчитанное по Ψ_1 значение W_{ψ} больше, чем W.

Теперь примем в качестве второго приближения для силовых линий

$$f=-p\,(d\Psi_1/dx),\qquad g=-p\,(d\Psi_1/dy),\qquad h=-p\,(d\Psi_1/dz). \tag{10}$$

Вектор с составляющими f, g, h нормален поверхностям постоянного Ψ_1. Определим значение p, потребовав, чтобы вектор f, g, h был соленоидальным.

Мы придем к соотношению

$$p\left(\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+\frac{d^2\Psi_1}{dy^2}+\frac{d^2\Psi_1}{dz^2}\right)+\frac{dp}{dx}\frac{d\Psi_1}{dx}+\frac{dp}{dy}\frac{d\Psi_1}{dy}+\frac{dp}{dz}\frac{d\Psi_1}{dz}=0. \qquad (11)$$

Если провести от s_1 к s_0 линию, всюду нормальную к поверхностям постоянного Ψ_1, и обозначить через s длину, отсчитываемую от s_0 по этой линии, то

$$R\frac{dx}{ds}=-\frac{d\Psi_1}{dx}, \qquad R\frac{dy}{ds}=-\frac{d\Psi_1}{dy}, \qquad R\frac{dz}{ds}=-\frac{d\Psi_1}{dz}, \qquad (12)$$

где R — величина напряженности, равная $-d\Psi_1/ds$, так что

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx}\frac{d\Psi_1}{dx}+\frac{dp}{dy}\frac{d\Psi_1}{dy}+\frac{dp}{dz}\frac{d\Psi_1}{dz}&=-R\frac{dp}{ds},\\ &=R^2\frac{dp}{d\Psi_1},\end{aligned} \qquad (13)$$

и уравнение (11) принимает вид

$$p\nabla^2\Psi=R^2\frac{dp}{d\Psi_1}, \qquad (14)$$

откуда

$$p=C\exp\int\limits_0^{\Psi_1}\frac{\nabla^2\Psi_1}{R^2}\,d\Psi_1, \qquad (15)$$

где интеграл понимается как криволинейный интеграл вдоль линии s

Предположим теперь, что вдоль линии s

$$\begin{aligned}-\frac{d\Psi_2}{ds}&=f\frac{dx}{ds}+g\frac{dy}{ds}+h\frac{dz}{ds},\\ &=-p\frac{d\Psi_1}{ds}.\end{aligned} \qquad (16)$$

Тогда

$$\Psi_2=C\int\limits_0^{\Psi}\left(\exp\int\frac{\nabla^2\Psi_1}{R^2}\,d\Psi_1\right)d\Psi_1, \qquad (17)$$

где всегда подразумевается, что интегрирование производится вдоль линии s.

Остается определить постоянную C из условия, что $\Psi_2=1$ на s_1, когда и $\Psi_1=1$, т. е.

$$C\int\limits_0^1\left(\exp\int\limits_0^{\Psi}\frac{\nabla^2\Psi}{R^2}\,d\Psi\right)d\Psi=1. \qquad (18)$$

Таким образом, получается второе приближение для Ψ. Этот процесс может быть повторен снова.

В результате, рассчитав W_{Ψ_1}, $W_{\mathfrak{D}_2}$, W_{Ψ_2} и т. д., мы получим значения емкости, которые последовательно то больше, то меньше истинной емкости и непрерывно приближаются к ней.

Описанный выше метод требует расчета формы линии s и проведения интегрирования вдоль нее. В общем случае это операции, слишком сложные для практических целей. Однако в некоторых частных случаях можно применить более простой метод получения приближения.

102 в. В качестве иллюстрации метода рассмотрим его применение к нахождению последовательных приближений для эквипотенциальных поверхностей и линий индукции в электрическом поле между двумя почти (но не совсем) плоскими и почти параллельными поверхностями, причем одна из них имеет нулевой потенциал, а другая — единичный.

Пусть уравнения этих поверхностей имеют вид

$$z_1=f_1(x,\ y)=a \tag{19}$$

для поверхности с нулевым потенциалом и

$$z_2=f_2(x,\ y)=b \tag{20}$$

для поверхности с единичным потенциалом. Здесь a и b — заданные функции от x и y, причем b всегда больше a. Первые производные a и b по x и y считаются малыми величинами, вторыми и более высокими степенями и произведениями которых можно пренебречь.

Предположим сначала, что линии индукции параллельны оси z. Тогда

$$f=0, \qquad g=0, \qquad dh/dz=0. \tag{21}$$

Таким образом, h постоянно вдоль каждой отдельной линии индукции и

$$\Psi=-4\pi\int_a^z h\,dz=-4\pi h\,(z-a). \tag{22}$$

При $z=b$ $\Psi=1$, так что

$$h=-\frac{1}{4\pi(b-a)} \tag{23}$$

и

$$\Psi=(z-a)/(b-a). \tag{24}$$

Таким образом, мы получили первое приближение для потенциала, дающее систему эквипотенциальных поверхностей, равноотстоящих друг от друга в направлении, параллельном z.

Для получения второго приближения для линий индукции примем, что они всюду нормальны к эквипотенциальным поверхностям, определяемым уравнением (24).

Это условие эквивалентно соотношениям

$$4\pi f=\lambda\frac{d\Psi}{dx}, \qquad 4\pi g=\lambda\frac{d\Psi}{dy}, \qquad 4\pi h=\lambda\frac{d\Psi}{dz}, \tag{25}$$

где λ определяется требованием, чтобы в каждой точке поля выполнялось условие

$$\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=0 \tag{26}$$

и чтобы криволинейный интеграл

$$4\pi\int\left(f\frac{dx}{ds}+g\frac{dy}{ds}+h\frac{dz}{ds}\right)ds, \tag{27}$$

взятый вдоль любой линии индукции от поверхности a до поверхности b, был равен —1.

Положим

$$\lambda=1+A+B\,(z-a)+C\,(z-a)^2 \tag{28}$$

и будем пренебрегать степенями и произведениями A, B, C; пренебрежем также на данном этапе степенями и произведениями первых производных от a и b.

Условие соленоидальности дает при этом

$$B=-\nabla^2 a,\qquad C=-\frac{1}{2}\,\frac{\nabla^2(b-a)}{b-a}, \tag{29}$$

где

$$\nabla^2=-\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right). \tag{30}$$

Вместо того чтобы брать криволинейный интеграл по новой линии индукции, мы возьмем его по старой линии индукции, параллельной z. Тогда второе условие соленоидальности дает

$$1=1+A+(^1/_2)B(b-a)+(^1/_3)\,C(b-a\;^2,$$

откуда

$$A=\frac{1}{6}(b-a)\,\nabla^2(2a+b) \tag{31}$$

и

$$\lambda=1+\frac{1}{6}(b-a)\,\nabla^2(2a+b)-(z-a)\,\nabla^2 a-\frac{1}{2}\frac{(z-a)^2}{b-a}\,\nabla^2(b-a). \tag{32}$$

Таким образом, мы находим второе приближение для составляющих смещения

$$\begin{aligned} -4\pi f&=\frac{\lambda}{b-a}\left[\frac{da}{dx}+\frac{d(b-a)}{dx}\,\frac{z-a}{b-a}\right],\\ -4\pi g&=\frac{\lambda}{b-a}\left[\frac{da}{dy}+\frac{d(b-a)}{dy}\,\frac{z-a}{b-a}\right],\\ -4\pi h&=\frac{\lambda}{b-a} \end{aligned} \tag{33}$$

горое приближение для потенциала

$$\Psi=\frac{z-a}{b-a}+\frac{1}{6}\,\nabla^2(2a+b)(z-a)-\frac{1}{2}\,\nabla^2 a\,\frac{(z-a)^2}{b-a}-\frac{1}{6}\,\nabla^2(b-a)\,\frac{(z-a)^3}{(b-a)^2}. \tag{34}$$

Если обозначить через σ_a и σ_b поверхностные плотности на поверхностях и b, а через Ψ_a и Ψ_b — соответствующие потенциалы, то

$$\sigma_a=\frac{1}{4\pi}(\Psi_a-\Psi_b)\left[\frac{1}{b-a}+\frac{1}{3}\,\nabla^2 a+\frac{1}{6}\,\nabla^2 b\right],$$

$$\sigma_b=\frac{1}{4\pi}(\Psi_b-\Psi_a)\left[\frac{1}{b-a}-\frac{1}{6}\,\nabla^2 a-\frac{1}{3}\,\nabla^2 b\right].$$

ГЛАВА V

МЕХАНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

103. Пусть E_1 и E_2 — две электрические системы, взаимодействие между которыми и является предметом рассмотрения. Пусть распределение заряда в системе E_1 дается объемной плотностью ρ_1 в элементе объема с координатами x_1, y_1, z_1, а ρ_2 — объемная плотность в элементе объема системы E_2 с координатами x_2, y_2, z_2.

Тогда x-составляющая силы отталкивания, действующей на элемент E_1 со стороны элемента E_2, равна

$$\rho_1\rho_2 \frac{x_1-x_2}{r^3} dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2,$$

где $r^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$, а x-составляющая A полной силы, действующей на систему E_1 из-за наличия системы E_2, равна

$$A=\iiiiii \frac{x_1-x_2}{r^3}\rho_1\rho_2\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2, \qquad (1)$$

где интегрирование по x_1, y_1, z_1 производится по объему, занимаемому системой E_1, а интегрирование по x_2, y_2, z_2 — по объему, занимаемому системой E_2. Но поскольку ρ_1 равно нулю вне системы E_1, а ρ_2 равно нулю вне системы E_2, то значение интеграла не изменится при расширении пределов интегрирования, так что мы можем считать пределы интегрирования равными $\pm\infty$.

Это выражение для силы является буквальным переводом на математический язык теории, предполагающей прямое воздействие электрической силы между телами на расстоянии и не придающей значения промежуточной среде.

Если теперь определить потенциал Ψ_2 в точке x_1, y_1, z_1, возникающий из-за наличия системы E_2, уравнением

$$\Psi_2=\iiint \frac{\rho_2}{r}\, dx_2\, dy_2\, dz_2, \qquad (2)$$

то Ψ_2 будет обращаться в нуль на бесконечности и удовлетворять всюду уравнению

$$\nabla^2\Psi_2=4\pi\rho_2. \qquad (3)$$

Величину A можно теперь записать в виде тройного интеграла

$$A=-\iiint \frac{d\Psi_2}{dx_1}\rho_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1. \qquad (4)$$

Здесь предполагается, что потенциал Ψ_2 имеет определенное значение в каждой точке поля. Сила A выражается через этот потенциал и через плотность электричества ρ_1 в первой системе E_1; распределение электричества во второй системе E_2 явно сюда не входит.

Пусть теперь Ψ_1 — потенциал, создаваемый первой системой, выраженный как функция от x, y, z и определяемый уравнением

$$\Psi_1 = \iiint \frac{\rho_1}{r}\, dx_1\, dy_1\, dz_1. \tag{5}$$

Он обращается на бесконечности в нуль и удовлетворяет всюду уравнению

$$\nabla^2\Psi_1 = 4\pi\rho_1. \tag{6}$$

Мы можем теперь исключить ρ_1 из A и получить соотношение

$$A = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{d\Psi_2}{dx_1}\nabla^2\Psi_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1, \tag{7}$$

выражающее силу только через оба потенциала.

104. В рассмотренных до сих пор интегралах безразлично, каковы их пределы, лишь бы они включали весь объем системы E_1. Но теперь мы предположим, что системы E_1 и E_2 таковы, что существует некоторая замкнутая поверхность s, содержащая внутри всю систему E_1 и ни одной части системы E_2.

Положим также

$$\rho=\rho_1+\rho_2, \qquad \Psi=\Psi_1+\Psi_2. \tag{8}$$

Тогда внутри s имеем $\rho_2=0$, $\rho=\rho_1$, а вне s

$$\rho_1=0, \quad \rho=\rho_2. \tag{9}$$

Далее, интеграл

$$A_{11} = -\iiint \frac{d\Psi_1}{dx_1}\rho_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1 \tag{10}$$

дает x-составляющую результирующей силы, действующей на систему E_1 из-за наличия электричества в самой этой системе. Но по теории прямого взаимодействия эта сила должна быть равна нулю, так как сила действия любой частицы P на частицу Q равна и противоположна силе действия Q на P, а поскольку в интеграл входят составляющие обеих сил, то они уничтожают друг друга.

Поэтому можно написать

$$A = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{d\Psi}{dx}\nabla^2\Psi\, dx_1\, dy_1\, dz_1, \tag{11}$$

где Ψ — потенциал, создаваемый обеими системами, а интегрирование ограничено объемом внутри поверхности s, охватывающей всю систему E_1 и ни одной части системы E_2.

105. Если считать, что E_2 действует на E_1 не непосредственно на расстоянии, а через посредство напряжений, распределенных в среде, простирающейся непрерывно от E_2 до E_1, то очевидно, что, зная напряжения во всех точках любой замкнутой поверхности, полностью отделяющей E_1 от E_2, мы можем определить механическое действие E_2 на E_1. Если бы сила, действующая на E_1, не полностью объяснялась напряжением на s, это означало бы прямое взаимодействие между чем-то вне s и чем-то внутри s.

Следовательно, если действие E_2 на E_1 можно объяснить распределением напряжений в промежуточной среде, то оно должно записываться в виде поверхностного интеграла по любой поверхности s, полностью отделяющей E_2 от E_1.

Попытаемся поэтому представить

$$A=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{d\Psi}{dx}\left[\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}\right]dx\,dy\,dz \tag{12}$$

в виде поверхностного интеграла.

По Теореме III, п. 21, это возможно, если удается найти такие X, Y, Z, что

$$\frac{d\Psi}{dx}\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}\right)=\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}. \tag{13}$$

Преобразуя отдельно каждое слагаемое, получим

$$\frac{d\Psi}{dx}\frac{d^2\Psi}{dx^2}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d\Psi}{dx}\frac{d^2\Psi}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dy}\right)-\frac{d\Psi}{dy}\frac{d^2\Psi}{dx\,dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dy}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2.$$

Аналогично

$$\frac{d\Psi}{dx}\frac{d^2\Psi}{dz^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dz}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2.$$

Таким образом, если положить

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2=8\pi p_{xx}, &\quad \frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Psi}{dz}=4\pi p_{yz}=4\pi p_{zy},\\
&\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2=8\pi p_{yy}, &\quad \frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Psi}{dx}=4\pi p_{zx}=4\pi p_{xz},\\
&\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2=8\pi p_{zz}; &\quad \frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dy}=4\pi p_{xy}=4\pi p_{yx},
\end{aligned} \tag{14}$$

то

$$A=\iiint\left(\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{yx}}{dy}+\frac{dp_{zx}}{dz}\right)dx\,dy\,dz, \tag{15}$$

где интегрирование производится по всему объему внутри s.

Преобразуя объемный интеграл по Теореме III, п. 21, получим

$$A=\iint(lp_{xx}+mp_{yx}+np_{zx})\,ds, \tag{16}$$

где ds — элемент любой замкнутой поверхности, охватывающий всю систему E_1, но ни одной части системы E_2, а l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к ds.

Точно так же для составляющих силы, действующей на E_1 по осям y и z, получим

$$B=\iint(lp_{xy}+mp_{yy}+np_{zy})\,ds, \tag{17}$$

$$C=\iint(lp_{xz}+mp_{yz}+np_{zz})\,ds. \tag{18}$$

Если в действительности воздействие системы E_2 на E_1 происходит непосредственно на расстоянии, без вмешательства какой-либо среды, то величины p_{xx} и т. д. должны рассматриваться как простые сокращенные обозначения определенных математических выражений, не имеющие никакого физического смысла.

Но если принять, что взаимодействие между E_2 и E_1 осуществляется посредством напряжений в среде между ними, то, поскольку уравнения (16), (17), (18) дают составляющие результирующей силы, обусловленной действием извне на поверхность s напряжения, шесть компонент которого равны p_{xx} и т. д., величины p_{xx} и т. д. следует рассматривать как составляющие реально существующего в среде напряжения.

106. Чтобы получить более ясное представление о природе этого напряжения, изменим форму части поверхности s так, чтобы элемент ds стал частью эквипотенциальной поверхности. (Такое изменение поверхности всегда допустимо, если только при этом не исключается какая-либо часть E_1 и не включается какая-либо часть E_2).

Обозначим через ν наружную нормаль к ds. Пусть $R=-(d\Psi/d\nu)$ — напряженность электрического поля в направлении ν, тогда $(d\Psi/dx)=-Rl$, $(d\Psi/dy)=-Rm$, $(d\Psi/dz)=-Rn$.

Таким образом, шесть составляющих напряжения равны

$$p_{xx}=\frac{1}{8\pi}R^2(l^2-m^2-n^2),\qquad p_{yz}=\frac{1}{4\pi}R^2mn,$$

$$p_{yy}=\frac{1}{8\pi}R^2(m^2-n^2-l^2),\qquad p_{zx}=\frac{1}{4\pi}R^2nl,$$

$$p_{zz}=\frac{1}{8\pi}R^2(n^2-l^2-m^2),\qquad p_{xy}=\frac{1}{4\pi}R^2lm.$$

Если a, b, c — составляющие силы, действующей на единицу площади элемента ds, то

$$a=lp_{xx}+mp_{yx}+np_{zx}=\frac{1}{8\pi}R^2l,\quad b=\frac{1}{8\pi}R^2m,\quad c=\frac{1}{8\pi}R^2n.$$

Таким образом, сила, с которой часть среды, расположенная по внешнюю сторону ds, действует на часть среды, находящуюся по внутреннюю сторону ds, нормальна к элементу площади ds и направлена наружу, т. е. является натяжением, подобным натяжению веревки, и величина этой силы, приходящейся на единицу площади, равна $R^2/8\pi$.

Пусть теперь элемент ds перпендикулярен пересекаемой им эквипотенциальной поверхности. В этом случае

$$l\frac{d\Psi}{dx}+m\frac{d\Psi}{dy}+n\frac{d\Psi}{dz}=0. \tag{19}$$

Далее:

$$8\pi(lp_{xx}+mp_{yx}+np_{zx})=l\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]+$$
$$+2m\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dy}+2n\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dz}. \tag{20}$$

Умножив (19) на 2 $(d\Psi/dx)$ и вычтя из (20), найдем

$$8\pi(lp_{xx}+mp_{yx}+np_{zx})=-l\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]=-lR^2. \quad (21)$$

Таким образом, составляющие натяжения, действующего на единицу площади элемента ds, равны

$$a=-\frac{1}{8\pi}R^2l, \qquad b=-\frac{1}{8\pi}R^2m, \qquad c=-\frac{1}{8\pi}R^2n.$$

Таким образом, если элемент ds перпендикулярен эквипотенциальной поверхности, то действующая на него сила нормальна к поверхности, а численное значение силы, действующей на единицу площади, то же, что и в предыдущем случае, но направление ее обратное — это не натяжение, а давление.

Итак, мы полностью определили характер напряжения в любой точке среды.

Направление электродвижущей напряженности в точке является главной осью напряжения; напряжение в этом направлении носит характер натяжения, и его численное значение равно

$$p=R^2/8\pi, \quad (22)$$

где R — электродвижущая напряженность.

Любое направление, перпендикулярное этому, также является главной осью напряжения; напряжение вдоль такой оси носит характер давления, численная величина которого также равна p.

Определенное так напряжение — не самого общего вида, так как для него два главных значения напряжения равны друг другу, а третье — равно им численно, но отличается знаком.

Эти условия уменьшают число независимых переменных, определяющих напряжение, с шести до трех; поэтому оно полностью определяется составляющими электродвижущей напряженности $-(d\Psi/dx)$, $-(d\Psi/dy)$, $-(d\Psi/dz)$.

Три соотношения между шестью составляющими напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} p_{yz}^2&=(p_{xx}+p_{yy})(p_{zz}+p_{xx}),\\ p_{zx}^2&=(p_{yy}+p_{zz})(p_{xx}+p_{yy}),\\ p_{xy}^2&=(p_{zz}+p_{xx})(p_{yy}+p_{zz}). \end{aligned} \quad (23)$$

107. Посмотрим теперь, нуждаются ли полученные нами результаты в изменении в случае, когда конечное количество электричества сосредоточено на конечной поверхности, так что объемная плотность заряда бесконечна на поверхности.

Как было показано в п. 78а, 78б, в этом случае составляющие электродвижущей напряженности разрывны на поверхности. Следовательно, и составляющие напряжения тоже разрывны на поверхности.

Пусть l, m, n — направляющие косинусы нормали к ds; P, Q, R — составляющие электродвижущей напряженности на той стороне, куда проведена нормаль, а P', Q', R' — ее составляющие с другой стороны.

Тогда, согласно 78а и 78б

$$P-P'=4\pi\sigma l, \qquad Q-Q'=4\pi\sigma m, \qquad R-R'=4\pi\sigma n, \quad (24)$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

Если a — составляющая по оси x результирующей силы, действующей на единицу поверхности вследствие напряжений по обе стороны от нее, то

$$
\begin{aligned}
a &= l(p_{xx}-p'_{xx})+m(p_{xy}-p'_{xy})+n(p_{xz}-p'_{xz})= \\
&= \frac{1}{8\pi}l\{(P^2-P'^2)-(Q^2-Q'^2)-(R^2-R'^2)\}+\frac{1}{4\pi}m(PQ-P'Q')+\frac{1}{4\pi}n(PR-P'R')= \\
&= \frac{1}{8\pi}l\{(P-P')(P+P')-(Q-Q')(Q+Q')-(R-R')(R+R')\}+ \\
&\quad+\frac{1}{8\pi}m\{(P-P')(Q+Q')+(P+P')(Q-Q')\}+ \\
&\quad+\frac{1}{8\pi}n\{(P-P')(R+R')+(P+P')(R-R')\}= \\
&= \frac{1}{2}l\sigma\{l(P+P')-m(Q+Q')-n(R+R')\}+ \\
&\quad+\frac{1}{2}m\sigma\{l(Q+Q')+m(P+P')\}+\frac{1}{2}n\sigma\{l(R+R')+n(P+P')\}=\frac{1}{2}\sigma(P+P').
\end{aligned}
$$

Таким образом, приняв, что напряжение во всех точках дается уравнениями (14), мы нашли, что x-составляющая результирующей силы, действующей на единицу площади заряженной поверхности, равна поверхностной плотности заряда, умноженной на среднее арифметическое значение x-составляющей электродвижущей напряженности по обе стороны поверхности.

К этому же результату мы пришли в п. 79 фактически аналогичным методом.

Таким образом, гипотеза о напряжении в окружающей среде применима и в случае, когда на конечной поверхности сосредоточено конечное количество электричества.

Обычно значение результирующей силы, действующей на элемент поверхности, выводится из теории действия на расстоянии при рассмотрении участка поверхности, размеры которого много меньше радиусов кривизны поверхности [1].

Возьмем на нормали к средней точке этого элемента поверхности точку P, расстояние которой от поверхности много меньше размеров элемента поверхности. Электродвижущая напряженность в этой точке, обусловленная небольшим участком поверхности, приблизительно равна напряженности, создаваемой бесконечной плоскостью, т. е. равна $2\pi\sigma$ и направлена от поверхности по нормали к ней. В точке P', расположенной точно так же по другую сторону поверхности, напряженность будет такая же, но направлена в противоположную сторону.

Теперь рассмотрим ту часть электродвижущей напряженности, которая создается остальной поверхностью и другими заряженными телами, находящимися на конечном расстоянии от рассматриваемого элемента поверхности. Поскольку точки P и P' бесконечно близки друг к другу, составляющие электродвижущей напряженности, создаваемой зарядами, находящимися на конечном расстоянии, будут в обеих точках одинаковы.

Обозначим x-составляющую электродвижущей напряженности в точках A и A', создаваемую зарядами, находящимися на конечном расстоянии, через

[1] Этот метод берет начало от Лапласа. См. Пуассон «О распределении электричества...». *Mém. de l'Institut*, 1811, p. 30.

P_0. Тогда значение полной x-составляющей в точке A будет $P=P_0+2\pi\sigma l$, а в точке A' — $P'=P_0-2\pi\sigma l$, откуда $P_0=(P+P')/2$.

Но полная механическая сила, действующая на элемент поверхности, должна являться целиком результатом действия зарядов на конечных расстояниях, поскольку суммарная сила действия элемента на самого себя равна нулю. Поэтому x-составляющая силы, приходящейся на единицу площади, равна

$$a=\sigma P_0=\sigma (P+P')/2. \tag{25}$$

108. Если (как в уравнении (2)) определить потенциал через считаемое заданным распределение электричества, то из того, что действие и противодействие для пары точечных зарядов равны и противоположны, следует, что x-составляющая силы воздействия системы на саму себя равна нулю, что может быть записано в виде

$$\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{d\Psi}{dx}\nabla^2\Psi\,dx\,dy\,dz=0. \tag{26}$$

Но если определять Ψ как функцию x, y, z, удовлетворяющую уравнению $\nabla^2\Psi=0$ в любой точке вне замкнутой поверхности s и равную нулю на бесконечном расстоянии, то равенство нулю рассматриваемого объемного интеграла по любому объему, включающему s, представляется нуждающимся в доказательстве.

Один из методов доказательства основан на теореме (п. 100в), утверждающей, что если $\nabla^2\Psi$ задано в любой точке и $\Psi=0$ на бесконечном расстоянии, то значение Ψ в каждой точке определено и равно

$$\Psi'=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{1}{r}\nabla^2\Psi\,dx\,dy\,dz, \tag{27}$$

где r — расстояние между элементом $dxdydz$, где концентрация Ψ задана равной $\nabla^2\Psi$, и точкой x', y', z', где ищется Ψ'.

Этим теорема сводится к полученному нами следствию из первого определения Ψ.

Однако если рассматривать Ψ как первичную функцию от x, y, z, через которую выражаются остальные, то целесообразнее свести (26) к поверхностному интегралу

$$A=\iint (lp_{xx}+mp_{xy}+np_{xz})dS. \tag{28}$$

Если поверхность S находится всюду на большом расстоянии a от поверхности s, охватывающей все точки, в которых $\nabla^2\Psi$ отлично от нуля, то, как мы знаем, Ψ не может численно превосходить e/a ($4\pi e$ — объемный интеграл от $\nabla^2\Psi$), R не может превосходить — $(d\Psi/da)$, т. е. e/a^2, а величины p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} не могут каждая превосходить p, т. е. $R^2/(8\pi)$ или $e^2/(8\pi a^4)$. Значит, поверхностный интеграл по сфере очень большого радиуса a не может превосходить $e^2/(2a^2)$ и при неограниченно возрастающем радиусе поверхностный интеграл стремится к нулю.

Но этот поверхностный интеграл равен объемному интегралу (26), причем значение этого интеграла одно и то же, какой бы объем ни охватывала поверхность S, лишь бы она включала в себя все точки, где $\nabla^2\Psi$ отлично от нуля. Раз этот интеграл равен нулю при бесконечном a, он должен быть равен нулю и для любой поверхности, охватывающей все точки, в которых $\nabla^2\Psi$ отлично от нуля.

109. Рассмотренное в этой главе распределение напряжений в точности совпадает с распределением, к которому пришел Фарадей в своих исследованиях индукции через диэлектрики. Он резюмирует свои результаты следующими словами:

«1297. Прямая индуктивная сила, которую можно вообразить действующей по линиям между двумя ограничивающими и заряженными проводящими поверхностями, сопровождается боковой или поперечной силой, эквивалентной расширению или отталкиванию этих воображаемых линий (1224); или иначе: сила притяжения, существующая между частицами диэлектрика в направлении индукции, сопровождается силой отталкивания, вызывающей их расхождение в поперечном направлении (1304).

1298. Индукция состоит, по-видимому, в некотором поляризованном состоянии частиц, в которое их приводит наэлектризованное тело, поддерживающее это действие, причем у частиц появляются положительные или отрицательные точки или участки, расположенные симметрично по отношению друг к другу или к индуцирующим поверхностям или частицам. Это состояние должно быть вынужденным, ибо оно создается и поддерживается только силой и при удалении этой силы падает до нормального состояния покоя. Одним и тем же количеством электричества оно может длительно *поддерживаться* только в изоляторах, потому что только они могут сохранять такое состояние частиц».

Это точное изложение тех выводов, к которым мы пришли в наших математических исследованиях. В каждой точке среды существует состояние напряжения, при котором вдоль силовых линий имеет место натяжение, а по всем перпендикулярным им направлениям — давление, причем численно давление равно натяжению и оба они меняются как квадрат результирующей силы в точке.

Выражение «электрическое натяжение» применялось в разных смыслах различными авторами. Я буду всегда применять его для обозначения натяжения вдоль силовой линии, меняющегося, как мы видели, от точки к точке и всегда пропорционального квадрату результирующей силы в точке.

110. Предположение о существовании напряженного состояния такого типа в газообразном или в жидком диэлектрике, например в воздухе или скипидаре, может на первый взгляд показаться противоречащим установленному закону о том, что в жидкости давление во все стороны одинаково. Однако при выводе этого закона из рассмотрения подвижности и равновесия частей жидкости подразумевается, что в жидкости нет никаких воздействий типа предполагаемого здесь воздействия вдоль силовых линий.

Рассмотренное нами состояние напряжения вполне согласуется с подвижностью и равновесием жидкости, поскольку, как мы видели, для любой части жидкости, лишенной заряда, равнодействующая сил, обусловленных напряжениями на ее поверхности, равна нулю, как бы велики эти напряжения ни были. Только если какая-либо часть жидкости заряжена, то ее равновесие нарушается напряжениями на поверхности, но мы знаем, что в этом случае жидкость действительно приходит в движение. Итак, предположенное состояние напряжения не противоречит равновесию жидкого диэлектрика.

Исследованная в Главе IV, п. 99а величина W может быть истолкована как энергия в среде, обусловленная распределением напряжений. Из теорем этой главы следует, что распределение напряжений, удовлетворяющее приведенным

там условиям, обеспечивает также абсолютный минимум W. Но если для какой-либо конфигурации энергия минимальна, то эта конфигурация равновесна и равновесие устойчиво. Таким образом, диэлектрик, находящийся под индуктивным воздействием заряженных тел, сам по себе придет в состояние напряжения, распределенного описанным нами способом.

Не следует забывать, что мы сделали лишь первый шаг в теории воздействия среды. Мы приняли, что она находится в состоянии напряжения, но мы никак не объяснили это напряжение, не показали, как оно поддерживается. Однако этот шаг представляется мне весьма важным, так как он объясняет взаимодействием прилегающих частей среды явления, которые раньше считались объяснимыми только с помощью взаимодействия на расстоянии.

111. Мне не удалось сделать следующий шаг, т. е. дать механическое объяснение этих напряжений в диэлектрике. Поэтому я оставляю теорию на этой ступени и укажу лишь на другие стороны явления индукции в диэлектрике.

I. Электрическое смещение. Когда индукция передается через диэлектрик, то прежде всего возникает смещение электричества в направлении индукции. Так, например, в Лейденской банке, внутреннее покрытие которой заряжено положительно, а внешнее отрицательно, смещение положительного электричества в толще стекла направлено изнутри наружу.

Любое увеличение этого смещения эквивалентно току положительного электричества, текущему изнутри наружу во время увеличения смещения, а любое уменьшение смещения эквивалентно току в обратном направлении.

Полное количество электричества, смещающееся через любую площадку поверхности, зафиксированную в диэлектрике, измеряется величиной, которую мы уже рассмотрели в п. 75 как поверхностный интеграл от индукции через площадь, умноженный на $K/4\pi$, где K — удельная индуктивная способность диэлектрика.

II. Поверхностный заряд частиц диэлектрика. Представим себе любую часть диэлектрика, большую или малую, отделенной (мысленно) от остального диэлектрика замкнутой поверхностью. Тогда мы должны будем считать, что на каждом элементе этой поверхности имеется заряд, измеряемый полным смещением электричества через этот элемент, *отсчитываемым внутрь*.

В случае лейденской банки, внутреннее покрытие которой заряжено положительно, на любом участке стекла внутренняя сторона будет заряжена положительно, а внешняя — отрицательно. Если этот участок находится целиком внутри стекла, то его поверхностный заряд нейтрализуется благодаря противоположному заряду прилегающих к нему частей, но если он прилегает к проводящему телу, внутри которого невозможно индуктивное состояние, то поверхностный заряд не нейтрализуется, а образует тот кажущийся заряд, который обычно называют Зарядом Проводника.

Таким образом, заряд на граничной поверхности между проводником и окружающим его диэлектриком, который в старой теории назывался зарядом проводника, следует в теории индукции называть поверхностным зарядом окружающего диэлектрика.

Согласно этой теории, все заряды — это остаточный эффект поляризации диэлектрика. Поляризация существует во всей толще вещества, но там она нейт-

рализуется наложением противоположно заряженных частей, так что эффект проявляется только на поверхности диэлектрика.

Эта теория полностью объясняет теорему п. 77, что полная индукция через замкнутую поверхность равна полному количеству электричества, умноженному на 4π. Ибо то, что мы называем индукцией через поверхность, есть просто электрическое смещение, умноженное на 4π, а полное смещение наружу по необходимости равно полному заряду внутри поверхности.

Теория объясняет также невозможность сообщения «абсолютного заряда» веществу, поскольку каждая частица диэлектрика имеет равные и противоположные заряды на обоих концах, или, лучше сказать, эти заряды являются лишь проявлением единого явления, которое можно назвать Электрической Поляризацией.

Поляризованная таким образом диэлектрическая среда является вместилищем электрической энергии, причем количество энергии в единице объема среды численно равно электрическому натяжению на единицу площади, и оба они равны половине произведения смещения на напряженность электрического поля, т. е.

$$p=\frac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{E}=\frac{1}{8\pi}K\mathfrak{E}^2=\frac{2\pi}{K}\mathfrak{D}^2,$$

где p — электрическое натяжение, $\mathfrak{D}$ — смещение, $\mathfrak{E}$ — электродвижущая напряженность, K — удельная индуктивная способность.

Если среда не является совершенным изолятором, то вынужденное состояние, которое мы называем поляризацией, постепенно исчезает. Среда поддается электродвижущей силе, электрическое напряжение ослабляется, и потенциальная энергия вынужденного состояния переходит в тепло. Скорость, с которой происходит распад состояния поляризации, зависит от природы среды. Для некоторых типов стекла могут пройти дни или годы, прежде чем поляризация упадет до половины своего начального значения. Для меди такое изменение происходит менее чем за одну биллионную долю секунды.

Мы предположили, что среда, после того как она поляризована, просто предоставлена сама себе. В явлении, называемом электрическим током, постоянное прохождение электричества через среду стремится восстановить состояние поляризации в той же мере, в какой проводимость среды способствует ее исчезновению. Поэтому внешний агент, поддерживающий ток, всегда совершает работу по восстановлению поляризации среды. Но поляризация непрерывно стремится ослабнуть, а ее потенциальная энергия непрерывно переходит в тепло, так что в конце концов энергия, затрачиваемая на поддержание тока, расходуется на постепенное повышение температуры проводника до тех пор, пока за счет теплопроводности и излучения с поверхности не будет теряться столько тепла, сколько порождается электрическим током.

ГЛАВА VI
О ТОЧКАХ И ЛИНИЯХ РАВНОВЕСИЯ

112. Если в какой-либо точке электрического поля равнодействующая сила равна нулю, то такая точка называется Точкой равновесия.

Если каждая точка какой-либо линии является точкой равновесия, то такая линия называется Линией равновесия.

Условия того, что точка является точкой равновесия, имеют вид $(dV/dx)=0$,

$$(dV/dy)=0,\ (dV/dz)=0.$$

Таким образом, в такой точке величина V максимальна, минимальна или стационарна по отношению к вариациям координат. Но потенциал может иметь максимум или минимум только в точке, несущей положительный или отрицательный заряд или же в конечной области, ограниченной положительным или отрицательным поверхностным зарядом. Поэтому, если в части поля, не несущей заряда, существует точка равновесия, то это точка стационарности потенциала, а не точка максимума или минимума.

Действительно, условие максимума или минимума заключается в том, что (d^2V/dx^2), (d^2V/dy^2) и (d^2V/dz^2) должны быть все отрицательны или положительны, если они имеют конечные значения.

Но согласно уравнению Лапласа, в точке, где нет заряда, сумма этих трех величин равна нулю, так что это условие невыполнимо.

Вместо того чтобы исследовать аналитические условия для случаев, когда все составляющие силы одновременно обращаются в нуль, мы дадим общее доказательство с помощью эквипотенциальных поверхностей.

Если в какой-либо точке P достигается истинный максимум V, то во всех других точках в непосредственной окрестности P значения V меньше, чем в P. Следовательно, P окружено системой замкнутых эквипотенциальных поверхностей, каждая из которых охватывает предыдущую, и во всех точках какой-либо из этих поверхностей электрическая сила направлена наружу. Но мы доказали в п. 76, что поверхностный интеграл от электродвижущей напряженности по любой замкнутой поверхности дает полный заряд внутри этой поверхности, умноженный на 4π. В этом случае сила направлена всюду наружу, так что этот поверхностный интеграл обязательно положительный, и, значит, внутри поверхности имеется положительный заряд, а так как мы можем взять эту поверхность сколько угодно близкой к P, то положительный заряд имеется в точке P.

Точно так же можно показать, что если V имеет в P минимум, точка P заряжена отрицательно.

Пусть теперь P — точка равновесия в области, лишенной зарядов. Опишем вокруг P сферу очень малого радиуса. Как мы видели, потенциал не может быть на этой поверхности всюду больше, чем в P, или всюду меньше, чем в P. Следовательно, в некоторых местах поверхности он больше, чем в P, а в некоторых меньше. Эти участки поверхности разделяются линиями, на которых потенциал равен потенциалу в точке P. Вдоль линий, проведенных из P в точки, где потенциал меньше, чем в P, электрическая сила направлена от P, а вдоль линий, проведенных в точки с бо́льшим потенциалом, сила направлена к P. Следователь-

но, точка P является для одних направлений точкой устойчивого равновесия, а для других — точкой неустойчивого равновесия.

113. Чтобы определить количество точек или линий равновесия, рассмотрим поверхность (или поверхности), на которых потенциал равен заданному значению C. Назовем области, в которых потенциал меньше C, отрицательными, а области, в которых он больше C, положительными. Пусть V_0 — наименьшее, а V_1 — наибольшее значение потенциала в электрическом поле. Если положить $C=V_0$, то отрицательная область будет включать лишь точку или проводник с наименьшим потенциалом, который обязательно заряжен отрицательно. Положительную область образует остальное пространство, и, поскольку она окружает отрицательную область, она является перифрактической областью (см. п. 18).

Если теперь увеличить значение C, то отрицательная область увеличится и образуются новые отрицательные области вокруг отрицательно заряженных тел. Для каждой образуемой таким образом отрицательной области требуется одна степень перифрактичности окружающей положительной области.

По мере расширения различных отрицательных областей две или несколько областей могут сомкнуться в какой-либо точке или по линии. Если смыкаются $n+1$ поверхностей, то положительная область теряет n степеней перифрактичности, а точка или линия смыкания является точкой или линией равновесия n-й степени.

Когда C становится равным V_1, то положительная область сводится к точке или к проводнику с наибольшим потенциалом и, следовательно, имеет нулевую степень перифрактичности. Следовательно, если каждую точку или линию равновесия считать один, два или n раз в соответствии с ее степенью, то полное число подсчитываемых так точек или линий равновесия будет на единицу меньше числа отрицательно заряженных тел.

Есть еще другие точки или линии равновесия, получающиеся при образовании разделенных положительных областей и повышении перифрактичности отрицательной области. Число таких точек или линий равновесия, подсчитываемое с учетом их степени, на единицу меньше числа положительно заряженных тел.

Назовем точку или линию равновесия положительной, если она находится на стыке двух или нескольких положительных областей, и отрицательной, если она находится в месте соединения отрицательных областей. Тогда при p положительно заряженных телах и n отрицательно заряженных телах сумма степеней положительных точек или линий равновесия равна $p-1$, а отрицательных — $n-1$. При этом бесконечно удаленную поверхность, окружающую электрическую систему, считают телом с зарядом, равным по величине и противоположным по знаку сумме зарядов системы.

Однако кроме этого определенного числа точек или линий равновесия, получающихся при соединении различных областей, могут быть и другие, о которых мы можем лишь сказать, что их должно быть четное число. Потому что если при расширении какой-либо отрицательной области она смыкается сама с собой, то она становится циклической. При повторном смыкании с самой собой она может приобрести любую степень цикличности, причем каждая степень соответствует точке или линии равновесия, в которых возникла цикличность.

По мере расширения отрицательной области и заполнения ею всего пространства она теряет все степени цикличности, которые она приобрела ранее, и

становится в конце концов ациклической. Таким образом, имеется также совокупность точек или линий равновесия, в которых теряется цикличность, причем число степеней равно числу степеней для точек или линий, в которых она увеличивается.

При произвольной форме заряженных тел или проводников мы можем лишь утверждать, что число этих дополнительных точек или линий четно, но для точечных зарядов и сферических проводников их число не может превышать $(n-1)\cdot(n-2)$, где n — количество тел.

114. Потенциал вблизи любой точки P может быть разложен в ряд $V=V_0+H_1+H_2+\ldots$, где H_1, H_2, ... — однородные функции от x, y, z соответственно степени 1, 2 и т. д.

Поскольку в точке равновесия первые производные от V обращаются в нуль, то $H_1=0$, если P — точка равновесия.

Пусть H_n — первая отличная от нуля функция, тогда вблизи точки P можно пренебречь всеми функциями более высокой степени, чем H_n.

Но $H_n=0$ является уравнением конуса степени n, и этот конус является соприкасающимся конусом к эквипотенциальной поверхности в точке P.

Таким образом, получается, что проходящая через точку P эквипотенциальная поверхность имеет в этой точке коническую точку с соприкасающимся конусом степени два или выше. Пересечение этого конуса со сферой с центром в вершине называется Нодальной линией.

Если точка P не находится на линии равновесия, то нодальная линия не имеет самопересечений и состоит из n или меньшего числа замкнутых кривых.

Если нодальная линия имеет самопересечение, то точка P находится на линии равновесия и эквипотенциальная поверхность, проходящая через P, имеет самопересечение по этой линии.

Если самопересечения на нодальной линии расположены не в противоположных точках сферы, то точка P лежит на пересечении трех или большего числа линий равновесия, так как эквипотенциальная поверхность, проходящая через P, должна самопересекаться по каждой линии равновесия.

115. Если пересекаются n листов одной и той же эквипотенциальной поверхности, то углы их взаимного пересечения обязательно равны π/n.

Действительно, примем касательную к линии пересечения за ось z. Тогда $d^2V/dz^2=0$. Пусть далее ось x направлена по касательной и одному из листов, тогда $d^2V/dx^2=0$. Отсюда согласно уравнению Лапласа следует, что и $d^2V/dy^2=0$, т. е. что ось y касательна к другому листу.

При этом предполагается, что H_2 конечно. Если же H_2 равно нулю, то, принимая по-прежнему касательную к линии пересечения за ось z и полагая $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, получим, что поскольку $d^2V/dz^2=0$, то

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=0,$$

или

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2V}{d\theta^2}=0.$$

Решение этого уравнения в виде суммы по возрастающим степеням r представляется так:

$$V=V_0+A_1r\cos(\theta+\alpha_1)+A_2r^2\cos(2\theta+\alpha_2)+\ldots+A_nr^n\cos(n\theta+\alpha_n).$$

В точке равновесия $A_1=0$. Если первый отличный от нуля член имеет степень r^n, то

$$V-V_0=A_nr^n\cos(n\theta+\alpha_n)+\text{чл. высш. порядка по } r.$$

Это уравнение показывает, что n листов эквипотенциальной поверхности пересекают друг друга под углом π/n. Эта теорема была сформулирована Рэнкином [1].

В свободном пространстве линия равновесия может существовать лишь в особых условиях, но на поверхности проводника она существует обязательно, если на одной части поверхности проводника плотность заряда положительна, а на другой — отрицательна.

Для того чтобы различные части поверхности проводника могли быть заряжены противоположными зарядами, необходимо, чтоб в поле были области, где потенциал выше потенциала тела, и другие области, где потенциал ниже потенциала тела.

Рассмотрим сначала два проводника, заряженных положительно до одинакового потенциала. Где-то между этими двумя телами будет располагаться точка равновесия. Будем постепенно уменьшать потенциал первого тела. Тогда точка равновесия будет постепенно приближаться к нему и в некоторый момент окажется на его поверхности. При дальнейшем изменении потенциала эквипотенциальная поверхность вокруг второго тела, имеющая потенциал, равный потенциалу первого тела, начнет пересекать под прямым углом поверхность первого тела по некоторой замкнутой кривой, являющейся линией равновесия. Эта линия равновесия, обметя всю поверхность проводника, стягивается затем вновь в точку. После этого точка равновесия удаляется от тела по другую его сторону и уходит в бесконечность, когда заряды обоих тел становятся равными по величине и противоположными по знаку.

Теорема Ирншоу

116. Заряженное тело, помещенное в поле электрической силы, не может находиться в состоянии устойчивого равновесия.

Сначала предположим, что электричество на подвижном теле A, а также в системе окружающих тел B фиксировано относительно этих тел.

Пусть V — потенциал в произвольной точке подвижного тела, обусловленный действием окружающих тел B, а e — заряд в некотором малом участке тела A, примыкающем к этой точке. Тогда потенциальная энергия тела A по отношению к системе B равна $M=\Sigma(Ve)$, где суммирование производится по всем заряженным участкам тела A.

---

[1] «Сводка свойств некоторых линий потока», *Phil. Mag.*, Oct., 1864. См. также Thomson and Tait, «*Natural Philosophy*», § 780; Rankine and Stokes, *Proc. R. S.*, 1867, p. 468, а также W. R. Smith, *Proc. R. S. Edin.*, 1869—70, p. 79.

Пусть a, b, c — координаты произвольного заряженного участка тела A относительно осей, фиксированных в теле A и параллельных осям x, y, z. Пусть абсолютные координаты начала отсчета этих осей равны ξ, η, ζ.

Предположим пока, что тело A может совершать лишь поступательное движение. Тогда абсолютные координаты точки a, b, c равны $x=\xi+a$, $y=\eta+b$, $z=\zeta+c$.

Потенциал тела A по отношению к системе B может быть выражен как сумма членов, в каждом из которых V выражено через a, b, c и ξ, η, ζ. Сумма этих членов является функцией от a, b, c, постоянных для любой точки тела, и от ξ, η, ζ, изменяющихся при перемещении тела.

Поскольку каждый член суммы удовлетворяет уравнению Лапласа, то и вся сумма удовлетворяет этому уравнению:

$$\frac{d^2M}{d\xi^2}+\frac{d^2M}{d\eta^2}+\frac{d^2M}{d\zeta^2}=0.$$

Дадим телу A малое перемещение, так что $d\xi=l\,dr$, $d\eta=mdr$, $d\zeta=ndr$, и пусть dM — приращение потенциала тела A по отношению к окружающей системе B.

Если бы оно было положительно, то для увеличения r надо было бы совершить работу и существовала бы сила $R=dM/dr$, стремящаяся уменьшить r и вернуть тело A в прежнее положение, так что для этого перемещения равновесие было бы устойчивым. Если же, наоборот, оно отрицательно, то сила стремится увеличить r, и равновесие неустойчиво.

Рассмотрим теперь сферу с центром в начале координат и радиусом r столь малым, что при нахождении фиксированной точки тела A внутри этой сферы ни одна точка подвижного тела A не может совпасть с какой-либо частью внешней системы B. Тогда, поскольку внутри сферы $\nabla^2M=0$, интеграл $\iint\frac{dM}{dr}dS$ по поверхности сферы равен нулю.

Следовательно, если в какой-либо части поверхности сферы dM/dr положительно, то должна существовать другая часть поверхности, на которой оно отрицательно, и если тело A сместить по направлению, вдоль которого dM/dr отрицательно, то оно будет стремиться отклоняться от первоначального положения, так что равновесие тела обязательно неустойчиво.

Таким образом, равновесие тела неустойчиво, даже если тело может двигаться только поступательно; оно *тем более* неустойчиво для совершенно свободного тела.

Предположим теперь, что тело A является проводником. Мы могли бы рассматривать этот случай как равновесие системы тел, считая подвижное электричество частью этой системы. Тогда мы могли бы заключить, что поскольку система является неустойчивой, будучи лишенной многих степеней свободы при фиксировании распределения электричества, то она *тем более* неустойчива при восстановлении этих степеней свободы.

Но этот случай можно рассмотреть и специально следующим образом.

Пусть сначала распределение электричества на теле A фиксировано и тело A перемещается поступательно на небольшое расстояние dr. Обусловленное этим увеличение потенциала тела A было уже рассмотрено.

Пусть теперь электрическим зарядам предоставлена возможность переместиться по телу A в свое положение равновесия, которое всегда устойчиво. При этом перемещении потенциал обязательно *уменьшится* на величину, которую мы обозначим через Cdr.

Таким образом, полное увеличение потенциала при нефиксированных электрических зарядах равно $[(dM/dr)—C]dr$, а сила, стремящаяся возвратить тело A назад в первоначальное положение, равна $(dM/dr)—C$, где C всегда положительно.

Но мы показали, что для некоторых направлений dM/dr отрицательно, следовательно, при нефиксированном электричестве неустойчивость этих направлениях возрастает.

ГЛАВА VII

ФОРМЫ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЛИНИЙ ИНДУКЦИИ В ПРОСТЫХ СЛУЧАЯХ

117. Мы видели, что нахождение распределения электричества на поверхности проводников можно связать с решением уравнения Лапласа

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0,$$

где V — функция от x, y, z всюду конечная и непрерывная, обращающаяся в нуль на бесконечности и имеющая заданное постоянное значение на поверхности каждого проводника.

В общем случае не представляется возможным решить существующими математическими методами это уравнение, удовлетворив произвольно заданным условиям, но можно легко привести сколько угодно выражений для функции V, удовлетворяющей этому уравнению, и найти для каждого выражения форму поверхностей проводников, для которой эта функция является истинным решением.

Таким образом, задача определения формы проводников, соответствующей заданному потенциалу, которую естественно назвать обратной задачей, оказывается более легко решаемой, чем прямая задача определения потенциала при заданной форме проводников.

Фактически все известные нам решения задач электричества получены именно таким обратным процессом. Поэтому специалисту в области электричества чрезвычайно важно знать, какие задачи были решены таким способом, так как единственный метод, которым можно надеяться решить новую задачу, это сведение ее к какому-либо случаю, когда подобная задача была решена обратным методом.

Знание результатов обратных задач можно использовать двумя способами. Если требуется построить инструмент для производства электрических измерений с максимальной точностью, то мы можем выбирать такие формы поверхностей заряженных тел, которые соответствуют случаям, для которых мы знаем точное решение. Если же, наоборот, требуется определить электризацию тел заданной формы, то следует начать с какого-нибудь случая, когда одна из эквипотенциаль-

ных поверхностей имеет форму, более или менее близкую к заданной, а затем методом проб изменять решение, пока оно не приблизится к искомому.

Конечно, этот метод с математической точки зрения весьма несовершенен, но это единственный метод, имеющийся в нашем распоряжении, и если у нас нет возможности выбирать наши условия, то мы можем произвести лишь приближенный расчет электризации. Таким образом, нам нужно знать форму эквипотенциальных поверхностей и линий индукции для возможно большего числа различных случаев, какие только удастся собрать и запомнить. Для некоторых случаев, как, например для сферических проводников, известны математические методы, которыми можно воспользоваться. В других случаях не следует гнушаться и более скромным методом прямого построения пробных графиков полей и потенциалов на бумаге и выбора наименее отклоняющегося от требуемого.

Мне представляется, что этот последний метод может быть полезен даже в случае, когда имеется точное решение. Как я убедился, наглядное представление форм эквипотенциальных поверхностей часто приводит к правильному выбору математического метода решения.

Поэтому я построил несколько графиков систем эквипотенциальных поверхностей и линий индукции, чтобы читатель мог привыкнуть к форме этих поверхностей и линий. Способы построения таких графиков будут пояснены в п. 123.

118. На первом графике, приведенном в конце этого тома, дано сечение эквипотенциальных поверхностей, окружающих два точечных одноименных заряда, количества электричества в которых относятся как 20 к 5.

Обе точки окружены здесь системой эквипотенциальных поверхностей, которые по мере уменьшения все более приближаются к сферам, хотя строго сферической ни одна из поверхностей не является. Если две такие поверхности, окружающие соответственно первую и вторую точку, принять за поверхности двух проводящих тел, почти, но не совсем точно сферических, и если эти тела зарядить соответственно одноименными зарядами в отношении 4 к 1, то этот график будет представлять их эквипотенциальные поверхности, если только убрать все поверхности, проходящие внутри обоих тел. Из графика видно, что взаимодействие между этими телами такое же, что и между двумя точками с теми же зарядами, находящимися не точно на середине оси каждого тела, а несколько более удаленных от другого тела, чем середина оси.

Из того же графика можно увидеть, каково будет распределение электричества на любой из окружающих оба центра овалообразных фигур, один конец которых толще другого. Такое тело, будучи заряжено 25 единицами электричества и свободное от внешнего влияния, будет иметь наибольшую плотность электричества на тонком конце, меньшую — на толстом и самую малую плотность — на окружности, которая несколько ближе к тонкому концу, чем к толстому.

Существует одна эквипотенциальная поверхность, показанная на чертеже пунктиром, состоящая из двух лепестков, встречающихся в конической точке P. Эта точка является точкой равновесия, а поверхностная плотность на теле, ограниченном этой поверхностью, была бы равна нулю в этой точке.

Силовые линии образуют в этом случае две раздельные системы, отделяемые друг от друга поверхностью шестого порядка, показанной пунктирной линией, проходящей через точку равновесия и несколько напоминающей лист двухполостного гиперболоида.

Этот график можно считать также представляющим силовые линии и эквипотенциальные поверхности для двух сфер гравитирующей материи с отношением масс 4 к 1.

119. На втором графике мы вновь имеем два точечных заряда, относящихся как 20 к 5, но один из них положительный, а другой отрицательный. В этом случае одна из эквипотенциальных поверхностей, а именно та, что соответствует нулевому потенциалу, является сферой. На графике она изображена пунктирной окружностью Q. Важная роль этой сферической поверхности станет ясна далее, когда мы дойдем до теории электрических изображений.

Из этого графика можно видеть, что если два округлых тела заряжены электричеством противоположного рода, то они притягиваются друг к другу как два точечных заряда с теми же зарядами, но расположенные несколько ближе друг к другу, чем срединные точки этих округлых тел.

И здесь одна из эквипотенциальных поверхностей, показанная пунктиром, состоит из двух лепестков, причем внутренний лепесток охватывает точку с зарядом 5, а внешний охватывает оба тела. Оба лепестка смыкаются в конической точке P, являющейся точкой равновесия.

Если поверхность проводника имеет форму внешнего лепестка, т. е. округлую форму с конической впадиной на одном конце оси, как у яблока, то можно определить значение поверхностной плотности в любой точке при электризации этого проводника. В частности, на дне впадины она равна нулю.

Эта поверхность охватывается другими, у которых впадина уже закруглена, и постепенно уплощается и, наконец, исчезает для эквипотенциальной поверхности, проходящей через точку M.

Силовые линии на этом графике образуют две системы, разделенные поверхностью, проходящей через точку равновесия.

Если рассматривать точки на оси за точкой B, то видно, что результирующая сила уменьшается до кратной точки P, где она обращается в нуль. Затем она меняет знак и достигает максимума в точке M, после чего монотонно убывает.

Однако этот максимум является максимумом лишь по отношению к другим точкам на этой оси: ибо если рассмотреть поверхность, проходящую через M перпендикулярно этой оси, то в точке M сила будет минимальна по сравнению с соседними точками этой поверхности.

120. На графике III представлены эквипотенциальные поверхности и линии индукции, обусловленные точечным зарядом в 10 единиц, помещенным в точке A и окруженным силовым полем, которое до введения точечного заряда было однородным по величине и направлению во всем пространстве.

Каждая эквипотенциальная поверхность имеет свою асимптотическую плоскость. Одна из эквипотенциальных поверхностей, показанная пунктиром, имеет коническую точку и лепесток, охватывающий точку A. Расположенные ниже эквипотенциальные поверхности однолистные и имеют углубление вблизи оси. Выше расположены эквипотенциальные поверхности, состоящие из замкнутой части, охватывающей точку A, и отдельного листа с небольшим углублением вблизи оси.

Если одну из поверхностей ниже точки A принять за поверхность проводника, а за поверхность второго проводника, находящегося под другим потенциалом, принять другую эквипотенциальную поверхность, расположенную далеко внизу

под точкой A, то система линий и поверхностей между этими двумя проводниками будет указывать распределение электрического поля. Если нижний проводник расположен очень далеко от точки A, то его поверхность очень близка к плоскости, так что мы имеем здесь решение для распределения электричества на двух поверхностях, которые обе почти плоские и параллельные друг другу, не считая выступа на верхней поверхности вблизи оси, величина которого зависит от того, какую эквипотенциальную поверхность мы выбираем.

121. На графике IV представлены эквипотенциальные поверхности и линии индукции для трех точечных зарядов A, B и C, причем заряд A равен 15 единицам положительного электричества, заряд B — 12 единицам отрицательного электричества и заряд C — 20 единицам положительного электричества. Точечные заряды расположены на одной прямой, причем $AB=9$, $BC=16$, $AC=25$.

В этом случае поверхность, на которой потенциал равен нулю, состоит из двух сфер с центрами в точках A и C и с радиусами, равными 15 и 20. Сферы эти пересекаются по окружности, которая проходит через плоскость рисунка в точках D и D'; центром этой окружности является точка B, а радиус ее равен 12. Эта окружность — пример линии равновесия, так как в каждой ее точке равнодействующая сила равна нулю.

Если мы предположим, что сфера с центром в точке A является проводником с зарядом в 3 единицы положительного электричества, находящимся под индуктивным воздействием 20 единиц положительного электричества в точке C, то этот случай будет представлен тем же графиком, если только убрать все линии внутри сферы A. Часть этой сферической поверхности, находящаяся под малой окружностью DD', будет заряжена отрицательно из-за влияния заряда C. Вся остальная поверхность сферы будет заряжена положительно, а самая малая окружность DD' будет линией нулевого заряда.

Этот же график можно считать представляющим сферу с центром в C, заряженную 8 единицами положительного электричества и находящуюся под воздействием 15 единиц положительного электричества, помещенного в точку A.

Можно также считать, что на графике представлен проводник, образуемый большими сегментами обеих сфер, смыкающимися в DD', заряженными 23 единицами положительного электричества.

Мы еще вернемся к рассмотрению этого графика как иллюстрации к томсоновской Теории Электрических Изображений, см. п. 168.

122. Эти графики следует изучать как иллюстрации языка Фарадея, таких его выражений, как «силовые линии», «силы наэлектризованного тела» и т. д.

Слово Сила означает ограниченное выражение того действия между двумя материальными телами, благодаря которому их движение становится отличным от движения, которое было бы в отсутствие этого действия. Явление в целом при одновременном рассмотрении обоих тел называется Напряжением и может быть описано как передача количества движения от одного тела к другому. Если мы сосредоточиваем внимание на первом из двух тел, то напряжение, действующее на него, мы называем Движущей Силой или просто Силой, действующей на это тело. Она измеряется количеством движения, получаемым телом в единицу времени.

Механическое взаимодействие двух заряженных тел — это напряжение, а воздействие на одно из этих тел — сила. Сила, действующая на малое заряженное

тело, пропорциональна его собственному заряду, а сила, приходящаяся на единицу заряда, называется Напряженностью силы.

Слово Индукция употребляется Фарадеем для обозначения способа взаимосвязи зарядов наэлектризованных тел: каждая единица положительного заряда связана с единицей отрицательного заряда линией, направление которой в жидких диэлектриках совпадает в каждой точке с направлением электрической напряженности. Такая линия часто называется Силовой лнией, но правильнее было бы называть ее линией Индукции.

Далее, количество электричества в теле измеряется, согласно идеям Фарадея, *числом* силовых линий, или, лучше сказать, линий индукции, исходящих из тела. Все эти силовые линии должны где-то кончаться, либо на окружающих телах, либо на стенках и крыше помещения, либо на земле, либо на небесных телах, и, где бы они ни кончались, там присутствует количество электричества, в точности равное и противоположное по знаку тому количеству электричества, которое расположено на участке тела, из которого вышли силовые линии. Из приведенных графиков видно, что это действительно имеет место. Поэтому нет никакого противоречия между взглядами Фарадея и математическими результатами старой теории. Наоборот, идея силовых линий делает ясными эти результаты и дает, по-видимому, средство перехода непрерывным образом от довольно косных понятий старой теории к представлениям, допускающим дальнейшее обобщение и создающим, таким образом, возможность расширения наших знаний в последующих исследованиях.

123. Графики на рис. 5 построены следующим образом. Возьмем сначала случай единственного силового центра — малого наэлектризованного тела с зарядом e. Потенциал на расстоянии r равен $V=e/r$. Следовательно, положив $r=e/V$, мы найдем радиус r сферы, на которой потенциал равен V. Придавая V значения 1, 2, 3 и т. д. и построив соответствующие сферы, мы получим ряд эквипотенциальных поверхностей, на которых потенциалы измеряются натуральными числами. Сечение этих сфер плоскостью, проходящей через их общий центр, образует окружности, каждую из которых мы можем пометить числом, показывающим значение потенциала. Они показаны на рис. 5 справа в виде пунктирных полуокружностей.

Если имеется еще другой силовой центр, мы можем тем же способом построить эквипотенциальные поверхности, относящиеся к нему, и если теперь задаться целью найти форму эквипотенциальных поверхностей, обусловленных обоими центрами, то следует лишь вспомнить, что если V_1 — потенциал, создаваемый одним центром, а V_2 — потенциал, создаваемый другим центром, то обусловленный обоими центрами потенциал равен $V_1+V_2=V$. Поскольку во всех точках пересечения эквипотенциальных поверхностей, относящихся к обоим семействам, мы знаем и V_1 и V_2, мы знаем также и значение V в них. Поэтому, если построить поверхность, проходящую через все те точки пересечения, для которых V имеет одно и то же значение, то эта поверхность совпадет с истинной эквипотенциальной поверхностью во всех этих точках пересечения, и при достаточной густоте построения исходной системы поверхностей можно построить новую поверхность с любой требуемой точностью. Эквипотенциальные поверхности, соответствующие двум точечным зарядам, равным по величине, но противоположным по знаку, показаны сплошными линиями справа на рис. 5.

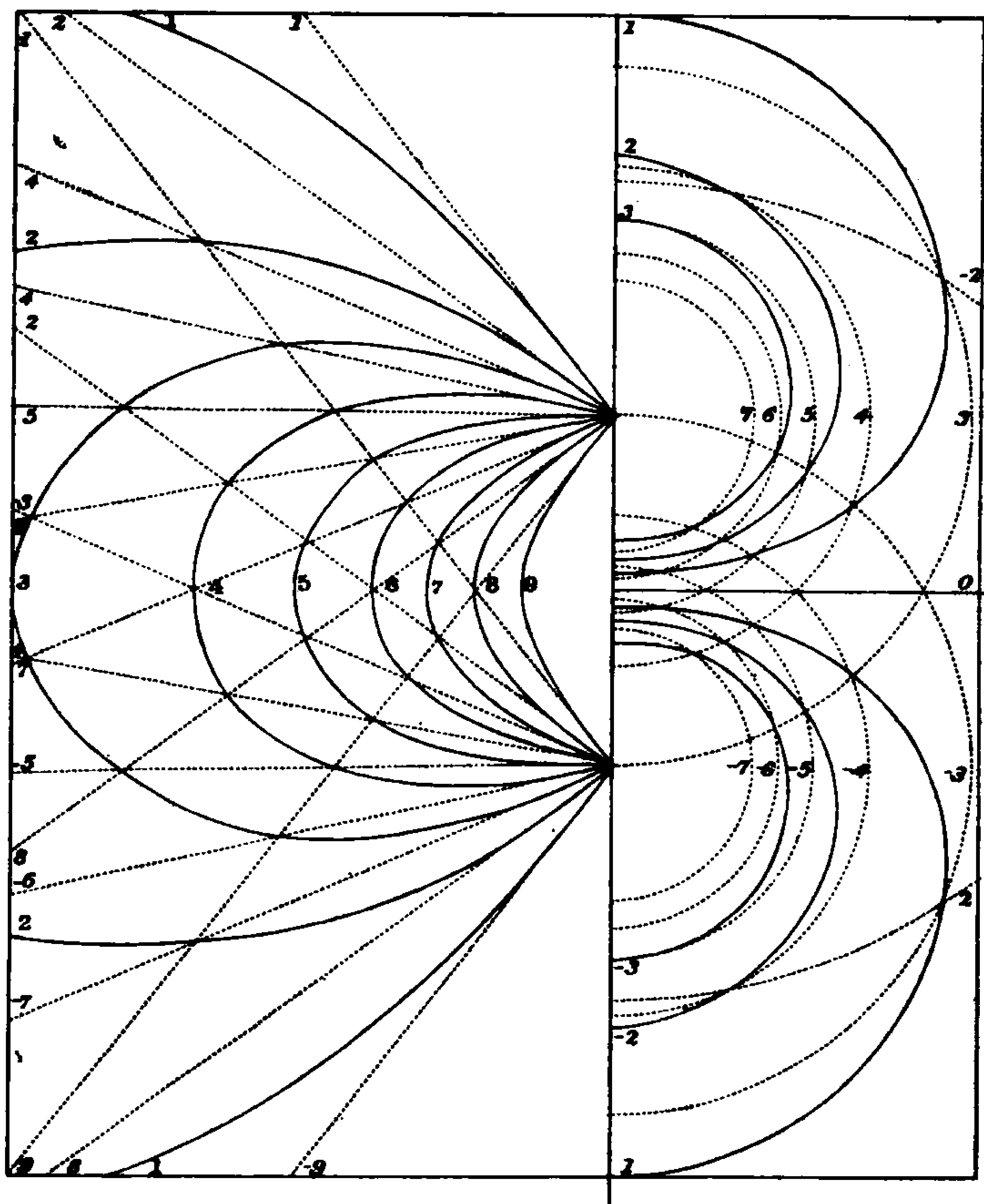


Рис. 5. Метод построения силовых линий и эквипотенциальных поверхностей

Этот метод может быть применен для построения произвольной системы эквипотенциальных поверхностей, если только потенциал является суммой двух потенциалов, для которых эквипотенциальные поверхности уже построены.

Силовые линии для одиночного силового центра представляют собой прямые, выходящие из этого центра. Если мы хотим указать этими линиями и интенсивность, и направление силы в любой точке, мы должны строить их так, чтобы они выделяли на эквипотенциальных поверхностях участки, по которым интеграл от индукции имеет определенное значение. Для этого лучше всего принять, что наша плоская фигура представляет собой сечение пространственной фигуры, образуемой вращением плоской фигуры вокруг оси, проходящей через центр сил. Любая прямая, выходящая из этого центра и образующая угол θ с осью, будет при этом описывать конус, и поверхностный интеграл от индукции по той части любой поверхности, которая вырезается этим конусом со стороны, прилегающей к положительному направлению оси, равен $2\pi e(1-\cos\theta)$.

Если далее принять, что эта поверхность ограничена линиями пересечения с двумя плоскостями, проходящими через ось и наклоненными друг к другу под углом, стягиваемым дугой, равной половине радиуса, то индукция через ограниченную таким образом поверхность равна

$$(^1/_2)\,e\,(1-\cos\theta)=\Phi \quad \text{и} \quad \theta=\arccos(1-2\Phi/e).$$

Придавая Φ значения 1, 2, 3 . . . e, мы найдем соответствующую последовательность значений θ, и при целом e число соответствующих силовых линий, считая и ось, будет равно e.

Таким образом, мы имеем метод построения силовых линий, при котором заряд любого силового центра показан числом выходящих из него линий, а индукция через любую поверхность, вырезаемую указанным способом, измеряется числом силовых линий, проходящих через нее. Пунктирные прямые в левой части рис. 5 изображают силовые линии, соответствующие каждому точечному заряду при зарядах 10 и —10 соответственно.

Если на оси рисунка расположены два силовых центра, можно построить силовые линии для каждого центра, соответствующие значениям Φ_1 и Φ_2. Проведя затем линии через последовательные точки пересечения этих линий, для которых $\Phi_1+\Phi_2$ имеют одно и то же значение, мы можем найти силовую линию, обусловленную обоими центрами. Таким же способом можно скомбинировать любые две системы силовых линий, симметрично расположенные относительно одной и той же оси. Сплошные кривые в левой части на рис. 5 изображают силовые линии, обусловленные одновременным действием двух заряженных центров.

Построив этим методом эквипотенциальные поверхности и силовые линии, можно проверить точность построения, установив, ортогональны ли всюду обе системы кривых и относятся ли расстояния между соседними эквипотенциальными поверхностями к расстоянию между соседними силовыми линиями как половина среднего расстояния от оси относится к принятой единице длины.

Для любой такой системы конечных размеров силовая линия, индекс Φ которой меньше e, имеет асимптоту, проходящую через электрический центр (п. 89 г) системы и наклоненную к оси под углом, косинус которого равен $1-2\Phi/e$, где e — полный заряд системы, если только Φ меньше e. Силовые линии, для которых индекс больше e, являются конечными. Если e равно нулю, то все линии конечны.

Силовые линии, соответствующие однородному полю силы, параллельному оси, представляют собой прямые линии, параллельные этой оси, расстояние которых от оси равно квадратному корню из чисел, образующих арифметическую прогрессию.

Теория эквипотенциальных поверхностей и силовых линий для двух измерений будет дана ниже, когда мы перейдем к теории сопряженных функций [1].

---

[1] См. статью проф. У. Р. Смита «О потоке электричества в проводящих поверхностях» в *Proc. R. S. Edin.*, 1869—70, p. 79.

ГЛАВА VIII
ПРОСТЫЕ СЛУЧАИ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ

Две параллельные плоскости

124. Рассмотрим прежде всего две параллельные проводящие бесконечно простирающиеся плоскости на расстоянии c друг от друга, находящиеся соответственно под потенциалами A и B.

Очевидно, что в этом случае потенциал V будет функцией от расстояния z до плоскости A и будет одинаков для всех точек любой плоскости, параллельной A и B и расположенной между ними, за исключением точек вблизи краев заряженных поверхностей, которые, по предположению, находятся на бесконечно большом расстоянии от рассматриваемой точки.

Таким образом, уравнение Лапласа сводится к уравнению $d^2V/dz^2=0$, интеграл которого $V=C_1+C_2z$, а поскольку $V=A$ при $z=0$ и $V=B$ при $z=c$, то $V=A+(B-A)\,z/c$.

Для всех точек между плоскостями напряженность перпендикулярна плоскостям и величина ее равна $R=(A-B)/c$.

В самой толще проводников $R=0$. Следовательно, распределение электричества на первой плоскости имеет поверхностную плотность σ, где $4\pi\sigma=R=(A-B)/c$.

На другой поверхности, на которой потенциал равен B, поверхностная плотность σ' равна и противоположна по знаку σ: $4\pi\sigma'=-R=(B-A)/c$.

Рассмотрим теперь участок первой поверхности площади S, выбранный так, что никакая часть S не находится вблизи границы поверхности.

Количество электричества на этой поверхности $e_1=S\sigma$ и, согласно п. 79, действующая на единицу электричества сила равна $R/2$, так что полная сила, действующая на площадку S и притягивающая ее к другой плоскости, равна

$$F=\frac{1}{2}RS\sigma=\frac{1}{8\pi}R^2S=\frac{S}{8\pi}\frac{(B-A)^2}{c^2}.$$

Здесь сила притяжения выражена через площадь S, разность потенциалов обеих поверхностей $(A-B)$ и расстояние между ними c. Через заряд e_1 и площадь S сила притяжения выражается так: $F=2\pi e_1^2/S$.

Электрическая энергия, обусловленная распределением электричества на площадке S и на соответствующей ей площадке S' поверхности B, определяемой проектированием S на поверхность B системой силовых линий, которые в нашем случае перпендикулярны поверхности, равна

$$W=\frac{1}{2}(e_1A+e_2B), \qquad =\frac{1}{2}\frac{S}{4\pi}\frac{(A-B)^2}{c}, \qquad =\frac{R^2}{8\pi}Sc, \qquad =\frac{2\pi}{S}e_1^2c, \qquad =Fc.$$

Первое из этих выражений представляет собой общее выражение для электрической энергии (п. 84).

Второе выражение представляет энергию через площадь, расстояние и разность потенциалов.

Третье выражение представляет энергию через результирующую силу R и объем Sc, заключенный между площадками S и S', и показывает, что в единице объема заключена энергия p, где $8\pi p=R^2$.

Сила притяжения между плоскостями равна pS, т. е., иными словами, на каждую единицу поверхности действует электрическое натяжение (или отрицательное давление), равное p.

Четвертое выражение представляет энергию через заряд.

Пятое выражение показывает, что электрическая энергия равна работе, которую совершила бы электрическая сила, если бы обе поверхности сомкнулись, двигаясь параллельно самим себе при сохранении постоянной величины заряда на них.

Заряд выражается через разность потенциалов соотношением

$$e_1=\frac{1}{4\pi}\frac{S}{c}(A-B)=q(A-B).$$

Коэффициент q представляет заряд, обусловленный единичной разностью потенциалов. Этот коэффициент называется Емкостью поверхности S, обусловленной ее расположением относительно противоположной поверхности.

Предположим теперь, что среда между обеими поверхностями уже не воздух, а какое-либо другое диэлектрическое вещество с удельной индуктивной способностью K. Тогда заряд, обусловленный заданной разностью потенциалов, будет в K раз больше, чем в воздухе, т. е. $e_1=KS(A-B)/4\pi c$.

Полная энергия будет равна

$$W=\frac{KS}{8\pi c}(A-B)^2=\frac{2\pi}{KS}e_1^2c,$$

а сила между поверхностями

$$F=pS=\frac{KS}{8\pi}\frac{(A-B)^2}{c^2}=\frac{2\pi}{KS}e_1^2.$$

Следовательно, сила между двумя поверхностями, поддерживаемыми при заданных потенциалах, меняется пропорционально удельной индуктивной способности диэлектрика K, а сила между двумя поверхностями с заданными зарядами меняется обратно пропорционально K.

Две концентрические сферические поверхности

125. Если две концентрические сферические поверхности радиусов a и b, причем b больше a, поддерживаются соответственно под потенциалами A и B, то, очевидно, потенциал V является функцией расстояния r от их центра. В этом случае уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}=0.$$

Его решение $V=C_1+C_2r^{-1}$, и из условия $V=A$ при $r=a$ и $V=B$ при $r=b$ следует, что в пространстве между сферическими поверхностями

$$V=\frac{Aa-Bb}{a-b}+\frac{A-B}{a^{-1}-b^{-1}}r^{-1}, \qquad R=-\frac{dV}{dr}=\frac{A-B}{a^{-1}-b^{-1}}r^{-2}.$$

Если σ_1 и σ_2 — поверхностные плотности на противолежащих поверхностях сплошного шара радиуса a и сферической полости радиуса b, то

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{A-B}{a^{-1}-b^{-1}}, \qquad \sigma_2 = \frac{1}{4\pi b^2}\frac{B-A}{a^{-1}-b^{-1}}.$$

Если e_1 и e_2 — полные электрические заряды этих поверхностей, то

$$e_1 = 4\pi a^2\sigma_1 = \frac{A-B}{a^{-1}-b^{-1}} = -e_2.$$

Следовательно, емкость сферы, окруженной сферической оболочкой, равна $ab/(b-a)$.

Если внешняя поверхность оболочки тоже сфера радиуса c, то при отсутствии других проводников поблизости заряд на внешней поверхности равен $e_3=Bc$. Таким образом, полный заряд на внутренней сфере равен

$$e_1 = \frac{ab}{b-a}(A-B),$$

а на внешней оболочке

$$e_2+e_3 = \frac{ab}{b-a}(B-A)+Bc.$$

Положив $b=\infty$, мы получим случай сферы в бесконечном пространстве. Электрическая емкость такой сферы равна a, т. е. численно равна радиусу сферы.

Электрическое натяжение на внутренней сфере, приходящееся на единицу площади, равно

$$p = \frac{1}{8\pi}\frac{b^2}{a^2}\frac{(A-B)^2}{(b-a)^2}.$$

Результирующая сила, обусловленная этим натяжением, для полусферы равна $\pi a^2 p=F$ и перпендикулярна основанию полусферы. Если она уравновешивается поверхностным натяжением, испытываемым по круговой границе полусферы с натяжением на единицу длины равным T, то $F=2\pi aT$.

Отсюда

$$F = \frac{b^2}{8}\frac{(A-B)^2}{(b-a)^2} = \frac{e_1^2}{8a^2}, \qquad T = \frac{b^2}{16\pi a}\frac{(A-B)^2}{(b-a)^2}.$$

Если сферический мыльный пузырь наэлектризовать до потенциала A, то при радиусе a его заряд будет Aa, а поверхностная плотность заряда будет $\sigma=A/(4\pi a)$.

Результирующая напряженность у внешней поверхности равна $4\pi\sigma$, а внутри пузыря равна нулю, так что, согласно п. 79, электрическая сила, действующая на единицу поверхности, равна $2\pi\sigma$, причем направлена она наружу. Следовательно, электризация уменьшает давление воздуха внутри пузыря на $2\pi\sigma^2$, т. е. на $A^2/(8\pi a^2)$.

Но можно показать, что если T_0 — натяжение в жидкой пленке, передаваемое через линию единичной длины, то внутреннее давление, необходимое для удержа-

ния пузыря от схлопывания, равно $2T_0/a$. Если электрической силы как раз достаточно для удержания пузыря в равновесии при одинаковом давлении воздуха вне и внутри пузыря, то $A^2=16\pi a T_0$.

Две бесконечные коаксиальные цилиндрические поверхности

126. Пусть радиус внешней поверхности проводящего цилиндра равен a, а радиус внутренней поверхности полого цилиндра, коаксиального первому, равен b. Пусть их потенциалы соответственно равны A и B. Потенциал V зависит в этом случае только от расстояния r от оси, так что уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=0,$$

откуда $V=C_1+C_2 \ln r$.

Поскольку $V=A$ при $r=a$ и $V=B$ при $r=b$, то

$$V=[A \ln (b/r)+B \ln (r/a)]/\ln (b/a).$$

Если σ_1 и σ_2 — поверхностные плотности на внутренней и внешней поверхностях, то

$$4\pi\sigma_1=\frac{A-B}{a \ln \frac{b}{a}}, \qquad 4\pi\sigma_2=\frac{A-B}{b \ln \frac{b}{a}}.$$

Для зарядов e_1 и e_2 на участках обоих цилиндров между двумя сечениями, перпендикулярными оси, и отстоящими друг от друга на расстояние l, имеем

$$e_1=2\pi a l \sigma_1=\frac{1}{2}\frac{A-B}{\ln \frac{b}{a}} l=-e_2.$$

Следовательно, емкость участка внутреннего цилиндра длины l равна $l/2 \ln (b/a)$.

Если пространство между цилиндрами занято не воздухом, а диэлектриком с удельной индуктивной способностью K, то емкость участка внутреннего цилиндра длины l равна $lK/2 \ln (b/a)$.

Энергия распределения электричества на рассматриваемом участке бесконечного цилиндра равна $lK\,(A-B)^2/4 \ln (b/a)$.

127. Пусть два полых цилиндрических проводника A и B произвольной длины (рис. 6), имеющие общую ось x, расположены один с отрицательной стороны от начала координат, а другой с положительной стороны и разделены небольшим промежутком вблизи начала координат.

Пусть цилиндр C длины $2l$ расположен так, что его центральная точка находится на расстоянии x от начала координат в положительную сторону, а сам цилиндр C входит внутрь полых цилиндров.

Положим потенциал полого цилиндра на положительной стороне равным A, на отрицательной стороне равным B и потенциал внутреннего цилиндра равным C, обозначим через α емкость единицы длины C по отношению к A, а через β — емкость единицы длины C по отношению к B.

Поверхностная плотность на участках цилиндров в фиксированных точках вблизи начала координат и в точках, находящихся на заданном небольшом расстоянии от концов внутреннего проводника, не зависит от величины x, если только внутренний цилиндр достаточно глубоко входит внутрь обоих полых цилиндров. Вблизи концов полых цилиндров и вблизи концов внутреннего цилиндра устанавливается распределение электричества, которое мы еще пока не можем рассчитать, однако распределение у начала координат не меняется при перемещении внутреннего цилиндра, если ни один из его концов не подходит близко к

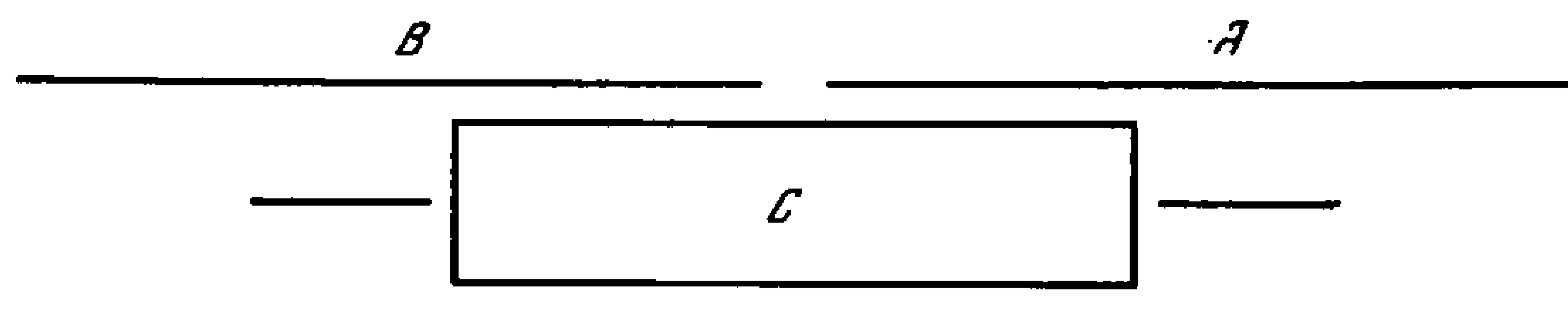


Рис. 6

началу координат, а распределения у концов внутреннего цилиндра перемещаются вместе с цилиндром, так что эффект перемещения цилиндра сводится лишь к увеличению или уменьшению тех участков внутреннего цилиндра, на которых заряд распределен как на бесконечном цилиндре.

Следовательно, зависимость полной энергии системы от x дается выражением

$$Q=\frac{1}{2}\alpha(l+x)(C-A)^2+\frac{1}{2}\beta(l-x)(C-B)^2+\text{величины, не зависящие от } x,$$

а результирующая сила, параллельная оси цилиндров, равна, согласно п. 93б,

$$X=\frac{dQ}{dx}=\frac{1}{2}\alpha(C-A)^2-\frac{1}{2}\beta(C-B)^2,$$

поскольку энергия представлена через потенциалы.

Если сечения цилиндров A и B одинаковы, то $\alpha=\beta$ и $X=\alpha(B-A)[C-(A+B)/2]$.

Таким образом, оказывается, существует постоянная сила, действующая на внутренний цилиндр и втягивающая его в тот внешний цилиндр, потенциал которого больше отличается от потенциала внутреннего проводника.

Если C по величине значительно больше $A+B$, то сила приблизительно равна $X=\alpha(B-A)C$, так что можно определить разность потенциалов двух цилиндров, если измерить X, причем точность измерения увеличивается с повышением потенциала внутреннего цилиндра C. Этот принцип в несколько модифицированном виде принят в томсоновском квадрантном электрометре (п. 219).

Это же приспособление из трех цилиндров можно использовать для измерения емкости, соединив B и C. Если потенциал A равен нулю, а потенциал B и C равен V, то количество электричества на A равно $E_3=(q_{13}+\alpha(l+x))V$, где q_{13} зависит от распределения электричества на концах цилиндра, но не зависит от x. Переместив цилиндр вправо, так что x перейдет в $x+\xi$, мы увеличим емкость цилиндра C на определенную величину $\alpha\xi$, где $\alpha=1/[2\ln(b/a)]$, а a и b — радиусы противолежащих цилиндрических поверхностей.

ГЛАВА IX

СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

128. Математическая теория сферических гармоник исследовалась в целом ряде специальных трактатов. В 1878 г. вышло второе издание в двух томах книги *Handbuch der Kugelfunctionen* д-ра Э. Хайне (E. Heine), являющейся наиболее детальным исследованием в этой области, а д-р Ф. Нейманн опубликовал свои *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen* (Leipzig, Teubner, 1878). Значительно улучшено рассмотрение этого вопроса во втором издании 1879 г. *Natural Philosophy* Томсона и Тэта, а публикация книг Тодхантера, *Elementary Treatise on Laplace's Functions, Lamé's Functions and Bessel's Functions* и Ферререа *Elementary Treatise on Spherical Harmonics and subjects connected with them* сделали излишним детальное рассмотрение чисто математических вопросов в книге по электричеству.

И все же я оставил здесь представление сферической гармоники через ее полюса.

Об особых точках,
в которых потенциал становится бесконечным

129 а. Если электрический заряд A_0 равномерно распределен по поверхности сферы, центр которой имеет координаты (a, b, c), то потенциал любой точки (x, y, z) вне сферы, согласно п. 125, равен

$$V=A_0/r, \tag{1}$$

где

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2. \tag{2}$$

Поскольку выражение для V не зависит от радиуса сферы, оно останется тем же и в предположении бесконечно малого радиуса. Физически это означало бы, что заряд помещается на поверхности бесконечно малой сферы, что по существу то же самое, что математическая точка. Мы выше показали (п. 55, 81), что для значения поверхностной плотности электричества существует предел, так что физически невозможно поместить конечный заряд электричества на сферу меньше некоторого радиуса.

Тем не менее, поскольку (1) описывает возможное распределение потенциала в пространстве, окружающем сферу, мы можем математически считать потенциал как бы создаваемым зарядом A_0, сосредоточенным в математической точке (a, b, c), а эту точку можно назвать особой точкой нулевого порядка.

Существуют и другие типы особых точек, свойства которых мы рассмотрим ниже, но, прежде чем перейти к этому, следует определить некоторые выражения, которые окажутся нам полезными при рассмотрении направлений в пространстве и соответствующих им точек на сфере.

129 б. *Осью* называется любое фиксированное направление в пространстве. Мы будем считать, что оно определяется меткой на сфере в той точке, где радиус, проведенный из центра сферы в направлении оси, пересекает поверхность сферы. Эта точка называется Полюсом оси. Таким образом, ось имеет не два полюса, а один.

Если μ — косинус угла между осью h и любым вектором r, а

$$p=\mu r, \tag{3}$$

то p — проекция r по направлению оси h.

Различные оси отличаются разными индексами, а косинус угла между двумя осями обозначается через λ_{mn}, где m и n — индексы, характеризующие оси.

Дифференцирование по оси h, имеющей направляющие косинусы L, M, N, обозначается так:

$$\frac{d}{dh}=L\frac{d}{dx}+M\frac{d}{dy}+N\frac{d}{dz}. \tag{4}$$

Из этих определений следует, что

$$\frac{dr}{dh_m}=\frac{p_m}{r}=\mu_m, \tag{5}$$

$$\frac{dp_n}{dh_m}=\lambda_{mn}=\frac{dp_m}{dh_n}, \tag{6}$$

$$\frac{d\mu_m}{dh_n}=\frac{\lambda_{mn}-\mu_m\mu_n}{r}. \tag{7}$$

Если теперь предположить, что потенциал в точке (x, y, z), обусловленный особой точкой любого порядка, помещенной в начале координат, равен $A\,f\,(x, y, z)$ то, если эту точку поместить на конце оси h, потенциал в точке (x, y, z) будет

$$Af\,[(x-Lh),\ (y-Mh),\ (z-Nh)].$$

Если теперь такую же во всех отношениях особую точку, но с противоположным знаком A поместить в начало координат, то потенциал, создаваемый обеими точками, будет равен

$$V=Af\,[(x-Lh),\ (y-Mh),\ (z-Nh)]-Af\,(x,\ y,\ z)=$$
$$=-Ah\frac{d}{dh}f\,(x,\ y,\ z)+\text{члены, содержащие } h^2.$$

Если теперь h, неограниченно уменьшать, а A неограниченно увеличивать, оставляя их произведение конечным и равным A', тогда предельное значение потенциала пары точек будет равно

$$V'=-A'\frac{d}{dh}f\,(x,\ y,\ z). \tag{8}$$

Если $f\,(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то, поскольку оно линейное, функция V', являющаяся разностью двух функций, каждая из которых по отдельности удовлетворяет уравнению Лапласа, также должна удовлетворять этому уравнению.

129 в. Потенциал особой точки нулевого порядка

$$V_0=A_0/r \tag{9}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно, любая функция, получающаяся из него последовательным дифференцированием по любому числу осей, также должна удовлетворять этому уравнению.

Точку первого порядка можно получить, взяв две точки нулевого порядка с равными, но противоположными по знаку зарядами — A_0 и A_0 и поместив первую точку в начало координат, а вторую на конце оси h_1. Затем нужно неограниченно уменьшать h_1 и увеличивать A_0 так, чтобы их произведение A_0h_1 было все время равно A_1. Окончательным результатом такого процесса, соответствующим слиянию обеих точек, является точка первого порядка с моментом A_1 и осью h_1. Таким образом, точка первого порядка является двукратной. Ее потенциал равен

$$V_1 = -h_1 \frac{d}{dh_1} V_0 = A_1 \frac{\mu_1}{r^2}. \qquad (10)$$

Поместив в начало координат точку первого порядка с моментом — A_1, а на конце оси h_2 другую точку первого порядка с моментом A_1 и уменьшая затем h_2 с одновременным увеличением A_1, так что

$$A_1 h_2 = A_2/2, \qquad (11)$$

мы получим точку второго порядка, потенциал которой

$$V_2 = -h_2 \frac{d}{dh_2} V_1 = A_2 \frac{1}{2} \frac{3\mu_1\mu_2 - \lambda_{12}}{r^3}. \qquad (12)$$

Точку второго порядка можно назвать четырехкратной (квадрупольной) точкой, так как она получается при сближении четырех точек нулевого порядка. Она имеет две оси h_1 и h_2 и момент A_2. Направления этих осей и величина момента полностью определяют характер точки.

Последовательно дифференцируя по n осям мы получим потенциал, создаваемый точкой n-го порядка. Он представляет собой произведение трех множителей-константы, некоторой комбинации косинусов и $r^{-(n+1)}$. По причинам, которые станут ясны в дальнейшем, значение константы удобно выбирать так, что при совпадении всех осей с радиус-вектором коэффициент момента равен $r^{-(n+1)}$. Поэтому мы будем делить на n при дифференцировании по h_n.

Таким образом, мы получим вполне определенное численное значение для каждого потенциала, которому мы и присвоим название Пространственной Гармоники степени — $(n+1)$, а именно

$$V_n = (-1)^n \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \frac{d}{dh_1} \frac{d}{dh_2} \cdots \frac{d}{dh_n} \frac{1}{r}. \qquad (13)$$

При умножении этой величины на постоянную она по-прежнему остается потенциалом, создаваемым некоторой точкой n-го порядка.

129 г. Результат операции (13) имеет вид

$$V_n = Y_n r^{-(n+1)}, \qquad (14)$$

где Y_n — функция n косинусов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ углов между r и n осями и $n(n-1)/2$ косинусов λ_{12} и т. д. углов между парами осей.

Если считать направления r и n осей задаваемыми точками на сферической поверхности, то можно рассматривать Y_n как величину, меняющуюся от точки к точке на этой поверхности и являющуюся функцией $n(n+1)/2$ расстояний между n полюсами осей и полюсом радиус-вектора. Поэтому мы называем Y_n Поверхностной Гармоникой порядка n.

130a. Теперь мы покажем, что каждой поверхностной гармонике порядка n соответствует наряду с пространственной гармоникой порядка — $(n+1)$ и другая порядка n, т. е. что

$$H_n = Y_n r^n = V_n r^{2n+1} \tag{15}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа.

Действительно,

$$\frac{dH_n}{dx} = (2n+1)\, r^{2n-1} x V_n + r^{2n+1} \frac{dV_n}{dx},$$

$$\frac{d^2H_n}{dx^2} = (2n+1)\left[(2n-1)x^2 + r^2\right] r^{2n-3} V_n + 2(2n+1) r^{2n-1} x \frac{dV_n}{dx} + r^{2n+1} \frac{d^2V_n}{dx^2},$$

поэтому

$$\frac{d^2H_n}{dx^2} + \frac{d^2H_n}{dy^2} + \frac{d^2H_n}{dz^2} = (2n+1)(2n+2)\, r^{2n-1} V_n +$$
$$+ 2(2n+1)\, r^{2n-1} \left(x\frac{dV_n}{dx} + y\frac{dV_n}{dy} + z\frac{dV_n}{dz} \right) + r^{2n+1} \left(\frac{d^2V_n}{dx^2} + \frac{d^2V_n}{dy^2} + \frac{d^2V_n}{dz^2} \right). \tag{16}$$

Но V_n — однородная функция от x, y, z отрицательной степени $n+1$, так что

$$x\frac{dV_n}{dx} + y\frac{dV_n}{dy} + z\frac{dV_n}{dz} = -(n+1) V_n. \tag{17}$$

Поэтому первые два слагаемых в правой части (16) взаимно сокращаются, а поскольку V_n удовлетворяет уравнению Лапласа, то и третье слагаемое равно нулю, так что и H_n удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является пространственной гармоникой степени n.

Здесь мы имеем дело с частным случаем более общей теоремы об электрической инверсии, утверждающей, что если $F(x, y, z)$ — функция от x, y, z, удовлетворяющая уравнению Лапласа, то существует другая функция

$$\frac{a}{r} F\left(\frac{a^2x}{r^2}, \frac{a^2y}{r^2}, \frac{a^2z}{r^2} \right),$$

также удовлетворяющая уравнению Лапласа (см. п. 162).

130 б. Поверхностная гармоника Y_n содержит $2n$ произвольных переменных, так как она определяется положением n ее полюсов на сфере, а каждый полюс определяется двумя координатами. Следовательно, пространственные гармоники V_n и H_n также содержат $2n$ произвольных переменных. При этом обе они после умножения на постоянную удовлетворяют уравнению Лапласа.

Чтобы показать, что AH_n — наиболее общая рациональная однородная функция степени n, которая может удовлетворять уравнению Лапласа, заметим, что общая рациональная однородная функция K степени n содержит $(n+1)(n+2)/2$ членов. Но $\nabla^2 K$ является однородной функцией степени $n-2$ и, следовательно, содержит $n(n-1)/2$ членов, так что условие $\nabla^2 K = 0$ требует равенства каждого из этих членов нулю. Таким образом, мы получаем $n(n-1)/2$ уравнений для $(n+1)(n+2)/2$ членов функции K, так что в наиболее общей форме однородной функции степени n, удовлетворяющей уравнению Лапласа, остается $2n+1$ произвольных постоянных. Но H_n после умножения на произвольную постоянную как

раз удовлетворяет требуемым условиям и содержит $2n+1$ произвольных постоянных. Таким образом, это и есть наиболее общая форма.

131 а. Теперь мы можем построить распределение потенциала, при котором ни сам потенциал, ни его первые производные не обращаются в бесконечность ни в одной точке.

Функция $V_n=Y_n r^{-(n+1)}$ удовлетворяет условию обращения в нуль на бесконечности, но становится бесконечной в начале координат.

Функция $H_n=Y_n r^n$ конечна и непрерывна на конечных расстояниях от начала координат, но не обращается в нуль на бесконечности.

Но если принять потенциал во всех точках вне сферы радиуса a с центром в начале координат равным $a^n Y_n r^{-(n+1)}$, а потенциал во всех точках внутри сферы равным $a^{-(n+1)} Y_n r^n$ и предположить, что на самой сфере электричество распределено с поверхностной плотностью σ, определяемой соотношением

$$4\pi\sigma a^2 = (2n+1)Y_n, \tag{18}$$

то все условия для потенциала, создаваемого заряженной так оболочкой, будут выполнены.

Действительно, потенциал всюду конечен и непрерывен и обращается в нуль на бесконечности. Первые производные потенциала всюду конечны и непрерывны, за исключением заряженной поверхности, где они удовлетворяют уравнению

$$\frac{dV}{d\nu} + \frac{dV'}{d\nu'} + 4\pi\sigma = 0, \tag{19}$$

и уравнение Лапласа удовлетворяется во всех точках как внутри, так и вне поверхности сферы.

Таким образом, это распределение потенциала удовлетворяет всем условиям, и, согласно п. 100 в, оно является единственным распределением, удовлетворяющим этим условиям.

131 б. Потенциал, создаваемый сферой радиуса a с поверхностной плотностью, задаваемой соотношением

$$4\pi a^2 \sigma = (2n+1)Y_n, \tag{20}$$

во всех точках вне сферы совпадает с потенциалом соответствующей особой точки n-го порядка.

Предположим теперь, что имеется некоторая электрическая система E, расположенная вне сферы, и что Ψ — потенциал, создаваемый этой системой. Найдем значение $\Sigma\,(\Psi e)$ для особой точки. Эта величина дает часть электрической энергии, зависящую от воздействия внешней системы на особую точку.

Если A_0 — заряд особой точки нулевого порядка, то искомая потенциальная энергия равна

$$W_0 = A_0\Psi. \tag{21}$$

Если имеются две такие точки, причем отрицательная находится в начале координат, а положительная точка с тем же по величине зарядом — на конце оси h_1, то потенциальная энергия равна

$$-A_0\Psi + A_0\left(\Psi + h_1\frac{d\Psi}{dh_2} + \frac{1}{2}h_1^2\frac{d^2\Psi}{dh_1^2} + \dots\right)$$

и при неограниченном росте A_0 и уменьшении h_1 так, что $A_0h_1=A_1$, получим значение потенциальной энергии для точки первого порядка

$$W_1=A_1\,(d\Psi/dh_1'). \tag{22}$$

Аналогично для точки n-го порядка получим потенциальную энергию

$$W_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots n}A_n\frac{d^n\Psi}{dh_1\,dh_2\ldots dh_n}.[1] \tag{23}$$

131 в. Если принять заряд внешней системы состоящим из отдельных частей, каждую из которых мы обозначим через dE, а заряд особой точки порядка n считать образованным отдельными частичными зарядами de, то

$$\Psi=\Sigma\,[(1/r)dE]. \tag{24}$$

Но если потенциал V_n, обусловленный наличием особой точки, равен

$$V_n=\Sigma\,[(1/r)de], \tag{25}$$

а потенциальная энергия, обусловленная воздействием E на e, равна

$$W_n=\Sigma\,(\Psi\,d\,e)=\Sigma\Sigma[(1/r)dEde]=\Sigma\,(V_ndE), \tag{26}$$

то последнее выражение представляет собой потенциальную энергию, обусловленную воздействием e на E.

Аналогично если $\sigma\,ds$ — заряд на элементе ds оболочки, то, поскольку потенциал, обусловленный оболочкой в месте нахождения внешней системы E равен V_n, имеем

$$W_n=\Sigma\,(V_ndE)=\Sigma\Sigma[(1/r)dE\sigma\,ds]=\Sigma\,(\Psi\sigma\,ds). \tag{27}$$

Последний член содержит суммирование по поверхности сферы. Приравнивая его к первому выражению для W_n, получим

$$\iint\Psi\sigma\,ds=\Sigma\,(\Psi\,de)=\frac{1}{n!}A_n\frac{d^n\Psi}{dh_1\ldots dh_n}. \tag{28}$$

Если вспомнить, что $4\pi\sigma a^2=(2n+1)Y_n$, а $A_n=a^n$, то получим

$$\iint\Psi Y_n\,ds=\frac{4\pi}{n!\,(2n+1)}a^{n+2}\frac{d^n\Psi}{dh_1\ldots dh_n}. \tag{29}$$

Это уравнение сводит операцию интегрирования $\Psi Y_n\,ds$ по всем элементам поверхности сферы радиуса a к операции дифференцирования Ψ по n осям гармоники и вычисления значения этой производной в центре сферы, если только Ψ удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках внутри сферы, а Y_n — поверхностная гармоника порядка n.

132. Пусть теперь Ψ — пространственная гармоника положительной степени m вида

$$\Psi=a^{-m}Y_mr^m. \tag{30}$$

---

[1] В дальнейшем удобнее будет обозначать произведение положительных целых чисел $1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\,n$ через $n!$.

На поверхности сферы $r=a$, а $\Psi=Y_m$, так что уравнение (29) принимает в этом случае вид

$$\iint Y_m Y_n\,ds=\frac{4\pi}{n!\,(2n+1)}\,a^{n-m+2}\,\frac{d^n\,(Y_m r^m)}{dh_1\ldots dh_n}, \tag{31}$$

где значение производной следует брать в центре сферы.

Если n меньше m, то в результате дифференцирования получится однородная функция от x, y и z степени $m-n$, значение которой в центре сферы равно нулю. Если n равно m, то в результате дифференцирования получится постоянная, значение которой мы определим в п. 134. При дальнейшем дифференцировании получится нуль. Таким образом, интеграл $\iint Y_m Y_n\,ds$ равен нулю при неодинаковых m и n.

Мы пришли к этому результату чисто математическим путем, потому что, хотя мы и пользовались такими физическими понятиями, как электрическая энергия, все эти понятия рассматривались не как физическое явление, подлежащее исследованию, а как определенное математическое выражение. Математик может с равным правом воспользоваться этими или какими-либо другими математическими функциями, которые он сочтет полезными, но физик, которому приходится проводить математические преобразования, понимает их лучше всего, если каждый этап расчета допускает физическое истолкование.

133. Определим теперь вид поверхностной гармоники Y_n в зависимости от положения точки P на сфере по отношению к n полюсам гармоники.

Мы имеем

$$Y_0=1,\qquad Y_1=\mu_1,\qquad Y_2=(3\mu_1\mu_2/2)-\lambda_{12}/2,$$
$$Y_3=(5\mu_1\mu_2\mu_3/2)-(\mu_1\lambda_{23}+\mu_2\lambda_{31}+\mu_3\lambda_{12})/2 \tag{32}$$

и т. д.

Таким образом, каждое слагаемое в Y_n состоит из произведений косинусов, причем множители типа μ — с одним индексом, это косинусы углов между P и различными полюсами, а множители типа λ — с двумя индексами, это косинусы углов между полюсами.

Поскольку каждая ось вводится одним из n дифференцирований, индекс этой оси может встретиться один и только один раз среди индексов косинусов в каждом слагаемом.

Значит, если в каком-либо слагаемом имеется s косинусов с двойными индексами, то должны входить еще $n-2s$ косинусов с единичными индексами.

Будем записывать сумму всех произведений косинусов, в которых s косинусов с двойными индексами, в сокращенном виде

$$\sum(\mu^{n-2s}\lambda^s).$$

В каждом таком произведении все индексы встречаются по одному разу и ни один не повторяется.

Чтобы показать, что некоторый определенный индекс m встречается только у μ или только у λ, мы будем указывать его индексом у μ или λ. Таким образом, равенство

$$\Sigma\,(\mu^{n-2s}\lambda^s)=\Sigma\,(\mu_m^{n-2s}\lambda^s)+\Sigma\,(\mu^{n-2s}\lambda_m^s) \tag{33}$$

показывает, что вся совокупность произведений может быть разделена на две части, в одной из которых индекс m встречается среди направляющих косинусов переменной точки P, а в другой — среди косинусов углов между полюсами.

Предположим теперь, что для определенного значения n

$$Y_n = A_{n.\,0}\Sigma(\mu^n) + A_{n.\,1}\Sigma(\mu^{n-2}\lambda^1) + \text{и т. д.} + A_{n.\,s.}\Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^s) + \text{и т. д.}, \quad (34)$$

где через A обозначены численные коэффициенты. Мы можем записать эту сумму в сокращенной форме:

$$Y_n = S\,[A_{n.\,s}\Sigma\,(\mu^{n-2s}\lambda^s], \quad (35)$$

где S показывает суммирование по всем значениям s не больше $n/2$, включая и нулевое.

Чтобы получить соответствующую пространственную гармонику отрицательной степени $(n+1)$ порядка n, умножим на $r^{-(n+1)}$ и получим

$$V_n = S\,[A_{n.\,s}r^{2s-2n-1}\Sigma\,(p^{n-2s}\lambda^s)], \quad (36)$$

где положено $r\mu = p$, как в уравнении (3).

Если продифференцировать V_n по новой оси h_m, то получится $-(n+1)\,V_{n+1}$, и, следовательно,

$$(n+1)\,V_{n+1} = S\,[A_{n.\,s}(2n+1-2s)\,r^{2s-2n-3}\Sigma\,(p_m^{n-2s+1}\lambda^s) - \\ - A_{n.\,s}r^{2s-2n-1}\Sigma\,(p^{n-2s-1}\lambda_m^{s+1})]. \quad (37)$$

Чтобы получить члены, содержащие s косинусов с двойными индексами, нужно уменьшить s на единицу в последнем члене. В результате получим

$$(n+1)\,V_{n+1} = S\,[r^{2s-2n-3}\,\{A_{n.\,s}(2n-2s+1)\,\Sigma\,(p_m^{n-2s+1}\lambda^s) - A_{n.\,s-1}\Sigma\,(p^{n-2s+1}\lambda_m^s)\}]. \quad (38)$$

Но оба эти типа произведений отличаются друг от друга лишь тем, что в одном из них индекс m встречается лишь у p, а в другом — у λ. Таким образом, коэффициенты перед ними должны быть одинаковы, а поскольку мы могли прийти к тому же результату, положив $n+1$ вместо n в выражении для V_n и умножив на $n+1$, мы получаем уравнения

$$(n+1)\,A_{n+1.\,s} = (2n-2s+1)\,A_{n.\,s} = -A_{n.\,s-1}. \quad (39)$$

Если положить здесь $s=0$, то

$$(n+1)\,A_{n+1.\,0} = (2n+1)\,A_{n.\,0} \quad (40)$$

и, следовательно, поскольку $A_{1,0}=1$,

$$A_{n.\,0} = 2n!/[2^n\cdot(n!)^2]. \quad (41)$$

Отсюда находится общее выражение для коэффициента

$$A_{n.\,s} = (-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}n!\,(n-s)!} \quad (42)$$

и окончательно тригонометрическое выражение для поверхностной гармоники

$$Y_n = S\left[(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}n!\,(n-s)!}\Sigma\,(\mu^{n-2s}\lambda^s)\right]. \quad (43)$$

Это выражение определяет значение поверхностной гармоники в любой точке P сферической поверхности через косинусы расстояний P от различных полюсов и расстояний полюсов друг от друга.

Легко видеть, что если какой-либо из полюсов переносится в противоположную точку сферической поверхности, то значение гармоники меняется на противоположное по знаку. Действительно, каждый косинус, содержащий индекс этого полюса, поменяет знак, а в каждое слагаемое гармоники индекс этого полюса входит один и только один раз.

Если два или любое четное число полюсов переносятся в соответственно противоположные им точки, то значение гармоники, очевидно, не меняется.

Профессор Сильвестер показал (*Phil. Mag.*, Oct. 1876), что при заданной гармонике задача определения n прямых, совпадающих с ее осями, имеет одно и только одно решение, хотя, как мы видели, положительные направления этих осей можно парами менять на противоположные.

134. Теперь мы можем определить значение поверхностного интеграла $\iint Y_m Y_n\, ds$ в случае, когда порядок обеих поверхностных гармоник одинаков, хотя направления их осей могут быть в общем случае разными.

Для этого нужно построить пространственную гармонику $Y_m r^m$ и продифференцировать ее по каждой из n осей Y_n.

Любой член $Y_m r^m$ типа $r^m \mu^{m-2s} \lambda^s$ может быть представлен в виде $r^{2s} p_m^{m-2s} \lambda_{nm}^s$. Дифференцируя его n раз последовательно по n осям Y_n, мы увидим, что при дифференцировании r^{2s} по s из этих осей у нас появятся s раз величины p_n и численный множитель $2s(2s-2)\ldots 2$, т. е. $2^s s!$ Продолжение дифференцирования на следующие s осей превращает эти p_n в λ_{nn}, но не вводит никаких дополнительных численных множителей, а при дифференцировании по остальным $n-2s$ осям множители p_m переходят в λ_{mn}, так что в результате получается $2^s s! \lambda_{nn}^s \lambda_{mm}^s \lambda_{mn}^{n-2s}$.

Таким образом, согласно (31),

$$\iint Y_m Y_n\, ds = \frac{4\pi}{n!\,(2n+1)} a^{n-m+2} \frac{d^n (Y_m r^m)}{dh_1 \ldots dh_n}, \tag{44}$$

а по (43)

$$Y_m r^m = S\left[(-1)^s \frac{(2m-2s)!}{2^{m-s} m!\,(m-s)!} \Sigma \left(r^{2s} p_m^{m-2s} \lambda_{mm}^s\right)\right]. \tag{45}$$

Следовательно, произведя дифференцирование и вспомнив, что $m=n$, получим

$$\iint Y_m Y_n\, ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)(n!)^2} S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!\, s!}{2^{n-2s}(n-s)!} \Sigma \left(\lambda_{mm}^s \lambda_{nn}^s \lambda_{mn}^{n-2s}\right)\right]. \tag{46}$$

135 а. Выражение (46) для поверхностного интеграла от произведения двух поверхностных гармоник принимает весьма замечательный вид в случае, когда все оси одной из гармоник, скажем Y_m, совпадают друг с другом, так что Y_m становится так называемой «зональной гармоникой порядка m», определяемой нами ниже и обозначаемой символом P_m.

В этом случае все косинусы вида λ_{nm} можно записать как μ_n, где μ_n — косинусы угла между общей осью P_m и одной из осей Y_n. Косинусы типа λ_{mm} все равны единице, так что вместо $\sum \lambda_{mm}^s$ нужно подставить число соче-

таний без повторения индексов по s символов из n, характеризующихся двумя индексами. Отсюда следует, что

$$\sum \lambda_{mm}^{s} = n!/[2^s s!\,(n-2s)!]. \tag{47}$$

Число перестановок оставшихся $n-2s$ индексов осей P_m равно $(n-2s)!$ Следовательно,

$$\Sigma\,(\lambda_{mn}^{n-2s}) = (n-2s)!\,\mu^{n-2s}. \tag{48}$$

Таким образом, в случае, когда все оси Y_m совпадают друг с другом, уравнение (46) принимает вид

$$\iint Y_n P_m\,ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)\,n!} S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}(n-s)!}\Sigma\,(\mu^{n-2s}\lambda^s)\right] \tag{49}$$

$$= \frac{4\pi a^2}{2n+1} Y_{n(m)}, \text{ согласно (43)}, \tag{50}$$

где $Y_{n(m)}$ — значение Y_n в полюсе P_m.

К этому результату можно прийти и следующим более коротким путем:

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось z совпала с осью m и пусть $Y_n r^n$ представлено как однородная функция x, y, z степени n.

В полюсе P_m $x=y=0$, а $z=r$, так что если Cz^n — слагаемое, не содержащее x и y, то C есть значение Y_n в полюсе P_m.

Уравнение (31) принимает в этом случае вид

$$\iint Y_n P_m\,ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1}\,\frac{1}{n!}\,\frac{d^m}{dz^n}(Y_n r^n).$$

Поскольку m равно n, то дифференцирование Cz^n дает $n!C$, а остальные члены дают нуль. Следовательно,

$$\iint Y_n P_m\,ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} C,$$

где C — значение Y_n в полюсе P_m.

135 б. Это очень важный результат теории сферических гармоник, так как он показывает, как найти ряд сферических гармоник, выражающий значение величины, которая принимает произвольно заданные конечные и непрерывные значения во всех точках сферической поверхности.

Действительно, пусть F — значение этой величины в точке Q сферы, а ds — элемент ее поверхности. Умножим $F\,ds$ на P_n, зональную гармонику с полюсом в точке P на той же сферической поверхности, и проинтегрируем по поверхности. Полученный результат, поскольку он зависит от положения точки P, можно рассматривать как функцию положения точки P.

Но так как значение в точке P зональной гармоники с полюсом Q равно значению в Q зональной гармоники того же порядка с полюсом в P, то можно считать, что для каждого элемента ds поверхности построена зональная гармоника с полюсом в Q и с коэффициентом $F\,ds$.

Таким образом, мы получим систему налагающихся друг на друга зональных гармоник с полюсами в каждой точке сферы, в которой F имеет ненулевое зна-

чение. Поскольку все они отличаются лишь множителем от поверхностной гармоники порядка n, их сумма также отличается лишь множителем от поверхностной гармоники (не обязательно зональной) порядка n.

Таким образом, поверхностный интеграл $\iint FP_n\,ds$, рассматриваемый как функция точки P, отличается лишь множителем от поверхностной гармоники Y_n, а значит, и $\frac{2n+1}{4\pi a^2}\iint FP_n\,ds$ является именно той поверхностной гармоникой n-го порядка, которая входит в представление F рядом по гармоникам, если только F может быть так представлено.

Действительно, если F может быть представлено в виде $F=A_0Y_0+A_1Y_1+\ldots$ $\ldots+A_nY_n+\ldots$, то, умножая на $P_n\,ds$ и беря поверхностный интеграл по всей сфере, мы получим

$$\iint FP_n\,ds=\frac{4\pi a^2}{2n+1}A_nY_n,$$

поскольку все члены, содержащие произведение гармоник различного порядка, обратятся в нуль.

Таким образом, единственное возможное разложение по сферическим гармоникам имеет вид

$$F=\frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint FP_0\,ds+\ldots+(2n+1)\iint FP_n\,ds+\ldots\right]. \quad (51)$$

Сопряженные гармоники

136. Мы видели, что поверхностный интеграл от произведения двух гармоник различного порядка всегда равен нулю. Но даже и для двух гармоник одного и того же порядка поверхностный интеграл от их произведения может равняться нулю. В этом случае говорят, что гармоники сопряжены друг другу. Условие взаимной сопряженности двух гармоник выражается в приравнивании нулю правой части уравнения (46).

Если одна из гармоник зональная, то условие сопряженности сводится к тому, что другая гармоника обращается в нуль в полюсе зональной гармоники.

Если начать с определенной гармоники n-го порядка, то условие сопряженности ей другой гармоники накладывает на $2n$ ее переменных одно условие.

Чтобы третья гармоника была сопряжена обеим предыдущим, нужно на ее $2n$ переменных наложить два условия. Продолжая таким образом построение гармоник, сопряженных всем предыдущим, мы будем иметь число условий, равное числу ранее имевшихся гармоник, так что на $(2n+1)$-ю гармонику будет налагаться $2n$ условий для $2n$ ее переменных, т. е. эта гармоника будет полностью определена.

Любая функция AY_n, кратная поверхностной гармонике n-го порядка, может быть выражена суммой кратных любой совокупности $2n+1$ сопряженных гармоник того же порядка, так как коэффициенты $2n+1$ сопряженных гармоник дают в наше распоряжение как раз столько свободных величин, сколько содержится параметров в AY_n ($2n$ переменных в Y_n и коэффициент A).

Чтобы найти коэффициент перед какой-либо сопряженной гармоникой, скажем перед Y_n^σ, предположим, что $AY_n=A_0Y_n^0+\ldots+A_\sigma Y_n^\sigma+\ldots$. Умножим это равенство на $Y_n^\sigma ds$ и найдем поверхностный интеграл по сфере. Все

слагаемые, содержащие произведение сопряженных друг другу гармоник, обратятся в нуль и останется уравнение

$$A\iint Y_n Y_n^\sigma\,ds = A_\sigma \iint (Y_n^\sigma)^2\,ds, \qquad (2)$$

из которого и определяется A_σ.

Следовательно, при заданной системе $2n+1$ сопряженных гармоник всякая другая гармоника n-го порядка может быть выражена через эти гармоники, причем единственным образом. Отсюда следует, что никакая другая гармоника не может быть сопряжена всем им.

137. Мы видели, что если полная система взаимно сопряженных гармоник n-го порядка задана, то любая другая гармоника того же порядка выражается через них. В такой системе из $2n+1$ гармоник имеется $2n\,(2n+1)$ переменных, связанных $n\,(2n+1)$ уравнениями, так что $n\,(2n+1)$ переменных можно считать произвольными.

Мы могли бы, следуя Томсону и Тэту, выбрать в качестве системы сопряженных гармоник такую, в которой n полюсов каждой гармоники распределены так, что j полюсов совпадают с полюсом оси x, k — с полюсом оси y и l $(=n-i-k)$ — с полюсом оси z. Если задать $n+1$ распределений, для которых $l=0$, и n распределений, для которых $l=1$, то все остальные можно через них выразить.

Фактически всеми математиками (включая Томсона и Тэта) принята система, в которой $n-\sigma$ полюсов совпадают с точкой, которую мы можем назвать Положительным Полюсом сферы, а остальные σ полюсов помещены через равные расстояния по экватору при нечетном их числе или через равные расстояния по половине экватора при четном числе.

В этом случае все μ_1, μ_2, ..., $\mu_{n-\sigma}$ равны $\cos\theta$; мы обозначим $\cos\theta$ через μ. Если вместо $\sin\theta$ ввести ν, то $\mu_{n-\sigma+1}$, ..., μ_n примут вид $\nu\cos(\varphi-\beta)$, где β — азимут одного из полюсов на экваторе.

Величины λ_{pq} равны единице, если и p и q меньше $n-\sigma$, равны нулю, если один из индексов больше $n-\sigma$, а другой меньше, и равны $\cos s\pi/\sigma$, если оба индекса больше $n-\sigma$. Здесь s — целое число, меньшее σ.

138. Если все полюса совпадают с полюсом сферы, т. е. $\sigma=0$, то соответствующая гармоника называется Зональной гармоникой. Поскольку зональная гармоника имеет важное значение, мы выделим ей специальное обозначение P_n.

Значение зональной гармоники можно найти либо из тригонометрического представления (43), либо непосредственно дифференцированием:

$$P_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (53)$$

$$P_n = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \ldots\right] =$$

$$= \sum\left[(-1)^p \frac{(2n-2p)!}{2^n p!\,(n-p)!\,(n-2p)!}\mu^{n-2p}\right], \qquad (54)$$

где p принимает все целые значения от нуля до наибольшего целого, не превышающего $n/2$.

Иногда удобно представить P_n как однородную функцию от $\cos\theta$ и $\sin\theta$, или, в наших обозначениях, от μ и ν:

$$P_n = \mu^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot 2}\mu^{n-2}\nu^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}\mu^{n-4}\nu^4 - \ldots =$$

$$= \sum \left[(-1)^p \frac{n!}{2^{2p}(p!)^2(n-2p)!}\mu^{n-2p}\nu^{2p}\right]. \qquad (55)$$

В математических исследованиях по этому вопросу доказывается, что $P_n(\mu)$ является коэффициентом при h^n в разложении $(1-2\mu h+h^2)^{-1/2}$ и что $P_n(\mu)$ равно также $\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n$.

Поверхностный интеграл от квадрата зональной гармоники равен

$$\iint (P_n)^2\,ds = 2\pi a^2 \int\limits_{-1}^{+1} (P_n(\mu))^2\,d\mu = \frac{4\pi a^2}{2n+1}, \qquad (56)$$

так что

$$\int\limits_{-1}^{+1} (P_n(\mu))^2\,d\mu = \frac{2}{2n+1}. \qquad (57)$$

139. Если зональная гармоника рассматривается просто как функция от μ без специальной ссылки на сферическую поверхность, она может быть названа Коэффициентом Лежандра.

Если же рассматривать зональную гармонику на сферической поверхности, точки которой определяются координатами θ и φ, и принять, что полюс зональной гармоники находится в точке (θ', φ'), то значение зональной гармоники в точке (θ, φ) будет функцией четырех углов θ', φ', θ, φ, но поскольку оно зависит лишь от μ, т. е. от косинуса дуги, соединяющей точки (θ, φ) и (θ', φ'), оно не меняется при замене θ на θ' и φ на φ' и наоборот. Выраженная так зональная гармоника называется Коэффициентом Лапласа. Томсон и Тэт называют ее Биаксиальной Гармоникой.

Любая однородная функция от x, y, z, удовлетворяющая уравнению Лапласа, может быть названа Пространственной гармоникой, а значение пространственной гармоники на поверхности сферы с центром в начале координат может быть названо Поверхностной гармоникой. В этой книге мы определили поверхностную гармонику через ее n полюсов, так что в ней только $2n$ переменных. Пространственная гармоника в более широком смысле, имеющая $2n+1$ переменных, отличается от пространственной гармоники в узком смысле слова умножением на произвольную постоянную. Пространственная гармоника в широком смысле слова, выраженная через θ и φ, называется Функцией Лапласа.

140 а. Чтобы получить другие гармоники симметричной системы, нужно продифференцировать по σ осям, лежащим в плоскости xy и образующим друг с другом угол π/σ. Это удобнее всего сделать с помощью системы комплексных координат, приведенной в *Natural Philosophy* Томсона и Тэта (т. I, с. 148 первого издания, с. 185 — второго).

Если положить $\xi=x+iy$, $\eta=x-iy$, где i означает $\sqrt{-1}$, то операция дифференцирования по осям σ, одна из которых образует угол α с осью x, может быть записана для нечетных σ следующим образом:

$$\left(e^{i\alpha}\frac{d}{d\xi}+e^{-i\alpha}\frac{d}{d\eta}\right)\left(e^{i\left(\alpha+\frac{2\pi}{\sigma}\right)}\frac{d}{d\xi}+e^{-i\left(\alpha+\frac{2\pi}{\sigma}\right)}\frac{d}{d\eta}\right)\left(e^{i\left(\alpha+\frac{4\pi}{\sigma}\right)}\frac{d}{d\xi}+e^{-i\left(\alpha+\frac{4\pi}{\sigma}\right)}\frac{d}{d\eta}\right)\ldots .$$

Это эквивалентно

$$\cos\sigma\alpha\left\{\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma}+\frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma}\right\}+\sin\sigma\alpha\cdot i\left\{\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma}-\frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma}\right\}. \tag{58}$$

Для четных σ можно доказать, что операция дифференцирования может быть записана в виде

$$(-1)^{\frac{\sigma+2}{2}}\left\{\cos\sigma\alpha\cdot i\left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma}-\frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma}\right)-\sin\sigma\alpha\left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma}+\frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma}\right)\right\}. \tag{59}$$

Таким образом, если положить

$$i\left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma}-\frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma}\right)=D^{(\sigma)}s, \qquad \frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma}+\frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma}=D^{(\sigma)}c,$$

то операции дифференцирования по осям σ можно выразить через $D^{(\sigma)}s$, $D^{(\sigma)}c$. В действительности это, конечно, вещественные операции, которые могут быть выражены и без комплексных обозначений. Так,

$$2^{\sigma-1}D^{(\sigma)}s=\sigma\frac{d^{\sigma-1}}{dx^{\sigma-1}}\frac{d}{dy}-\frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^{\sigma-3}}{dx^{\sigma-3}}\frac{d^3}{dy^3}+\ldots, \tag{60}$$

$$2^{\sigma-1}D^{(\sigma)}c=\frac{d^\sigma}{dx^\sigma}-\frac{\sigma(\sigma-1)}{1\cdot 2}\frac{d^{\sigma-2}}{dx^{\sigma-2}}\frac{d^2}{dy^2}+\ldots . \tag{61}$$

Мы будем также писать

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}D^{(\sigma)}s=D^{(\sigma)}_{n}s \quad \text{и} \quad \frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}D^{(\sigma)}c=D^{(\sigma)}_{n}c, \tag{62}$$

так что $D^{(\sigma)}_{n}s$ и $D^{(\sigma)}_{n}c$ обозначают операции дифференцирования по n осям, из которых $n-\sigma$ совпадают с осью z, а остальные σ расположены под равными углами друг к другу в плоскости xy, причем обозначение $D^{(\sigma)}_{n}s$ применяется, если ось y совпадает с одной из этих осей, а $D^{(\sigma)}_{n}c$ — когда ось y делит пополам угол между осями.

Обе тессеральные поверхностные гармоники порядка n типа σ можно теперь представить в виде

$$Y^{(\sigma)}_{n}s=(-1)^n\frac{1}{n!}r^{n+1}D^{(\sigma)}_{n}s\frac{1}{r}, \tag{63}$$

$$Y^{(\sigma)}_{n}c=(-1)^n\frac{1}{n!}r^{n+1}D^{(\sigma)}_{n}c\frac{1}{r}. \tag{64}$$

Положив $\mu=\cos\theta$, $\nu=\sin\theta$, $\rho^2=x^2+y^2$, $r^2=\xi\eta+z^2$, так что $z=\mu r$, $\rho=\nu r$, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим

$$D^{(\sigma)}s\frac{1}{r}=(-1)^{\sigma}\frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!}i(\eta^{\sigma}-\xi^{\sigma})\frac{1}{r^{2\sigma+1}}, \qquad (65)$$

$$D^{(\sigma)}c\frac{1}{r}=(-1)^{\sigma}\frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!}(\xi^{\sigma}+\eta^{\sigma})\frac{1}{r^{2\sigma+1}}, \qquad (66)$$

где можно положить

$$\frac{i}{2}(\eta^{\sigma}-\xi^{\sigma})=\rho^{\sigma}\sin\sigma\varphi, \qquad \frac{1}{2}(\xi^{\sigma}+\eta^{\sigma})=\rho^{\sigma}\cos\sigma\varphi. \qquad (67)$$

Остается лишь продифференцировать по z, что мы и проделаем, выразив результат либо через r и z, либо как однородную функцию от z и ρ, деленную на некоторую степень r:

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}\frac{1}{r^{2\sigma+1}}=(-1)^{n-\sigma}\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{2^{\sigma}\sigma!}{(2\sigma)!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left[z^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)}z^{n-\sigma-2}r^2+\ldots\right] \qquad (68)$$

или

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}\frac{1}{r^{2\sigma+1}}=(-1)^{n-\sigma}\frac{(n+\sigma)!}{(2\sigma)!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left[z^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)}z^{n-\sigma-2}\rho^2+\ldots\right]. \qquad (69)$$

Если ввести

$$\Theta_n^{(\sigma)}=\nu^{\sigma}\left[\mu^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-\sigma-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-\sigma-4}-\ldots\right] \qquad (70)$$

и

$$\overline{\Theta}_n^{(\sigma)}=\nu^{\sigma}\left[\mu^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4\cdot(\sigma+1)}\mu^{n-\sigma-2}\nu^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{4\cdot 8\cdot(\sigma+1)(\sigma+2)}\mu^{n-\sigma-4}\nu^4-\ldots\right], \qquad (71)$$

то

$$\Theta_n^{(\sigma)}=\frac{2^{n-\sigma}n!\,(n+\sigma)!}{(2n)!\,\sigma!}\overline{\Theta}_n^{(\sigma)}, \qquad (72)$$

так что обе эти функции отличаются лишь постоянным множителем.

Теперь мы можем выразить обе тессеральные гармоники порядка n типа σ через Θ или $\overline{\Theta}$:

$$Y_n^{(\sigma)}s=\frac{(2n)!}{2^{n+\sigma}n!\,n!}\Theta_n^{(\sigma)}2\sin\sigma\varphi=\frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}n!\,\sigma!}\overline{\Theta}_n^{(\sigma)}2\sin\sigma\varphi, \qquad (73)$$

$$Y_n^{(\sigma)}c=\frac{(2n)!}{2^{n+\sigma}n!\,n!}\Theta_n^{(\sigma)}2\cos\sigma\varphi=\frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}n!\,\sigma!}\overline{\Theta}_n^{(\sigma)}2\cos\sigma\varphi. \qquad (74)$$

Следует учесть, что если $\sigma=0$, то $\sin\sigma\varphi=0$, а $\cos\sigma\varphi=1$.

Для каждого значения σ от 1 до n включительно имеются две гармоники, но при $\sigma=0$ $Y_n^{(0)}s=0$, а $Y_n^{(0)}c=P_n$ — зональная гармоника. Таким образом, полное число гармоник порядка n равно $2n+1$, как и должно быть.

140 б. Численное значение Y, принятое в этой книге, получается дифференцированием r^{-1} по n осям и делением на $n!$. Оно представляет собой произведение четырех множителей — синуса или косинуса от $\sigma\varphi$, ν^{σ}, функции от μ (или от μ и ν) и численного коэффициента.

Произведение второго и третьего множителя, т. е. зависящая от θ часть, выражается через три различные функции, отличающиеся, однако, лишь численными множителями. Если ее представить как произведение ν^{σ} на ряд по убывающим степеням μ, первый член которого равен $\mu^{n-\sigma}$, то получится функция, которую, следуя Томсону и Тэту, мы обозначаем через Θ.

Функция, которую Хайне (Heine) (*Handbuch der Kugelfunctionen*, § 47) обозначает $P_{\sigma}^{(n)}$ и называет *zugeordnete Function erster Art*, или, как переводит Тодхантер, «присоединенная функция первого рода» (associated function of the first kind) связана с $\Theta_n^{(\sigma)}$ соотношением

$$\Theta_n^{(\sigma)} = (-1)^{\sigma/2} P_{\sigma}^{(n)}. \tag{75}$$

Ряд по убывающим степеням μ, начинающийся с $\mu^{n-\sigma}$, обозначен Хайне символом $\mathfrak{P}_{\sigma}^{(n)}$, а Тодхантером — символом $\tilde{\omega}(\sigma, n)$.

Этот ряд можно представить в двух других видах:

$$\mathfrak{P}_{\sigma}^{(n)} = \tilde{\omega}(\sigma, n) = \frac{(n-\sigma)!}{(2n)!} \frac{d^{n+\sigma}}{d\mu^{n+\sigma}} (\mu^2 - 1)^n = \frac{2^n (n-\sigma)!\, n!}{(2n)!} \frac{d^{\sigma}}{d\mu^{\sigma}} P_n. \tag{76}$$

Последнее представление, в котором этот ряд получается дифференцированием зональной гармоники по μ, по-видимому, подсказало мысль о введении обозначения $T_n^{(\sigma)}$, принятого Феррерсом, который определяет его так:

$$T_n^{(\sigma)} = \nu^{\sigma} \frac{d^{\sigma}}{d\mu^{\sigma}} P_n = \frac{(2n)!}{2^n (n-\sigma)!\, n!} \Theta_n^{(\sigma)}. \tag{77}$$

Если эту же величину представить как однородную функцию от μ и ν и поделить на коэффициент перед $\mu^{n-\sigma}\nu^{\sigma}$, получится функция, обозначенная нами через $\overline{\Theta}_n^{(\sigma)}$.

140 в. Гармоники симметричной системы классифицируются Томсоном и Тэтом в зависимости от формы кривых на сфере, на которых они обращаются в нуль.

Значение зональной гармоники в произвольной точке сферы является функцией косинуса расстояния от полюса. Приравнивая значение функции нулю, получим уравнение n-й степени, все корни которого лежат в промежутке от -1 до $+1$, и, следовательно, соответствуют n широтным параллелям на сфере.

Ограниченные этими параллелями зоны поочередно положительны и отрицательны, причем круг, окружающий полюс, всегда положителен.

Таким образом, зональные гармоники пригодны для выражения функции, обращающейся в нуль на определенной параллели на сфере или на какой-либо конической поверхности в пространстве.

Другие гармоники симметричной системы встречаются парами, причем одна функция в паре содержит косинус, а другая — синус от $\sigma\varphi$. Поэтому они обращаются в нуль на σ меридианных кругах на сфере, а также на $n-\sigma$ параллелях, так что сферическая поверхность разделена на $2\sigma(n-\sigma-1)$ четырехугольников или «тессер», считая в том числе 4σ треугольников у полюсов. Поэтому они полез-

ны при исследованиях, касающихся четырехугольников (тессер) на сфере, ограниченных меридианами и параллелями.

Все эти гармоники называются Тессеральными, за исключением последней пары, обращающейся в нуль лишь на n меридианных кругах и делящих сферическую поверхность на $2n$ секторов. Эти две гармоники называются Секторными.

141. Найдем теперь значение поверхностного интеграла от квадрата произвольной тессеральной гармоники по сфере. Для этого можно применить метод п. 134. Перейдем от поверхностной гармоники $Y_n^{(\sigma)}$ к пространственной гармонике положительной степени, умножив ее на r^n, продифференцируем эту пространственную гармонику по n осям самой этой гармоники, а затем положим $x=y=z=0$ и умножим результат на $4\pi a^2/[n!\,(2n+1)]$.

Эта последовательность операций запишется в наших обозначениях так:

$$\iint (Y_n^{(\sigma)})^2\, ds = \frac{4\pi a^2}{n!\,(2n+1)} D_n^{(\sigma)} (r^n Y_n^{(\sigma)}). \tag{78}$$

Записав пространственную гармонику в виде однородной функции от z, ξ и η:

$$r^n Y_n^{(\sigma)} s = \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma} n!\,\sigma!} i\,(\eta^\sigma - \xi^\sigma) \left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)} z^{n-\sigma-2}\xi\eta + \ldots \right], \tag{79}$$

мы видим, что после выполнения дифференцирований по z все слагаемые в сумме, кроме первого, исчезают и появляется множитель $(n-\sigma)!$.

Продолжая дифференцирование по ξ и η, мы избавимся и от этих переменных, введя при этом множитель $-2i\sigma!$, так что окончательный результат имеет вид

$$\iint (Y_n^{(\sigma)} s)^2\, ds = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n!\, n!}. \tag{80}$$

Правую часть этого уравнения мы сокращенно обозначим через $[n,\ \sigma]$.

Это соотношение справедливо для всех значений σ от 1 до n включительно, но при $\sigma=0$ нет гармоники с $\sin \sigma\varphi$.

Таким же способом можно показать, что

$$\iint (Y_n^{(\sigma)} c)^2\, ds = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n!\, n!} \tag{81}$$

для всех значений σ от 1 до n включительно.

При $\sigma=0$ гармоника становится зональной гармоникой и

$$\iint (Y_n^{(0)} c)^2\, ds = \iint (P_n)^2\, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1}, \tag{82}$$

что можно получить прямо из уравнения (50), положив $Y_n = P_m$ и учтя, что значение зональной гармоники в ее полюсе равно единице.

142 а. Теперь мы можем применить метод п. 136 для определения коэффициента перед любой тессеральной поверхностной гармоникой в разложении произвольной функции от положения точки на сфере. Действительно, пусть F — произвольная функция и A_n^σ — коэффициент перед $Y_n^{(\sigma)}$ в разложении этой функ-

ции по поверхностным гармоникам симметричной системы. Тогда

$$\iint FY_n^{(\sigma)}\,ds = A_n \iint (Y_n^{(\sigma)})^2\,ds = A_n^{(\sigma)}[n,\ \sigma], \qquad (83)$$

где $[n,\ \sigma]$ — сокращенное обозначение значения поверхностного интеграла, даваемого равенством (80).

142 б. Пусть Ψ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа и не имеющая особых точек в пределах радиуса a от точки O, которую мы примем за начало координат. Такую функцию всегда можно разложить в ряд по пространственным гармоникам положительной степени с началом координат в точке O.

Одним из способов такого разложения является построение сферы с центром в точке O радиусом, меньшим a, и разложение значений потенциала на поверхности сферы в ряд по поверхностным гармоникам. Умножая каждую гармонику на r/a в степени, равной порядку поверхностной гармоники, мы получим пространственные гармоники, суммой которых и является заданная функция.

Но более удобным способом, не требующим интегрирования, является дифференцирование по осям гармоник симметричной системы.

Предположим, например, что в разложении Ψ есть член вида $A_n^{(\sigma)}cY_n^{(\sigma)}cr^n$.

Если к функции Ψ и ее разложению применить операцию

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}\left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma}+\frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma}\right)$$

и положить после дифференцирования x, y, z равными нулю, то в разложении исчезнут все члены, кроме члена, содержащего $A_n^{(\sigma)}c$.

Перейдя в операторе, применяемсм к функции Ψ, к дифференцированию по действительным осям, мы получим равенство

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}\left[\frac{d^\sigma}{dx^\sigma}-\frac{\sigma(\sigma-1)}{1\cdot 2}\frac{d^{\sigma-2}}{dx^{\sigma-2}}\frac{d^2}{dy^2}+\ldots\right]\Psi = A_n^{(\sigma)}c\,\frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^\sigma n!}, \qquad (84)$$

позволяющее определить коэффициент перед любой гармоникой ряда через производные от Ψ по x, y, z в начале координат.

143. Из уравнения (50) видно, что любая гармоника всегда может быть представлена как сумма системы зональных гармоник того же порядка, полюса которых распределены по поверхности сферы. Упрощение этой системы не представляется, однако, легким. Но с целью сделать наглядными некоторые свойства сферических гармоник, я рассчитал зональные гармоники третьего и четвертого порядка и описанным выше методом сложения функций построил эквипотенциальные линии на сфере для гармоник, являющихся суммой двух зональных гармоник (см. рис. VI—IX в конце этого тома).

На рис. VI показана разность двух зональных гармоник третьего порядка, оси которых наклонены под углом 120° в плоскости рисунка. Эта разность представляет собой гармонику второго типа с $\sigma=1$ и осью, перпендикулярной рисунку.

На рис. VII также показана гармоника третьего порядка, но оси зональных гармоник, сумма которых построена, наклонены под углом 90°, и результат не относится к какому-либо типу симметричной системы. Одна из узловых линий — большой круг, но две другие, пересекаемые ею, не являются кругами.

На рис. VIII показана разность двух зональных гармоник четвертого порядка, оси которых перпендикулярны. В результате получается тессеральная гармоника с $n=4$, $\sigma=2$.

На рис. IX показана сумма этих же гармоник. Результат дает представление об одном из типов гармоник четвертого порядка общего вида. Для этого типа узловая линия состоит из шести непересекающихся овалов. Внутри этих овалов гармоника положительна, а в шестисвязной области сферической поверхности, лежащей вне овалов, гармоника отрицательна.

На всех этих графиках показаны ортогональные проекции сферической поверхности.

Я построил также на рис. V плоское сечение через ось сферы, чтобы показать эквипотенциальные поверхности и силовые линии, создаваемые сферической поверхностью, на которой распределение поверхностного заряда определяется сферической гармоникой первого порядка.

Внутри сферы эквипотенциальные поверхности являются эквидистантными плоскостями, а силовые линии — прямые, параллельные оси, причем их расстояния от оси пропорциональны квадратным корням из натуральных чисел. Линии вне сферы могут служить примером того, как выглядели бы характеристики магнитного поля Земли, если бы земной магнетизм был распределен наиболее простым образом.

144 а. Теперь мы в состоянии найти распределение электричества на сферическом проводнике под действием электрических сил с заданным потенциалом.

Указанными выше методами разложим заданный потенциал Ψ в ряд по пространственным гармоникам положительной степени с началом координат в центре сферы.

Пусть $A_n r^n Y_n$—одна из этих гармоник. Поскольку на проводящей сфере потенциал постоянен, то должен существовать член $-A_n r^n Y_n$, обусловленный распределением заряда по поверхности сферы, а значит, в разложение $4\pi\sigma$ должно входить слагаемое $4\pi\sigma_n=(2n+1)a^{n-1}A_n Y_n$.

Таким образом, мы можем определить коэффициенты всех гармоник в выражении для поверхностной плотности, за исключением нулевой. Коэффициент перед гармоникой нулевого порядка зависит от заряда e сферы и дается соотношением $4\pi\sigma_0=a^{-2}e$.

Потенциал сферы равен $V=\Psi_0+(e/a)$.

144 б. Пусть теперь сфера помещена вблизи заземленных проводников и известна Функция Грина G от координат любых двух точек x, y, z и x', y', z' в области, куда помещена сфера.

Если поверхностная плотность на сфере представлена как ряд по сферическим гармоникам, то проявления электричества вне сферы в точности такие же, какие были бы при помещении ряда воображаемых особых точек в центре сферы, первая из которых представляет собой простой точечный заряд, равный заряду сферы, а остальные — кратные точки различного порядка, соответствующие гармоникам плотности заряда на поверхности сферы.

Обозначим функцию Грина через $G_{pp'}$, где индекс p указывает точку с координатами x, y, z, а индекс p' — точку с координатами x', y', z'.

Если заряд A_0 помещен в точку p', то, считая x', y', z' постоянными, мы можем рассматривать $G_{pp'}$ как функцию от x, y, z. Потенциал, создаваемый электричеством, наведенным на окружающих телах зарядом A_0, равен

$$\Psi = A_0 G_{pp'}. \tag{1}$$

Если бы заряд A_0 находился не в точке p', а был равномерно распределен по сфере радиуса a с центром в точке p', то значение Ψ в точках вне сферы осталось бы таким же.

При неравномерном распределении заряда по сфере представим поверхностную плотность заряда в виде ряда по сферическим гармоникам

$$4\pi a^2\sigma = A_0 + 3A_1Y_1 + \ldots + (2n-1)A_nY_n + \ldots, \tag{2}$$

что всегда можно сделать.

Потенциал, создаваемый каждым членом этого разложения, например членом

$$4\pi a^2\sigma_n = (2n+1)A_nY_n, \tag{3}$$

равен $\frac{r^n}{a^{n+1}}A_nY_n$ в точках внутри сферы и $\frac{a^n}{r^{n+1}}A_nY_n$ в точках вне сферы.

Последнее выражение, согласно (13), (14) из п. 129 в и 129 г, равно

$$(-1)^n A_n \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dh_1 \ldots dh_n} \frac{1}{r},$$

т. е. потенциал вне сферы, создаваемый распределением заряда на поверхности сферы, такой же, как от определенной кратной точки с осями $h_1, \ldots, h_n$ и моментом A_na^n. Следовательно, распределение электричества на окружающих проводниках и потенциал, создаваемый этим распределением, будут такими же, как и для такой кратной точки.

Таким образом, потенциал в точке p с координатами x, y, z, обусловленный наведенным электричеством на окружающих телах, равен

$$\Psi_n = (-1)^n A_n \frac{d'^n}{d'h_1\, d'h_2 \ldots d'h_n} G, \tag{4}$$

где штрихи при d показывают, что дифференцирование производится по x', y', z'. После дифференцирования эти координаты приравниваются к координатам центра сферы.

Удобно считать Y_n разбитым на $2n+1$ составляющих симметричной системы. Пусть $A_nY_n^{(\sigma)}$ — одна из этих составляющих. Тогда

$$\frac{d'^n}{d'h_1 \ldots d'h_n} = D_n'^{(\sigma)}. \tag{5}$$

Здесь не нужно ставить индекс s или c, указывающий, какая из функций, $\sin \sigma\varphi$ или $\cos \sigma\varphi$, входит в гармонику.

Мы можем теперь написать полное выражение для потенциала Ψ, возникающего из-за наведенного заряда:

$$\Psi = A_0 G + \sum\sum \left[(-1)^n A_n^{(\sigma)} \frac{a^n}{n!} D_n'^{(\sigma)} G\right]. \tag{6}$$

Но на сфере потенциал постоянен, т. е.

$$\Psi+\frac{1}{a}A_0+\sum\sum\left[\frac{r^{n_1}}{a^{n_1+1}}A_{n_1}^{(\sigma_1)}Y_{n_1}^{(\sigma_1)}\right]=\text{const}. \qquad (7)$$

Применим теперь к этому выражению операцию $D_{n_1}^{(\sigma_1)}$, где дифференцирование производится по x, y, z, а значения n_1 и σ_1 независимы от n и σ. В (7) обращаются в нуль все члены, кроме члена с $V_{n_1}^{(\sigma_1)}$, и мы получаем

$$-2\frac{(n_1+\sigma_1)!\,(n_1-\sigma_1)!}{2^{2\sigma_1}\,n_1!}\frac{1}{a^{n_1+1}}A_{n_1}^{(\sigma_1)}=A_0D_{n_1}^{(\sigma_1)}G+\sum\sum\left[(-1)^n A_n^{(\sigma)}\frac{a^n}{n!}D_{n_1}^{(\sigma_1)}D_n'^{(\sigma)}G\right]. \qquad (8)$$

Таким образом, мы получили систему уравнений, в левой части которых содержится подлежащий определению коэффициент. Первое слагаемое в правой части содержит A_0, заряд сферы, его можно считать главным слагаемым.

Если пока остальными слагаемыми пренебречь, то получится в первом приближении

$$A_{n_1}^{(\sigma_1)}=-\frac{1}{2}\frac{2^{2\sigma_1}\,n_1!}{(n_1+\sigma_1)!\,(n_1-\sigma_1)!}A_0a^{n_1+1}D_{n_1}^{(\sigma_1)}G. \qquad (9)$$

Если наименьшее расстояние от центра сферы до ближайшего из окружающих проводников обозначить через b, то

$$a^{n_1+1}D_{n_1}^{(\sigma_1)}G<n_1!\left(\frac{a}{b}\right)^{n_1+1}.$$

Следовательно, при b, много большем радиуса сферы a, коэффициенты остальных сферических гармоник много меньше A_0. Отношение последующих членов в правой части уравнения (8) к первому будет порядка $(a/b)^{2n+n_1+1}$. Поэтому в первом приближении ими можно пренебречь. Во втором приближении можно в эти члены подставить значения коэффициентов из первого приближения и так далее до тех пор, пока не будет достигнута нужная степень приближения.

Распределение электричества
на почти сферическом проводнике

145 а. Пусть уравнение поверхности проводника имеет вид

$$r=a\,(1+F), \qquad (1)$$

где F — функция от направления r, т. е. от θ и φ квадратом которой можно пренебречь в данном исследовании.

Представим F в виде ряда по поверхностным гармоникам

$$F=f_0+f_1Y_1+f_2Y_2+\ldots+f_nY_n. \qquad (2)$$

Из всех этих членов первый член определяется отличием среднего радиуса от a. Если предположить, что a равно среднему радиусу, т. е. приблизительно равно радиусу сферы того же объема, что и заданный проводник, то коэффициент f_0 обратится в нуль.

Второе слагаемое, с коэффициентом f_1, зависит от расстояния между центром масс проводника, предполагаемого однородным по плотности, и началом коорди-

нат. Если принять центр масс за начало координат, то коэффициент f_1 тоже обратится в нуль.

Предположим сначала, что на проводник с зарядом A_0 не действует внешняя электрическая сила. Тогда потенциал вне проводника должен иметь вид

$$V=A_0\frac{1}{r}+A_1Y'_1\frac{1}{r^2}+\ldots+A_nY'_n\frac{1}{r^{n+1}}+\ldots. \quad (3)$$

Здесь не предполагается, что поверхностные гармоники того же вида, что и в разложении F.

На поверхности проводника потенциал равен потенциалу проводника, т. е. постоянной величине α. Поэтому, выражая степени r через a и F и пренебрегая квадратами и высшими степенями F, мы получим

$$\alpha=A_0\frac{1}{a}(1-F)+A_1\frac{1}{a^2}Y'_1(1-2F)+\ldots+A_n\frac{1}{a^{n+1}}Y'_n(1-(n+1)F)+\ldots. \quad (4)$$

Поскольку коэффициенты A_1 и т. д., очевидно, много меньше A_0, мы можем для начала пренебречь произведениями этих коэффициентов на F.

Если теперь подставить вместо F в первом члене (4) его разложение по сферическим гармоникам и приравнять нулю слагаемые со сферическими гармониками одинакового порядка, мы получим

$$\alpha=A_0/a, \quad (5)$$

$$A_1Y'_1=A_0af_1Y_1=0, \quad (6)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$A_nY'_n=A_0a^nf_nY_n. \quad (7)$$

Из этих уравнений следует, что функции Y должны быть того же типа, что и Y' и, следовательно, совпадать с ними, и что $A_1=0$ и $A_n=A_0a^nf_n$.

Для определения плотности заряда в произвольной точке поверхности можно воспользоваться уравнением

$$4\pi\sigma=-\frac{dV}{d\nu}=-\frac{dV}{dr}\cos\varepsilon \text{ (приближенно)}. \quad (8)$$

Здесь ν — нормаль, а ε — угол между нормалью и радиусом. Поскольку в нашем исследовании мы считаем F и его первые производные по θ и φ малыми, мы можем считать $\cos\varepsilon=1$, так что

$$4\pi\sigma=-\frac{dV}{dr}=A_0\frac{1}{r^2}+\ldots+(n+1)A_nY_n\frac{2}{r^{n+2}}+\ldots. \quad (9)$$

Выражая степени r через a и F и пренебрегая произведениями F на A_n, получим

$$4\pi\sigma=A_0\frac{1}{a^2}(1-2F)+\ldots+(n+1)A_n\frac{1}{a^{n+2}}Y_n. \quad (10)$$

Разлагая F по сферическим гармоникам и подставляя найденные значения A_n, получим

$$4\pi\sigma=A_0\frac{1}{a^2}[1+f_2Y_2+2f_3Y_3+\ldots+(n-1)f_nY_n]. \quad (11)$$

Таким образом, если поверхность отличается от поверхности сферы тонким слоем, толщина которого меняется как сферическая гармоника порядка n, то отношение разности поверхностных плотностей заряда в любых двух точках к их сумме в $n-1$ раз больше отношения разностей радиус-векторов этих двух точек к их сумме.

145 б. Пусть теперь почти сферический проводник находится под действием внешних электрических сил, потенциал которых обозначим через U. Разложим его в ряд по сферическим гармоникам положительной степени с началом координат в центре объема проводника

$$U=B_0+B_1rY_1'+B_2r^2Y_2'+\ldots+B_nr^nY_n'+\ldots. \tag{12}$$

Штрихи при Y показывают, что эти гармоники не обязательно того же типа, что гармоники того же порядка в разложении для F.

Если бы проводник был точно сферическим, то потенциал, создаваемый его поверхностным зарядом в точке вне проводника, был бы равен

$$V=A_0\frac{1}{r}-B_1\frac{a^3}{r^2}Y_1'-\ldots-B_n\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}}Y_n'-\ldots. \tag{13}$$

Пусть истинный потенциал, создаваемый поверхностным зарядом, равен $V+W$, где

$$W=C_1\frac{1}{r^2}Y_1''+\ldots+C_m\frac{1}{r^{m+1}}Y_m''+\ldots. \tag{14}$$

Гармоники с двумя штрихами отличаются от гармоник входящих как в F, так и в U, а коэффициенты C малы, поскольку F мало.

Потенциалы должны удовлетворять условию, что при $r=a\,(1+F)$ сумма

$$U+V+W=\text{const}=A_0/a+B_0$$

равна потенциалу проводника.

Выражая степени r через a и F, сохраняя первую степень F, умноженную на A или B, и пренебрегая произведениями F на малые величины C, получим

$$F\left[-A_0\frac{1}{a}+3B_1aY_1'+5B_2a^2Y_2'+\ldots+(2n+1)\,B_na^nY_n'+\ldots\right]+$$
$$+C_1\frac{1}{a^2}Y_1''+\ldots+C_m\frac{1}{a^{m+1}}Y_m''+\ldots=0. \tag{15}$$

Чтобы найти коэффициенты C, нужно выполнить умножение в первой строчке и выразить результат через сферические гармоники. Тогда этот ряд, взятый с обратным знаком, и будем рядом для W на поверхности проводника.

Произведение двух поверхностных сферических гармоник порядка n и m является рациональной функцией степени $n+m$ по x/r, y/r, z/r и, следовательно, может быть разложено в ряд по сферическим гармоникам степени не выше $n+m$. Поэтому, если F может быть разложено по сферическим гармоникам степени не выше m, а потенциал внешних сил может быть разложен по сферическим гармоникам степени не выше n, то потенциал, создаваемый поверхностными зарядами, будет содержать сферические гармоники степени не выше $m+n$.

Соответствующая поверхностная плотность заряда может быть затем найдена по потенциалу из приближенного равенства

$$4\pi\sigma+\frac{d}{dr}(U+V+W)=0. \qquad (16)$$

145 в. *Почти сферический проводник в почти сферическом и почти концентрическом проводящем сосуде.*

Пусть уравнение поверхности проводника

$$r=a\,(1+F), \qquad (17)$$

где

$$F=f_1Y_1+\ldots+f_n^{(\sigma)}Y_n^{(\sigma)}, \qquad (18)$$

а уравнение внутренней поверхности сосуда

$$r=b\,(1+G), \qquad (19)$$

где

$$G=g_1Y_1+\ldots+g_n^{(\sigma)}Y_n^{(\sigma)}. \qquad (20)$$

Здесь коэффициенты f и g малы по сравнению с единицей, а $Y_n^{(\sigma)}$ — поверхностные гармоники порядка n типа σ.

Пусть потенциал проводника равен α, а потенциал сосуда β. Представим потенциал в произвольной точке между проводником и сосудом в виде разложения по сферическим гармоникам

$$\Psi=h_1+h_1Y_1r+\ldots+h_n^{(\sigma)}Y_n^{(\sigma)}r^n+\ldots+k_0\frac{1}{r}+k_1Y_1\frac{1}{r^2}+\ldots+k_n^{(\sigma)}Y_n^{(\sigma)}\frac{1}{r^{n+1}}+\ldots\,. \qquad (21)$$

Нужно определить постоянные h и k из условия, что $\Psi=\alpha$ при $r=a\,(1+F)$ и $\Psi=\beta$ при $r=b\,(1+G)$.

Из предыдущего рассмотрения ясно, что все коэффициенты h и k, кроме h_0 и k_0, малы, так что их произведениями на F можно пренебречь. Поэтому можно написать

$$\alpha=h_0+k_0\frac{1}{a}(1-F)+\ldots+\left(h_n^{(\sigma)}a^n+k_n^{(\sigma)}\frac{1}{a^{n+1}}\right)Y_n^{(\sigma)}+\ldots, \qquad (22)$$

$$\beta=h_0+k_0\frac{1}{b}(1-G)+\ldots+\left(h_n^{(\sigma)}b^n+k_n^{(\sigma)}\frac{1}{b^{n+1}}\right)Y_n^{(\sigma)}+\ldots\,. \qquad (23)$$

Отсюда следует

$$\alpha=h_0+k_0\frac{1}{a}, \qquad (24)$$

$$\beta=h_0+k_0\frac{1}{b}, \qquad (25)$$

$$k_0\frac{1}{a}f_n^{(\sigma)}=h_n^{(\sigma)}a^n+k_n^{(\sigma)}\frac{1}{a^{n+1}}, \qquad (26)$$

$$k_0\frac{1}{b}g_n^{(\sigma)}=h_n^{(\sigma)}b^n+k_n^{(\sigma)}\frac{1}{b^{n+1}}, \qquad (27)$$

откуда получаем заряд внутреннего проводника

$$k_0=(\alpha-\beta)ab/(b-a) \qquad (28)$$

и значения коэффициентов гармоник порядка n

$$h_n^{(\sigma)} = k_0 \frac{b^n g_n^{(\sigma)} - a^n f_n^{(\sigma)}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}, \tag{29}$$

$$k_n^{(\sigma)} = k_0 a^n b^n \frac{b^{n+1} f_n^{(\sigma)} - a^{n+1} g_n^{(\sigma)}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}. \tag{30}$$

Следует при этом помнить, что коэффициенты $f_n^{(\sigma)}$, $g_n^{(\sigma)}$, $h_n^{(\sigma)}$, $k_n^{(\sigma)}$ относятся к одному и тому же порядку и к одному и тому же типу.

Поверхностная плотность заряда на внутреннем проводнике дается соотношением

$$4\pi\sigma a^2 = k_0 (1 + \ldots + A_n Y_n^{(\sigma)} + \ldots),$$

где

$$A_n = \frac{f_n^{(\sigma)} \{(n+2) a^{2n+1} + (n-1) b^{2n+1}\} - g_n^{(\sigma)} (2n+1) a^{n+1} b^n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}. \tag{31}$$

146. В качестве примера применения зональных гармоник рассмотрим равновесие электричества на двух сферических проводниках.

Пусть a и b — радиусы сфер, а c — расстояние между их центрами. Для краткости мы положим $a=cx$, $b=cy$, так что x и y — числа, меньшие единицы.

Примем прямую, соединяющую центры сфер, за ось зональных гармоник, и пусть полюсом зональных гармоник, относящихся к каждой сфере, служит точка этой сферы, наиболее близкая к другой сфере.

Обозначим через r расстояние произвольной точки до центра первой сферы, а через s — расстояние той же точки от центра второй сферы.

Пусть поверхностная плотность заряда σ_1 для первой сферы дается выражением

$$4\pi\sigma_1 a^2 = A + A_1 P_1 + 3A_2 P_2 + \ldots + (2m+1) A_m P_m, \tag{1}$$

так что A — полный заряд сферы, а A_1 и т. д.— коэффициенты зональных гармоник P_1 и т. д.

Потенциал такого распределения заряда можно представить в виде

$$U' = \frac{1}{a}\left[A + A_1 P_1 \frac{r}{a} + A_2 P_2 \frac{r^2}{a^2} + \ldots + A_m P_m \frac{r^m}{a^m}\right] \tag{2}$$

для точек внутри сферы и

$$U = \frac{1}{r}\left[A + A_1 P_1 \frac{a}{r} + A_2 P_2 \frac{a^2}{r^2} + \ldots + A_m P_m \frac{a^m}{r^m}\right] \tag{3}$$

для точек вне сферы.

Подобным образом, если поверхностная плотность заряда на второй сфере дается выражением

$$4\pi\sigma_2 b^2 = B + B_1 P_1 + \ldots + (2n+1) B_n P_n, \tag{4}$$

то обусловленный ею потенциал вне и внутри этой сферы представляется в виде

$$V'=\frac{1}{b}\left[B+B_1P_1\frac{s}{b}+\ldots+B_nP_n\frac{s^n}{b^n}\right], \qquad (5)$$

$$V=\frac{1}{s}\left[B+B_1P_1\frac{b}{s}+\ldots+B_nP_n\frac{b^n}{s^n}\right], \qquad (6)$$

где все гармоники относятся ко второй сфере.

Заряды на сферах равны соответственно A и B.

Потенциал в каждой точке внутри первой сферы постоянен и равен потенциалу этой сферы α, так что внутри сферы

$$U'+V=\alpha. \qquad (7)$$

Точно так же, если потенциал второй сферы равен β, то для точек внутри этой сферы

$$U+V'=\beta. \qquad (8)$$

Для точек вне обеих сфер потенциал равен Ψ, где

$$U+V=\Psi. \qquad (9)$$

На оси между центрами сфер

$$r+s=c. \qquad (10)$$

Отсюда, дифференцируя по r, полагая после дифференцирования $r=0$ и учитывая, что в полюсе каждая зональная гармоника равна единице, получим

$$A_1\frac{1}{a^2}-\frac{dV}{ds}=0,\quad A_2\frac{2!}{a^3}+\frac{d^2V}{ds^2}=0,\quad \ldots,\quad A_m\frac{m!}{a^{m+1}}+(-1)^m\frac{d^mV}{ds^m}=0, \qquad (11)$$

где после дифференцирования s следует положить равным c.

Если выполнить дифференцирование и положить $a/c=x$ и $b/c=y$, то уравнения примут вид

$$\begin{aligned}
0&=A_1+Bx^2+2B_1x^2y+3B_2x^2y^2+\ldots+(n+1)B_nx^2y^n,\\
0&=A_2+Bx^3+3B_1x^3y+6B_2x^3y^2+\ldots+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)B_nx^3y^n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0&=A_m+Bx^{m+1}+(m+1)B_1x^{m+1}y+\frac{1}{2}(m+1)(m+2)B_2x^{m+1}y^2+\ldots\\
&\qquad\ldots+\frac{(m+n)!}{m!\,n!}B_nx^{m+1}y^n.
\end{aligned} \qquad (12)$$

Соответствующие выкладки для другой сферы дают

$$\begin{aligned}
0&=B_1+Ay^2+2A_1xy^2+3A_2x^2y^2+\ldots+(m+1)A_mx^my^2,\\
0&=B_2+Ay^3+3A_1xy^3+6A_2x^2y^3+\ldots+\frac{1}{2}(m+1)(m+2)A_mx^my^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0&=B_n+Ay^{n+1}+(n+1)A_1xy^{n+1}+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)A_2x^2y^{n+1}+\ldots\\
&\qquad\ldots+\frac{(m+n)!}{m!\,n!}A_mx^my^{n+1}.
\end{aligned} \qquad (13)$$

Для нахождения потенциалов α и β обеих сфер у нас имеются уравнения (7) и (8), которые мы можем теперь записать в виде

$$c\alpha = A\frac{1}{x} + B + B_1 y + B_2 y^2 + \ldots + B_n y^n, \tag{14}$$

$$c\beta = B\frac{1}{y} + A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m \tag{15}$$

Таким образом, если ограничиться коэффициентами от A_1 до A_m и от B_1 до B_n, то у нас есть $m+n$ уравнений для выражения этих величин через заряды обеих сфер A и B, а подставляя значения этих коэффициентов в (14) и (15), мы можем выразить потенциалы сфер через их заряды.

Эти операции можно произвести с помощью определителей, но с вычислительной точки зрения удобнее действовать следующим образом.

Подставив в уравнение (12) значения $B_1, \ldots, B_n$ из уравнений (13), мы получим

$$\begin{aligned}A_1 = &-Bx^2 + Ax^2y^3[2\cdot 1 + 3\cdot 1y^2 + 4\cdot 1y^4 + 5\cdot 1y^6 + 6\cdot 1y^8 + \ldots] +\\ &+ A_1x^3y^3[2\cdot 2 + 3\cdot 3y^2 + 4\cdot 4y^4 + 5\cdot 5y^6 + \ldots] + A_2x^4y^3[2\cdot 3 + 3\cdot 6y^2 + 4\cdot 10y^4 + \ldots]\\ &+ A_3x^5y^3[2\cdot 4 + 3\cdot 10y^2 + \ldots] + A_4x^6y^3[2\cdot 5 + \ldots] + \ldots;\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}A_2 = &-Bx^3 + Ax^3y^3[3\cdot 1 + 6\cdot 1y^2 + 10\cdot 1y^4 + 15\cdot 1y^6 + \ldots]\\ &+ A_1x^4y^3[3\cdot 2 + 6\cdot 3y^2 + 10\cdot 4y^4 + \ldots] + A_2x^5y^3[3\cdot 3 + 6\cdot 6y^2 + \ldots]\\ &+ A_3x^6y^3[3\cdot 4 + \ldots] + \ldots;\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}A_3 = &-Bx^4 + Ax^4y^3[4\cdot 1 + 10\cdot 1y^2 + 20\cdot 1y^4 + \ldots]\\ &+ A_1x^5y^3[4\cdot 2 + 10\cdot 3y^2 + \ldots] + A_2x^6y^3[4\cdot 3 + \ldots] + \ldots;\end{aligned} \tag{18}$$

$$A_4 = -Bx^5 + Ax^5y^3[5\cdot 1 + 15\cdot 1y^2 + \ldots] + A_1x^6y^3[5\cdot 2 + \ldots] + \ldots \tag{19}$$

Подставляя в правые части этих равенств приближенные значения A_1 и т. д. и повторяя этот процесс для высших приближений, мы можем довести приближение для коэффициента до любой степени по восходящим степеням и произведениям x и y. Если положить $A_n = p_nA - q_nB$, $B_n = -r_nA + s_nB$, то

$$\begin{aligned}p_1 = &\,x^2y^3[2 + 3y^2 + 4y^4 + 5y^6 + 6y^8 + 7y^{10} + 8y^{12} + 9y^{14} + \ldots]\\ &+ x^5y^6[8 + 30y^2 + 75y^4 + 154y^6 + 280y^8 + \ldots] + x^7y^6[18 + 90y^2 + 288y^4 + 735y^6 + \ldots]\\ &+ x^9y^6[32 + 200y^2 + 780y^4 + \ldots] + x^{11}y^6[50 + 375y^2 + \ldots] + x^{13}y^6[72 + \ldots] + \ldots\\ &\ldots + x^8y^9[32 + 192y^2 + \ldots] + x^{10}y^9[144 + \ldots]\ldots;\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}q_1 = &\,x^2 + x^5y^3[4 + 9y^2 + 16y^4 + 25y^6 + 36y^8 + 49y^{10} + 64y^{12} + \ldots]\\ &+ x^7y^3[6 + 18y^2 + 40y^4 + 75y^6 + 126y^8 + 196y^{10} + \ldots]\\ &+ x^9y^3[8 + 30y^2 + 80y^4 + 175y^6 + 336y^8 + \ldots] + x^{11}y^3[10 + 45y^2 + 140y^4 + 350y^6 + \ldots]\\ &+ x^{13}y^3[12 + 63y^2 + 224y^4 + \ldots] + x^{15}y^3[14 + 84y^2 + \ldots] + x^{17}y^3[16 + \ldots] + \ldots\\ &+ x^8y^6[16 + 72y^2 + 209y^4 + 488y^6 + \ldots] + x^{10}y^6[60 + 342y^2 + 1222y^4 + \ldots]\\ &+ x^{12}y^6[150 + 1050y^2 + \ldots] + x^{14}y^6[308 + \ldots] + \ldots + x^{11}y^9[64 + \ldots] + \ldots\end{aligned} \tag{21}$$

Дальше удобнее будет выразить эти коэффициенты через a, b и c и расположить их по степеням c. Это облегчит дифференцирование по c. Таким образом,

получим

$$p_1=2a^2b^3c^{-5}+3a^2b^5c^{-7}+4a^2b^7c^{-9}+(5a^2b^9+8a^5b^6)c^{-11}+(6a^2b^{11}+39a^5b^8+18a^7b^6)c^{-13}$$
$$+(7a^2b^{13}+75a^5b^{10}+90a^7b^8+32a^9b^6)c^{-15}$$
$$+(8a^2b^{15}+154a^5b^{12}+288a^7b^{10}+32a^8b^9+200a^9b^8+50a^{11}b^6)c^{-17}$$
$$+(9a^2b^{17}+280a^5b^{14}+735a^7b^{12}+192a^8b^{11}+780a^9b^{10}$$
$$+144a^{10}b^9+375a^{11}b^8+72a^{13}b^6)c^{-19}+\ldots; \qquad (22)$$

$$q_1=a^2c^{-2}+4a^5b^3c^{-8}+(6a^7b^3+9a^5b^5)c^{-10}+(8a^9b^3+18a^7b^5+16a^5b^7)c^{-12}$$
$$+(10a^{11}b^3+30a^9b^5+16a^8b^6+40a^7b^7+25a^5b^9)c^{-14}$$
$$+(12a^{13}b^3+45a^{11}b^5+60a^{10}b^6+80a^9b^7+72a^8b^8+75a^7b^9+36a^5b^{11})c^{-16}$$
$$+(14a^{15}b^3+63a^{13}b^5+150a^{12}b^6+140a^{11}b^7+342a^{10}b^8+175a^9b^9+209a^8b^{10}$$
$$+126a^7b^{11}+49a^5b^{13})c^{-18}+(16a^{17}b^3+84a^{15}b^5+308a^{14}b^6+224a^{13}b^7+1050a^{12}b^8$$
$$+414a^{11}b^9+1222a^{10}b^{10}+336a^9b^{11}+488a^8b^{12}+196a^7b^{13}+64a^5b^{15})c^{-20}+\ldots \qquad (23)$$

$$p_2=3a^3b^3c^{-6}+6a^3b^5c^{-8}+10a^3b^7c^{-10}+(12a^6b^6+15a^3b^9)c^{-12}$$
$$+(27a^8b^6+54a^6b^8+21a^3b^{11})c^{-14}+(48a^{10}b^6+162a^8b^8+158a^6b^{10}+28a^3b^{13})c^{-16}$$
$$+(75a^{12}b^6+360a^{10}b^8+48a^9b^9+606a^8b^{10}+372a^6b^{12}+36a^3b^{15})c^{-18}+\ldots \qquad (24)$$

$$q_2=a^3c^{-3}+6a^6b^3c^{-9}+(9a^8b^3+18a^6b^5)c^{-11}+(12a^{10}b^3+36a^8b^5+40a^6b^7)c^{-13}$$
$$+(15a^{12}b^3+60a^{10}b^5+24a^9b^6+100a^8b^7+75a^6b^9)c^{-15}+(18a^{14}b^3+90a^{12}b^5$$
$$+90a^{11}b^6+200a^{10}b^7+126a^9b^8+225a^8b^9+126a^6b^{11})c^{-17}$$
$$+(21a^{16}b^3+126a^{14}b^5+225a^{13}b^6+350a^{12}b^7+594a^{11}b^8+525a^{10}b^9$$
$$+418a^9b^{10}+441a^8b^{11}+196a^6b^{13})c^{-19}+\ldots \qquad (25)$$

$$p_3=4a^4b^3c^{-7}+10a^4b^5c^{-9}+20a^4b^7c^{-11}+(16a^7b^6+35a^4b^9)c^{-13}+(36a^9b^6+84a^7b^8+$$
$$+56a^4b^{11})c^{-15}+(64a^{11}b^6+252a^9b^8+282a^7b^{10}+84a^4b^{13})c^{-17}+\ldots \qquad (26)$$

$$q_3=a^4c^{-4}+8a^7b^3c^{-10}+(12a^9b^3+30a^7b^5)c^{-12}+(16a^{11}b^3+60a^9b^5+80a^7b^7)c^{-14}$$
$$+(20a^{13}b^3+100a^{11}b^5+32a^{10}b^6+200a^9b^7+175a^7b^9)c^{-16}+(24a^{15}b^3+150a^{13}b^5$$
$$+120a^{12}b^6+400a^{11}b^7+192a^{10}b^8+525a^9b^9+336a^7b^{11})c^{-18}+\ldots \qquad (27)$$

$$p_4=5a^5b^3c^{-8}+15a^5b^5c^{-10}+35a^5b^7c^{-12}+(20a^8b^6+70a^5b^9)c^{-14}$$
$$+(45a^{10}b^6+120a^8b^8+126a^5b^{11})c^{-16}+\ldots \qquad (28)$$

$$q_4=a^5c^{-5}+10a^8b^3c^{-11}+(15a^{10}b^3+45a^8b^5)c^{-13}+(20a^{12}b^3+90a^{10}b^5+140a^8b^7)c^{-15}$$
$$+(25a^{14}b^3+150a^{12}b^5+40a^{11}b^6+350a^{10}b^7+350a^8b^9)c^{-17}+\ldots \qquad (29)$$

$$p_5=6a^6b^3c^{-9}+21a^6b^5c^{-11}+56a^6b^7c^{-13}+(24a^9b^6+126a^6b^9)c^{-15}+\ldots \qquad (30)$$

$$q_5=a^6c^{-6}+12a^9b^3c^{-12}+(18a^{11}b^3+63a^9b^5)c^{-14}$$
$$+(24a^{13}b^3+126a^{11}b^5+224a^9b^7)c^{-16}+\ldots \qquad (31)$$

$$p_6=7a^7b^3c^{-10}+28a^7b^5c^{-12}+84a^7b^7c^{-14}+\ldots \qquad (32)$$

$$q_6=a^7c^{-7}+14a^{10}b^3c^{-13}+(21a^{12}b^3+84a^{10}b^5)c^{-15}+\ldots \qquad (33)$$

$$p_7=8a^8b^3c^{-11}+36a^8b^5c^{-13}+\ldots \qquad (34)$$

$$q_7 = a^8c^{-8} + 16a^{11}b^3c^{-14} + \ldots \tag{35}$$

$$p_8 = 9a^9b^3c^{-12} + \ldots \tag{36}$$

$$q_8 = a^9c^{-9} + \ldots . \tag{37}$$

Значения r_n и s_n можно написать, переставив a и b соответственно в q_n и в p_n.

Если теперь выразить потенциалы обеих сфер через эти коэффициенты в виде

$$\alpha = lA + mB, \tag{38}$$

$$\beta = mA + nB, \tag{39}$$

то величины l, m, n будут коэффициентами потенциала (п. 87), причем

$$m = c^{-1} + p_1ac^{-2} + p_2a^2c^{-3} + \ldots, \tag{40}$$

$$n = b^{-1} - q_1ac^{-2} - q_2a^2c^{-3} - \ldots, \tag{41}$$

или, выражая через a, b, c,

$$\begin{aligned} m = {} & c^{-1} + 2a^3b^3c^{-7} + 3a^3b^3(a^2+b^2)c^{-9} + a^3b^3(4a^4 + 6a^2b^2 + 4b^4)c^{-11} \\ & + a^3b^3[5a^6 + 10a^4b^2 + 8a^3b^3 + 10a^2b^4 + 5b^6]c^{-13} + a^3b^3[6a^8 + 15a^6b^2 + 30a^5b^3 + 20a^4b^4 \\ & + 30a^3b^5 + 15a^2b^6 + 6b^8]c^{-15} + a^3b^3[7a^{10} + 21a^8b^2 + 75a^7b^3 + 35a^6b^4 + 144a^5b^5 \\ & + 35a^4b^6 + 75a^3b^7 + 21a^2b^8 + 7b^{10}]c^{-17} + a^3b^3[8a^{12} + 28a^{10}b^2 + 154a^9b^3 + 56a^8b^4 \\ & + 446a^7b^5 + 102a^6b^6 + 446a^5b^7 + 56a^4b^8 + 154a^3b^9 + 28a^2b^{10} + 8b^{12}]c^{-19} \\ & + a^3b^3[9a^{14} + 36a^{12}b^2 + 280a^{11}b^3 + 84a^{10}b^4 + 1107a^9b^5 + 318a^8b^6 + 1668a^7b^7 + 318a^6b^8 \\ & + 1107a^5b^9 + 84a^4b^{10} + 280a^3b^{11} + 36a^2b^{12} + 9b^{14}]c^{-21} + \ldots, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} n = {} & b^{-1} - a^3c^{-4} - a^5c^{-6} - a^7c^{-8} - (a^3 + 4b^3)a^6c^{-10} - (a^5 + 12a^2b^3 + 9b^5)a^6c^{-12} \\ & - (a^7 + 25a^4b^3 + 36a^2b^5 + 16b^7)a^6c^{-14} - (a^9 + 44a^6b^3 + 96a^4b^5 + 16a^3b^6 \\ & + 80a^2b^7 + 25b^9)a^6c^{-16} - (a^{11} + 70a^8b^3 + 210a^6b^5 + 84a^5b^6 + 260a^4b^7 + 72a^3b^8 \\ & + 150a^2b^9 + 36b^{11})a^6c^{-18} - (a^{13} + 104a^{10}b^3 + 406a^8b^5 + 272a^7b^6 + 680a^6b^7 + 468a^5b^8 \\ & + 575a^4b^9 + 209a^3b^{10} + 252a^2b^{11} + 49b^{13})a^6c^{-20} - (a^{15} + 147a^{12}b^3 + 720a^{10}b^5 \\ & + 693a^9b^6 + 1548a^8b^7 + 1836a^7b^8 + 1814a^6b^9 + 1640a^5b^{10} + 1113a^4b^{11} \\ & + 488a^3b^{12} + 392a^2b^{13} + 64b^{15})a^6c^{-22} + \ldots . \end{aligned} \tag{43}$$

Выражение для l может быть получено из выражения для n перестановкой a и b.

Потенциальная энергия системы, согласно п. 87, равна

$$W = \frac{1}{2}lA^2 + mAB + \frac{1}{2}nB^2, \tag{44}$$

а сила расталкивания обеих сфер, согласно п. 93а, равна

$$-\frac{dW}{dc} = \frac{1}{2}A^2\frac{dl}{dc} + AB\frac{dm}{dc} + \frac{1}{2}B^2\frac{dn}{dc}. \tag{45}$$

Поверхностная плотность заряда в любой точке каждой сферы дается уравнениями (1) и (4) как функция коэффициентов A_n и B_n.

ГЛАВА X

КОНФОКАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

147. Пусть общее уравнение конфокальной системы имеет вид

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1, \tag{1}$$

где λ — переменный параметр, для которого индексом мы будем различать вид поверхности второго порядка, а именно будем писать λ_1 для двухполостного гиперболоида, λ_2 — для однополостного гиперболоида и λ_3 — для эллипсоида. Величины a, λ_1, b, λ_2, c, λ_3 возрастают в указанном здесь порядке. Величина a введена здесь ради симметрии, в наших окончательных результатах мы будем всегда считать $a=0$.

Если мы рассмотрим три поверхности с параметрами λ_1, λ_2, λ_3, то из уравнений этих поверхностей найдем, что значение x^2 в точке пересечения удовлетворяет уравнению

$$x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)=(\lambda_1^2-a^2)(\lambda_2^2-a^2)(\lambda_3^2-a^2). \tag{2}$$

Значения y^2 и z^2 могут быть найдены симметричной перестановкой a, b, c. Дифференцируя это равенство по λ_1, получим

$$\frac{dx}{d\lambda_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2-a^2}x. \tag{3}$$

Если ds_1 — длина участка кривой пересечения поверхностей λ_2 и λ_3, отсекаемого поверхностями λ_1 и $\lambda_1+d\lambda_1$, то

$$\left(\frac{ds_1}{d\lambda_1}\right)^2=\left(\frac{dx}{d\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\lambda_1}\right)^2=\frac{\lambda_1^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\lambda_3^2-\lambda_1^2)}{(\lambda_1^2-a^2)(\lambda_1^2-b^2)(\lambda_1^2-c^2)}. \tag{4}$$

Знаменатель этой дроби равен произведению квадратов полуосей поверхности λ_1.

Обозначим

$$D_1^2=\lambda_3^2-\lambda_2^2,\qquad D_2^2=\lambda_3^2-\lambda_1^2,\qquad D_3^2=\lambda_2^2-\lambda_1^2 \tag{5}$$

и положим $a=0$. Тогда

$$\frac{ds_1}{d\lambda_1}=\frac{D_2D_3}{\sqrt{b^2-\lambda_1^2}\sqrt{c^2-\lambda_1^2}}. \tag{6}$$

Легко видеть, что D_2 и D_3 — полуоси центрального сечения поверхности λ_1, сопряженного диаметру, проходящему через данную точку, и что полуось D_3 параллельна ds_2, а D_2 параллельна ds_3.

---

[1] Это исследование заимствовано главным образом из весьма интересной книги «*Leçons sur les Fonctions Invérses des Transcendantes et les Surfaces Isolhermes*», par G. Lamé, Paris, 1857.

Если, кроме того, мы выразим три параметра λ_1, λ_2, λ_3 через три функции α, β, γ, определяемые уравнениями

$$\alpha = \int_0^{\lambda_1} \frac{c\,d\lambda_1}{\sqrt{(b^2-\lambda_1^2)(c^2-\lambda_1^2)}}, \quad \beta = \int_b^{\lambda_2} \frac{c\,d\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2^2-b^2)(c^2-\lambda_2^2)}}, \quad \gamma = \int_c^{\lambda_3} \frac{c\,d\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_3^2-b^2)(\lambda_3^2-c^2)}}, \tag{7}$$

то получим

$$ds_1 = (1/c)\,D_2 D_3\,d\alpha, \quad ds_2 = (1/c)\,D_3 D_1\,d\beta, \quad ds_3 = (1/c)\,D_1 D_2\,d\gamma. \tag{8}$$

148. Пусть теперь V — потенциал произвольной точки α, β, γ, тогда составляющая результирующей силы в направлении ds_1 равна

$$R_1 = -\frac{dV}{ds_1} = -\frac{dV}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds_1} = -\frac{dV}{d\alpha}\frac{c}{D_2 D_3}. \tag{9}$$

Поскольку ds_1, ds_2, ds_3 взаимно перпендикулярны, поверхностный интеграл по элементу площади $ds_2 ds_3$ равен

$$R_1\,ds_2\,ds_3 = -\frac{dV}{d\alpha}\frac{c}{D_2 D_3}\frac{D_3 D_1}{c}\frac{D_1 D_2}{c}\,d\beta\,d\gamma = -\frac{dV}{d\alpha}\frac{D_1^2}{c}\,d\beta\,d\gamma. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь элемент объема, заключенный между поверхностями α, β, γ и $a+d\alpha$, $\beta+d\beta$, $\gamma+d\gamma$. Таких элементов будет восемь, по одному в каждом октанте пространства.

Мы нашли поверхностный интеграл от нормальной составляющей силы (отсчитываемой внутрь) для элемента поверхности, отсекаемого на поверхности α поверхностями β и $\beta+d\beta$, γ и $\gamma+d\gamma$.

Поверхностный интеграл для соответствующего элемента поверхности $\alpha+d\alpha$ равен

$$+\frac{dV}{d\alpha}\frac{D_1^2}{c}\,d\beta\,d\gamma + \frac{d^2V}{d\alpha^2}\frac{D_1^2}{c}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

поскольку D_1 не зависит от α. Поверхностный интеграл по обеим противоположным граням элемента объема будет равен сумме этих выражений, т. е.

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}\frac{D_1^2}{c}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Точно так же поверхностные интегралы по двум другим парам граней равны

$$\frac{d^2V}{d\beta^2}\frac{D_2^2}{c}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \quad \text{и} \quad \frac{d^2V}{d\gamma^2}\frac{D_3^2}{c}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Эти шесть граней ограничивают элемент объемом

$$ds_1\,ds_2\,ds_3 = \frac{D_1^2 D_2^2 D_3^2}{c^3}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

и если ρ — объемная плотность заряда на этом элементе, то, согласно п. 77, мы найдем, что полный поверхностный интеграл по элементу в сумме с умноженным

на 4π количеством электричества на нем равен нулю, т. е., деля на $d\alpha\, d\beta\, d\gamma$,

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}D_1^2+\frac{d^2V}{d\beta^2}D_2^2+\frac{d^2V}{d\gamma^2}D_3^2+4\pi\rho\frac{D_1^2D_2^2D_3^2}{c^2}=0. \tag{11}$$

Уравнение (11) представляет собой пуассоновское обобщение уравнения Лапласа, записанное в эллипсоидальных координатах.

При $\rho=0$ четвертый член исчезает и уравнение эквивалентно уравнению Лапласа.

Общее рассмотрение этого уравнения читатель найдет в упомянутой выше работе Ламе.

149. Чтобы определить величины α, β, γ, мы можем выразить их в виде обычных эллиптических интегралов, введя вспомогательные углы θ, φ и ψ, где

$$\lambda_1=b\sin\theta, \tag{12}$$

$$\lambda_2=\sqrt{c^2\sin^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}, \tag{13}$$

$$\lambda_3=c\sec\psi. \tag{14}$$

Если положить $b=kc$ и $k^2+k'^2=1$, то k и k' можно назвать двумя дополнительными модулями конфокальной системы. Тогда получим

$$\alpha=\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{15}$$

— эллиптический интеграл первого рода, для которого можно воспользоваться обычным обозначением $F(k,\ \theta)$.

Таким же образом найдем, что

$$\beta=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\cos^2\varphi}}=F(k')-F(k',\ \varphi), \tag{16}$$

где $F(k')$ — полная функция для модуля k', а

$$\gamma=\int_0^\psi\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}}=F(k)-F(k,\ \psi). \tag{17}$$

Здесь α представлено как функция угла θ, который, в свою очередь, является функцией от λ_1, β — функция от φ и, следовательно, от λ_2, а γ — функция от ψ и, следовательно, от λ_3.

Можно, наоборот, эти углы и параметры рассматривать как функции от α, β, γ. Свойства таких обратных функций, а также других функций, связанных с ними, рассмотрены в трактате Ламе по этому вопросу.

Легко видеть, что, поскольку параметры — периодические функции от вспомогательных углов, они являются также периодическими функциями от α, β, γ. Периоды λ_1 и λ_3 равны $4F(k)$, а период λ_2 равен $2F(k')$.

Частные решения

150. Уравнение Лапласа удовлетворяется, если V является линейной функцией от α, β, γ. Следовательно, мы можем найти из уравнения распределение электричества на любых двух конфокальных поверхностях одного семейства, находящихся под заданными потенциалами, а также определить потенциал в любой точке между ними.

Двухполостный гиперболоид

Постоянное α соответствует двухполостному гиперболоиду. Пусть на рассматриваемом листе поверхности α имеет тот же знак, что и x. Так мы сможем рассматривать по отдельности каждый лист.

Пусть α_1 и α_2 — значения α, соответствующие двум одиночным листам, которые могут принадлежать разным гиперболоидам или одному и тому же, и пусть V_1 и V_2 — значения поддерживаемых на них потенциалов. Тогда, если положить

$$V=\frac{\alpha_1 V_2-\alpha_2 V_1+\alpha(V_1-V_2)}{\alpha_1-\alpha_2}, \tag{18}$$

то будут выполнены все условия на обеих поверхностях и в пространстве между ними. Если в объеме за поверхностью α_1 положить V постоянным и равным V_1, а в объеме за поверхностью α_2 положить V постоянным и равным V_2, то мы получим полное решение для этого частного случая.

Результирующая сила в любой точке обоих листов равна

$$\pm R_1=-\frac{dV}{ds_1}=-\frac{dV}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds_1}, \tag{19}$$

или

$$R_1=\frac{V_1-V_2}{\alpha_2-\alpha_1}\frac{c}{D_2D_3}. \tag{20}$$

Если p_1 — перпендикуляр из центра к касательной плоскости в произвольной точке, а P_1 — произведение полуосей поверхности, то $p_1D_2D_3=P_1$. Отсюда следует, что

$$R_1=\frac{V_1-V_2}{\alpha_2-\alpha_1}\frac{cp_1}{P_1}, \tag{21}$$

т. е. сила в любой точке поверхности пропорциональна длине перпендикуляра из центра к касательной плоскости.

Поверхностная плотность σ может быть найдена из уравнения

$$4\pi\sigma=R_1. \tag{22}$$

Полное количество электричества на сегменте, отсекаемом на листе гиперболоида плоскостью $x=d$, равно

$$Q=\frac{c}{2}\frac{V_1-V_2}{\alpha_2-\alpha_1}\left(\frac{d}{\lambda_1}-1\right). \tag{23}$$

Следовательно, полный заряд на всем бесконечном листе бесконечен.

Предельные формы этой поверхности:

1. При $\alpha=F(k)$ поверхность является частью плоскости xz, расположенной с положительной стороны от положительной ветви гиперболы, уравнение которой

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2-b^2}=1. \tag{24}$$

2. При $\alpha=0$ поверхность переходит в плоскость yz.

3. При $\alpha=-F(k)$ поверхность является частью плоскости xz, расположенной с отрицательной стороны от отрицательной ветви той же гиперболы.

Однополостный гиперболоид

Положив постоянным β, мы получаем уравнение однополостного гиперболоида. Поэтому две поверхности, образующие границы электрического поля, должны принадлежать двум различным гиперболоидам. В остальном исследование проводится так же, как и для двухполостного гиперболоида. Точно так же при заданной разности потенциалов плотность заряда в произвольной точке поверхности пропорциональна длине перпендикуляра из центра к касательной плоскости, а полный заряд на бесконечной поверхности бесконечен.

Предельные формы

1. При $\beta=0$ поверхность является частью плоскости xz, заключенной между двумя ветвями гиперболы, уравнение которой (24) написано выше.

2. При $\beta=F(k')$ поверхность является частью плоскости xy, находящейся вне фокального эллипса, уравнение которого

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{c^2-b^2}=1. \tag{25}$$

Эллипсоиды

Для каждого заданного эллипсоида γ постоянно. Если два эллипсоида γ_1 и γ_2 поддерживаются при потенциалах V_1 и V_2, то для произвольной точки γ между ними

$$V=\frac{\gamma_1 V_2-\gamma_2 V_1+\gamma(V_1-V_2)}{\gamma_1-\gamma_2}. \tag{26}$$

Поверхностная плотность заряда в произвольной точке равна

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{V_1-V_2}{\gamma_1-\gamma_2}\frac{cp_3}{P_3}, \tag{27}$$

где p_3 — перпендикуляр из центра к касательной плоскости, а P_3 — произведение полуосей.

Полный электрический заряд на каждой поверхности дается соотношением

$$Q_2=c\frac{V_1-V_2}{\gamma_1-\gamma_2}=-Q_1 \tag{28}$$

и конечен.

При $\gamma=F(k)$ поверхность эллипсоида уходит в бесконечность по всем направлениям.

Если положить $V_2=0$, а $\gamma_2=F(k)$, мы получим для электрического заряда на эллипсоиде γ, находящемся под потенциалом V в безгранично простирающемся поле, выражение

$$Q=cV/[F(k)-\gamma]. \tag{29}$$

Предельная форма для эллипсоидов получается при $\gamma=0$, когда поверхность превращается в часть плоскости xy внутри фокального эллипса, уравнение которого (25) написано выше.

Поверхностная плотность заряда по обе стороны эллиптической пластинки с уравнением (25) и эксцентриситетом k равна

$$\sigma=\frac{V}{4\pi\sqrt{c^2-b^2}}\frac{1}{F(k)}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{c^2-b^2}}}, \tag{30}$$

а заряд ее равен

$$Q=cV/F(k). \tag{31}$$

Частные случаи

151. Если c остается конечным, в то время как b, а следовательно, и k неограниченно уменьшаются, принимая в конце концов нулевое значение, система поверхностей преобразуется следующим образом:

Действительная ось и одна из мнимых осей каждого двухиолостного гиперболоида неограниченно уменьшаются, а сама поверхность в конце концов переходит в две плоскости, пересекающиеся по оси z.

Величина α совпадает с θ, и уравнение системы меридиональных плоскостей, к которым свелись гиперболоиды, имеет вид

$$\frac{x^2}{(\sin\alpha)^2}-\frac{y^2}{(\cos\alpha)^2}=0. \tag{32}$$

Что касается величины β, то определение (7) в п. 147 привело бы нас к бесконечному значению интеграла на нижнем пределе. Чтобы избежать этого, определим β в этом частном случае интегралом $\int\limits_{\lambda_2}^{c}\frac{c\,d\lambda_2}{\lambda_2\sqrt{c^2-\lambda_2^2}}$.

Положив теперь $\lambda_2=c\sin\varphi$, получим для β

$$\int\limits_{\varphi}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sin\varphi},\text{ т. е. } \left[\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},\right.$$

откуда

$$\cos\varphi=(e^{\beta}-e^{-\beta})/(e^{\beta}+e^{-\beta}) \tag{33}$$

и, следовательно,

$$\sin\varphi=2/(e^{\beta}+e^{-\beta}). \tag{34}$$

Если мы назовем экспоненциальную функцию $(e^{\beta}+e^{-\beta})/2$ гиперболическим косинусом или, короче, гипокосинусом β и обозначим через $\operatorname{ch}\beta$, а функцию $(e^{\beta}-e^{-\beta})/2$ назовем гипосинусом β и обозначим $\operatorname{sh}\beta$ и введем таким же образом

функции, аналогичные другим простым тригонометрическим функциям, то получим, что $\lambda_2=c \operatorname{sch} \beta$, а уравнение для системы однополостных гиперболоидов имеет вид

$$\frac{x^2+y^2}{(\operatorname{sch}\beta)^2}-\frac{z^2}{(\operatorname{th}\beta)^2}=c^2. \tag{35}$$

Величина γ сводится к ψ, так что $\lambda_3=c \sec \gamma$ и уравнение для системы эллипсоидов имеет вид

$$\frac{x^2+y^2}{(\sec\gamma)^2}+\frac{z^2}{(\operatorname{tg}\gamma)^2}=c^2. \tag{36}$$

Такого рода эллипсоиды представляют собою тела вращения относительно своих сопряженных осей и называются планетарными эллипсоидами.

Количество электричества на планетарном эллипсоиде, находящемся под потенциалом V в безграничном поле, равно

$$Q=cV/[(\pi/2)-\gamma], \tag{37}$$

где $c \sec\gamma$ — экваториальный радиус, а $c \operatorname{tg}\gamma$ — полярный радиус.

При $\gamma=0$ фигура становится круговым диском радиуса c и

$$\sigma=V/(2\pi^2\sqrt{c^2-r^2}), \tag{38}$$

$$Q=cV/(\pi/2). \tag{39}$$

152. *Второй случай.* Пусть $b=c$, тогда $k=1$, $k'=0$,

$$\alpha=\ln\operatorname{tg}[(\pi+2\theta)/4], \text{ откуда } \lambda_1=c \operatorname{th}\alpha, \tag{40}$$

и уравнение двухполостных гиперболоидов вращения принимает вид

$$\frac{x^2}{(\operatorname{th}\alpha)^2}-\frac{y^2+z^2}{(\operatorname{sch}\alpha)^2}=c^2. \tag{41}$$

Величина β переходит в φ, а каждый однополостный гиперболоид сводится к паре плоскостей, пересекающихся по оси x, уравнение которых

$$\frac{y^2}{(\sin\beta)^2}-\frac{z^2}{(\cos\beta^2)}=0. \tag{42}$$

Это система меридиональных плоскостей, для которых β служит координатой долготы.

Величина γ, определяемая формулой (7) (п. 147), становится в этом случае бесконечной на нижнем пределе. Чтоб избежать этого, определим γ интегралом

$$\int_{\lambda_3}^{\infty}\frac{c\,d\lambda_3}{\lambda_3^2-c^2}.$$

Положив теперь $\lambda_3=c \sec\psi$, получим $\gamma=\int_{\psi}^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sin\psi}$, откуда $\lambda_3=c \operatorname{cth}\gamma$, и уравнение семейства эллипсоидов принимает вид

$$\frac{x^2}{(\operatorname{cth}\gamma)^2}+\frac{y^2+z^2}{(\operatorname{csh}\gamma)^2}=c^2. \tag{43}$$

Эти эллипсоиды вращения, для которых осью вращения является поперечная ось, называются яйцеобразными эллипсоидами.

Количество электричества на яйцеобразном эллипсоиде, находящемся под потенциалом V в безграничном поле, равно в этом случае, согласно (29),

$$cV\Big/\int\limits_{\psi_0}^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sin\psi}, \tag{44}$$

где $c\sec\psi_0$ — полярный радиус.

Если обозначить полярный радиус через A, а экваториальный — через B, последняя формула запишется в виде

$$V\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{\ln\dfrac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{B}}. \tag{45}$$

Если экваториальный радиус много меньше полярного, как в случае провода с закругленными концами, то

$$Q=AV/(\ln 2A-\ln B). \tag{46}$$

Если и b, и c стремятся к нулю, а их отношение остается постоянным, то система поверхностей переходит в две системы конфокальных конусов и систему сферических поверхностей, радиусы которых обратно пропорциональны γ.

Если отношение b к c равно нулю или единице, то система поверхностей превращается в систему меридиональных плоскостей, систему круговых конусов с общей осью и систему концентрических сферических поверхностей, радиусы которых обратно пропорциональны γ. Это обычная система сферических полярных координат.

Цилиндрические поверхности

153. При бесконечно большом значении c поверхности становятся цилиндрическими с образующими, параллельными оси z. Одна система цилиндров является гиперболической, а именно та, в которую вырождаются двухполостные гиперболоиды. Когда c бесконечно велико, $k=0$ и, следовательно, $\theta=\alpha$, так что уравнение этой системы имеет вид

$$\frac{x^2}{\sin^2\alpha}-\frac{y^2}{\cos^2\alpha}=b^2. \tag{47}$$

Другая система цилиндров — эллиптическая, и поскольку $k=0$, то β равно

$$\int\limits_0^{\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2-b^2}},\ \text{т. е.}\ \lambda_2=b\,\mathrm{ch}\,\beta,$$

и уравнение этой системы имеет вид

$$\frac{x^2}{(\mathrm{ch}\,\beta)^2}+\frac{y^2}{(\mathrm{sh}\,\beta)^2}=b^2. \tag{48}$$

Эти две системы поверхностей показаны на рис. X в конце этого тома.

Конфокальные параболоиды

154. Если в общих уравнениях перенести начало координат в точку на оси x, находящуюся на расстоянии t от центра системы, и подставить вместо x, λ, b и c соответственно величины $t+x$, $t+\lambda$, $t+b$ и $t+c$, а затем неограниченно увеличивать t, то мы получим в пределе уравнение системы параболоидов с фокусами в точках $x=b$ и $x=c$, т. е. уравнение

$$4(x-\lambda)+\frac{y^2}{\lambda-b}+\frac{z^2}{\lambda-c}=0. \tag{49}$$

Если обозначить переменный параметр для первой системы эллиптических параболоидов через λ, для системы гиперболических параболоидов — через μ и для второй системы эллиптических параболоидов — через ν, то λ, b, μ, c, ν будут расположены в порядке нарастания величины и имеют место соотношения

$$\begin{aligned} x&=\lambda+\mu+\nu-c-b,\\ y^2&=4\,(b-\lambda)\,(\mu-b)\,(\nu-b)/\,(c-b),\\ z^2&=4\,(c-\lambda)\,(c-\mu)\,\,(\nu-c)/\,(c-b). \end{aligned} \tag{50}$$

Чтобы избежать бесконечных значений в интегралах (7) для параболической системы, соответствующие интегралы берутся в других пределах.

В этом случае полагают

$$\alpha=\int_\lambda^b\frac{d\lambda}{\sqrt{(b-\lambda)\,(c-\lambda)}}\,,\qquad \beta=\int_b^\mu\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu-b)\,(c-\mu)}}\,,\qquad \gamma=\int_c^\nu\frac{d\nu}{\sqrt{(\nu-b)\,(\nu-c)}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \lambda&=\frac{1}{2}\,[(c+b)-(c-b)\operatorname{ch}\alpha],\\ \mu&=\frac{1}{2}\,[(c+b)-(c-b)\cos\beta],\\ \nu&=\frac{1}{2}\,[(c+b)+(c-b)\operatorname{ch}\gamma]; \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}\,(c+b)+\frac{1}{2}\,(c-b)\,(\operatorname{ch}\gamma-\cos\beta-\operatorname{ch}\alpha),\\ y&=2\,(c-b)\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\operatorname{ch}\frac{\gamma}{2},\\ z&=2\,(c-b)\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \tag{52}$$

При $b=c$ мы имеем случай параболоидов вращения вокруг оси x и

$$\begin{aligned} x&=a\,(e^{2\alpha}-e^{2\gamma}),\\ y&=2ae^{\alpha+\gamma}\cos\beta,\\ z&=2ae^{\alpha+\gamma}\sin\beta. \end{aligned} \tag{53}$$

Поверхности, для которых постоянно β, представляют собой плоскости, проходящие через ось, а β — угол, образуемый такой плоскостью с некоторой фиксированной плоскостью, проходящей через ось.

Поверхности, для которых постоянно α, представляют собой конфокальные параболоиды. При $\alpha=-\infty$ параболоид вырождается в прямую, заканчивающуюся в начале координат.

Значения α, β, γ можно выразить через r, θ, φ — сферические Полярные координаты с началом координат в фокусе и осью θ, совпадающей с осью параболоидов:

$$\alpha=\ln\left[r^{1/2}\cos(\theta/2)\right],\qquad \beta=\varphi,\qquad \gamma=\ln\left[r^{1/2}\sin(\theta/2)\right]. \tag{54}$$

Случай, когда потенциал равен α, можно сравнить с пространственной зональной гармоникой r^iQ_i. Оба потенциала удовлетворяют уравнению Лапласа и являются однородными функциями от x, y, z, но в случае параболоида на оси имеется разрыв, так как α изменяется при замене θ на $\theta+2\pi$.

Поверхностная плотность заряда на заряженном параболоиде в безграничном поле (в том числе на полубесконечной прямой) обратно пропорциональна квадратному корню из расстояния от фокуса, или, в случае прямой, расстояния от ее конца.

ГЛАВА XI

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ИНВЕРСИЯ

155. Мы уже показали, что для проводящей сферы, находящейся под действием заданного распределения заряда, можно найти распределение заряда на ее поверхности методом сферических гармоник.

Для этого нужно разложить потенциал воздействующей системы в ряд по пространственным гармоникам положительной степени с центром в начале координат, после чего находится соответствующий ряд пространственных гармоник отрицательной степени, описывающий потенциал, обусловленный распределением электричества на сфере.

С помощью этого весьма мощного метода анализа Пуассон нашел распределение электричества на сфере под влиянием заданной электрической системы и решил даже более сложную задачу нахождения распределения электричества на двух проводящих сферах, влияющих друг на друга. Эти исследования были существенно продолжены Плана и другими, подтвердившими точность расчетов Пуассона.

Применяя этот метод к наиболее простому случаю сферы, находящейся под действием единичного точечного заряда, мы должны разложить потенциал точечного заряда в ряд по пространственным гармоникам и найти второй ряд пространственных гармоник, описывающий потенциал вне сферы, создаваемый электризацией сферы.

По-видимому, никто из этих математиков не обнаружил, что этот второй ряд дает выражение для потенциала, создаваемого некоторым воображаемым точечным зарядом, который не существует физически как точечный заряд, но может быть назван электрическим изображением, потому что во внешних точках дейст-

вие поверхности совпадает с действием, которое производил бы воображаемый точечный заряд, если бы эта поверхность была удалена.

Это открытие как бы приберегалось для сэра У. Томсона, развившего его в мощный метод решения электрических задач, допускающих в то же время представление в элементарной геометрической форме.

Его первоначальные исследования, содержащиеся в *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1848, изложены в духе обычной теории действия на расстоянии и совершенно не используют метода потенциалов и общих теорем главы IV, хотя сами результаты, вероятно, были открыты этими методами. Но я, вместо того чтобы следовать методу автора, буду свободно пользоваться идеей потенциала и эквипотенциальных поверхностей всюду, где это способствует ясности изложения.

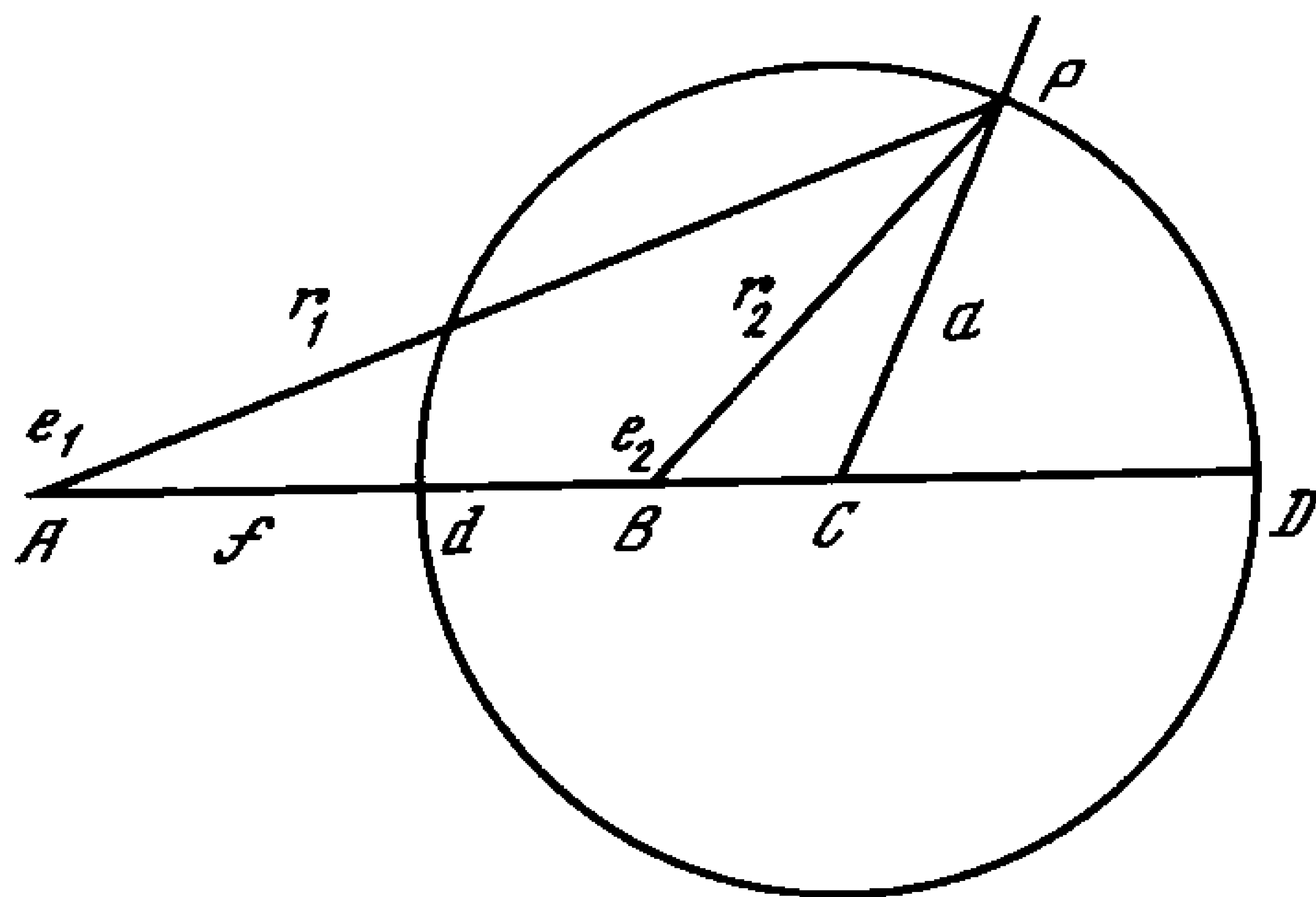


Рис. 7

Теория электрических изображений

156. Пусть A и B на рис. 7 изображают две точки в однородной бесконечной диэлектрической среде. Пусть заряды в точках A и B равны соответственно e_1 и e_2. Пусть далее P — произвольная точка пространства, расстояния которой до A и B равны соответственно r_1 и r_2. Тогда потенциал в точке P равен

$$V=\frac{e_1}{r_1}+\frac{e_2}{r_2}. \tag{1}$$

Эквипотенциальные поверхности для такого распределения зарядов показаны на рис. I (в конце этого тома) для e_1 и e_2 одного знака и на рис. II для зарядов противоположного знака. Рассмотрим теперь ту поверхность, на которой $V=0$ и которая является единственной сферической поверхностью в системе. Если e_1 и e_2 одного знака, то эта поверхность находится вся в бесконечности, если же знаки зарядов противоположны, то существует плоскость или сферическая поверхность на конечном расстоянии, на которой потенциал равен нулю.

Уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{e_1}{r_1}+\frac{e_2}{r_2}=0. \tag{2}$$

Центр ее находится в точке C на продолжении отрезка AB, для которого $AC : BC=e_1^2 : e_2^2$, а радиус сферы равен $AB\frac{e_1e_2}{e_1^2-e_2^2}$.

Точки A и B являются инверсными по отношению к этой сфере, т. е. они лежат на одном и том же радиусе, и радиус сферы является средним геометрическим между их расстояниями от ее центра.

Поскольку сферическая поверхность находится под нулевым потенциалом, то если предположить, что она представляет собой тонкую металлическую оболочку, соединенную с землей, не произойдет никакого изменения потенциала ни в одной

точке ни вне, ни внутри сферы, т. е. всюду электрическое действие останется таким же, как от двух точечных зарядов A и B.

Если теперь, сохраняя заземление металлической оболочки, убрать заряд B, то потенциал внутри сферы станет всюду равным нулю, а вне сферы останется неизменным, так как поверхность сферы остается по-прежнему при том же потенциале и не происходит никакого изменения в распределении электричества вне сферы.

Таким образом, при помещении электрического заряда A вне сферического проводника, находящегося под нулевым потенциалом, электрическое действие во всех точках вне сферы точно такое же, как от совместного действия заряда A и другого заряда B внутри сферы, который можно назвать электрическим изображением заряда A.

Таким же способом можно показать, что если B — точечный заряд внутри сферической оболочки, то его действие внутри сферы точно такое, как действие двух зарядов — заряда B и его изображения A.

157. *Определение электрического изображения.* Электрическим изображением называется точечный заряд или система зарядов, расположенные по одну сторону поверхности, которые на другой стороне этой поверхности вызвали бы такое же электрическое действие, какое в действительности вызывает истинное распределение заряда по поверхности.

В оптике точка или система точек по одну сторону от зеркала или линзы, которые испускали бы такую систему лучей, какая существует в действительности по другую сторону линзы, называется *мнимым* (virtual) изображением.

Электрические изображения соответствуют мнимым изображениям в оптике в том смысле, что они находятся в пространстве по другую сторону поверхности. Но они не соответствуют им ни по своему действительному положению, ни в том отношении, что оптические фокусы имеют лишь приближенный характер.

Не существует *действительных* электрических изображений, т. е. таких воображаемых точечных зарядов, которые создали бы с той же стороны от заряженной поверхности действие, эквивалентное действию заряженной поверхности.

Действительно, если потенциал в какой-либо области пространства равен потенциалу, вызываемому определенным распределением заряда в той же области, то он и должен в действительности создаваться этим распределением заряда, так как заряд в любой точке может быть найден по потенциалу вблизи этой точки с помощью уравнения Пуассона.

Пусть a — радиус сферы, f — расстояние точечного заряда A от центра сферы C, e — заряд в точке A.

Тогда изображением является точка B, расположенная на том же радиусе сферы на расстоянии a^2/f от центра, и заряд изображения равен $-ea/f$ [см. рис. 7].

Мы показали, что это изображение вызовет по другую сторону поверхности такой же эффект, что и истинная электризация поверхности. Определим теперь поверхностную плотность этой электризации в произвольной точке P сферической поверхности. Для этого мы используем теорему Кулона, п. 80, о том, что если R — результирующая сила у поверхности проводника, а σ — поверхностная плотность, то $R=4\pi\sigma$, где R отсчитывается наружу.

Силу R можно рассматривать как результирующую двух сил: отталкивания e/AP^2, действующего вдоль AP, и притяжения $e\,(a/f)\,(1/PB^2)$, действующего вдоль PB.

Разлагая эти силы по направлениям AC и CP, получим, что отталкивание имеет составляющие (ef/AP^3) по AC и (ea/AP^3) по CP, а притяжение $-(ea/f)(1/BP^3)\cdot BC$ по AC и $-e\,(a^2/f)\,(1/BP^3)$ по CP.

Но $BP=(a/f)\cdot AP$, а $BC=(a^2/f)$, так что составляющие притяжения можно записать в виде $-ef\,(1/AP^3)$ по AC и $-e\,(f^2/a)\,(1/AP^3)$ по CP.

Составляющие притяжения и отталкивания по AC равны и противоположны по знаку, так что результирующая сила направлена полностью по радиусу CP. Это лишь подтверждает уже доказанное нами утверждение, что сфера является эквипотенциальной поверхностью, т. е. поверхностью к которой сила всегда перпендикулярна.

Составляющая результирующей силы вдоль CP, т. е. нормали к поверхности в ту сторону, где расположен заряд A, равна

$$R=-e\frac{f^2-a^2}{a}\cdot\frac{1}{AP^3}. \tag{3}$$

Если считать A расположенным внутри сферы, то f меньше a, и силу R следует отсчитывать внутрь. В этом случае

$$R=-e\frac{a^2-f^2}{a}\cdot\frac{1}{AP^3}. \tag{4}$$

Во всех случаях можно написать

$$R=-e\frac{AD\cdot Ad}{CP}\cdot\frac{1}{AP^3}, \tag{5}$$

где AD и Ad — отрезки любой прямой, проходящей через точку A и пересекающей сферу, а их произведение считается положительным во всех случаях.

158. Отсюда следует, что, согласно теореме Кулона из п. 80, поверхностная плотность в точке P равна

$$\sigma=-e\frac{AD\cdot Ad}{4\pi\cdot CP}\cdot\frac{1}{AP^3}. \tag{6}$$

Плотность электричества в произвольной точке сферы меняется обратно пропорционально кубу расстояния от точки A.

Это поверхностное распределение электричества вместе с точечным зарядом A создает по ту же сторону поверхности, где находится точка A, потенциал, эквивалентный потенциалу заряда e в точке A и его изображения $-ea/f$ в точке B, а по другую сторону поверхности потенциал всюду равен нулю. Поэтому само поверхностное распределение заряда создает со стороны заряда A потенциал, эквивалентный потенциалу изображения $-ea/f$ в точке B, а с противоположной стороны — потенциал, равный, но противоположный по знаку потенциалу заряда e, находящегося в точке A.

Полный заряд на поверхности сферы равен, очевидно, $-ea/f$, так как он эквивалентен изображению в точке B.

Таким образом, мы получили следующие теоремы о действии распределения электричества по сферической поверхности с поверхностной плотностью, обратно пропорциональной кубу расстояния от точки A, находящейся вне или внутри сферы.

Пусть плотность задается уравнением

$$\sigma = C/AP^3, \tag{7}$$

где C — некоторая постоянная, тогда, согласно (6),

$$C = -e\,(AD \cdot Ad)/(4\pi a). \tag{8}$$

Такое поверхностное распределение действует на каждую точку, отделенную от A поверхностью, как точечный заряд $-e$, т. е. $4\pi aC/\,(AD \cdot Ad)$, помещенный в точку A.

На каждую точку, находящуюся по ту же сторону от поверхности, что и точка A, действие эквивалентно действию заряда $(4\pi Ca^2)/\,(f \cdot AD \cdot Ad)$, помещенного в точку B, являющуюся изображением точки A.

Полное количество электричества на сфере равно первой величине, если точка A находится внутри сферы, и второй, если точка A вне сферы.

Эти утверждения были установлены сэром У. Томсоном в его оригинальных геометрических исследованиях, касающихся распределения электричества на сферических проводниках, к которым мы и отсылаем читателя.

159. Если систему с известным распределением электричества поместить вблизи проводящей сферы радиуса a, потенциал которой с помощью заземления поддерживается равным нулю, то будет иметь место суперпозиция электризаций, обусловленная различными частями системы.

Пусть A_1, A_2 и т. д.— точки системы, несущие заряд, f_1, f_2 и т. д.— их расстояния от центра сферы, e_1, e_2 и т. д.— заряды в этих точках, тогда изображения этих точек B_1, B_2 и т. д. будут расположены на тех же радиусах, что и сами точки, на расстояниях a^2/f_1, a^2/f_2 и т. д. от центра сферы и заряды их будут равны $-e_1\,(a/f_1)$, $-e_2\,(a/f_2)$ и т. д.

Потенциал вне сферы, создаваемый поверхностной электризацией, будет совпадать с потенциалом, который создала бы система изображений B_1, B_2 и т. д. Поэтому эта система называется электрическим изображением системы A_1, A_2 и т. д.

Если сфера находится не под нулевым потенциалом, а под потенциалом V, то следует добавить равномерное распределение электричества на ее внешней поверхности с поверхностной плотностью $\sigma = V/(4\pi a)$.

Влияние такого распределения во всех точках вне сферы будет такое же, как у точечного заряда Va, помещенного в центре сферы, а во всех точках внутри сферы потенциал просто увеличится на V.

Полный заряд сферы под действием внешней системы точечных зарядов A_1, A_2 и т. д. равен

$$E = Va - e_1\frac{a}{f_1} - e_2\frac{a}{f_2} - \ldots, \tag{9}$$

откуда можно найти заряд E по потенциалу V или наоборот.

Если система зарядов находится внутри сферической поверхности, то заряд, наводимый на поверхности, равен и противоположен по знаку наводящему заряду, как было нами раньше доказано для любой замкнутой поверхности.

160. Энергия, обусловленная взаимодействием точечного заряда e, находящегося на расстоянии f от центра сферы, большем радиуса сферы a, с распределением заряда по сферической поверхности, созданным под влиянием точечного за-

ряда, и с зарядом сферы равна

$$M = \frac{Ee}{f} - \frac{1}{2}\frac{e^2a^3}{f^2(f^2-a^2)}, \tag{10}$$

V — потенциал, E — заряд сферы.

Сила отталкивания точечного заряда от сферы равна, согласно п. 92,

$$F = ea\left(\frac{V}{f^2} - \frac{ef}{(f^2-a^2)^2}\right) = \frac{e}{f^2}\left(E - e\frac{a^3(2f^2-a^2)}{f(f^2-a^2)^2}\right). \tag{11}$$

Следовательно, сила взаимодействия точечного заряда со сферой является всегда притягивающей в следующих случаях: 1) когда сфера не изолирована, 2) когда сфера не заряжена, 3) когда точечный заряд расположен очень близко к поверхности сферы.

Для того чтобы имело место отталкивание, потенциал сферы должен быть положителен и больше $ef^3/(f^2-a^2)^2$; заряд сферы должен быть того же знака, что и e, и больше, чем

$$e\frac{a^3(2f^2-a^2)}{f(f^2-a^2)^2}.$$

Равновесная точка является неустойчивой: при сближении тел появляется притяжение, при удалении — отталкивание.

Если точечный заряд находится внутри сферы, действующая на него сила всегда направлена от центра сферы и равна $e^2af/(a^2-f^2)^2$.

Для точечного заряда, расположенного вне сферы, поверхностная плотность заряда в точке сферы, ближайшей к точечному заряду, равна

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{Va - e\frac{a(f+a)}{(f-a)^2}\right\} = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{E - e\frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2}\right\}, \tag{12}$$

а в самой удаленной точке

$$\sigma_2 = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{Va - e\frac{a(f-a)}{(f+a)^2}\right\} = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{E + e\frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2}\right\}. \tag{13}$$

Если величина заряда E сферы заключена в пределах

$$e\frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2} \text{ и } -e\frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2},$$

то электризация сферы отрицательна вблизи точечного заряда и положительна с противоположной стороны. Существует некоторая окружность, разделяющая области с положительной и отрицательной электризацией. Эта окружность является линией равновесия.

При

$$E = ea\left(\frac{1}{\sqrt{f^2-a^2}} - \frac{1}{f}\right) \tag{14}$$

эквипотенциальная поверхность, пересекающая сферу по линии равновесия, является сферой с центром в месте нахождения точечного заряда и радиусом $\sqrt{f^2-a^2}$.

Силовые линии и эквипотенциальные поверхности для этого случая показаны на рис. IV в конце этого тома.

Изображения в бесконечной проводящей плоскости

161. Если два точечных заряда A и B, рассматривавшихся в п. 156, равны по величине и противоположны по знаку, то поверхность нулевого потенциала является плоскостью, каждая точка которой находится на равном расстоянии от точек A и B [рис. 8].

Следовательно, если в точке A находится точечный заряд e, а AD — перпендикуляр к плоскости, то, продолжив AD до точки B так, что $DB=AD$, и поместив в точку B заряд $-e$, мы получим изображение точки A, вызывающее во всех точках, расположенных по ту же сторону от плоскости, что и точка A, точно такое же действие, что и действительная электризация плоскости. В самом деле, потенциал обусловленный точками A и B, удовлетворяет на стороне, где находится точка A, условию $\nabla^2 V=0$ во всех точках, кроме точки A, и равен нулю на плоскости, а существует лишь одна функция V, удовлетворяющая этим условиям.

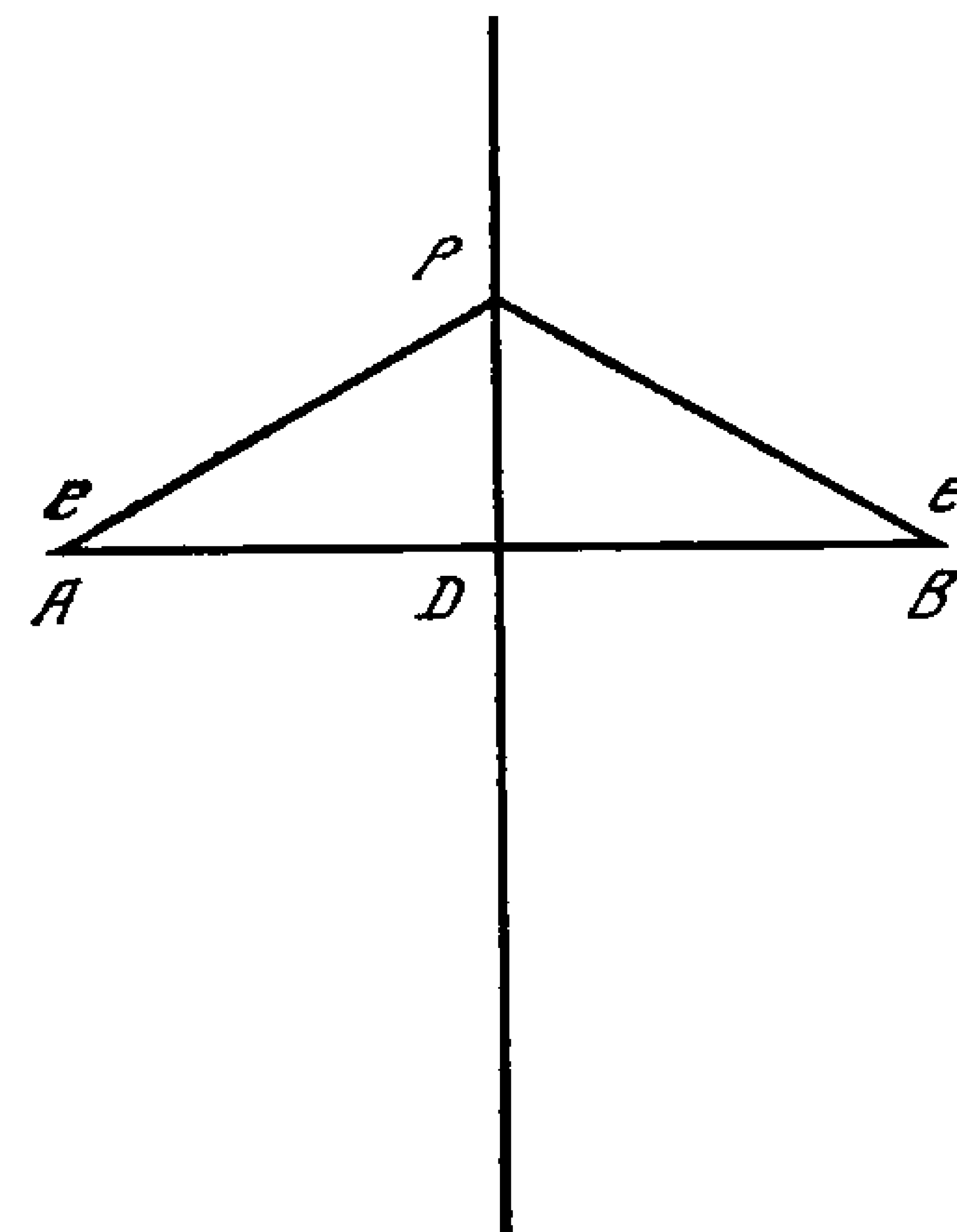


Рис. 8

Чтобы найти результирующую силу в точке P плоскости, заметим, что она складывается из двух слагаемых, равных e/AP^2, причем одно действует вдоль AP, а второе — вдоль PB.

Таким образом, результирующая сила направлена параллельно AB и равна

$$(e/AP^2)\cdot(AB/AP).$$

Итак, сила, отсчитываемая наружу от поверхности в сторону точки A, равна

$$R=-(2e\cdot AD)/AP^3, \tag{15}$$

а плотность заряда в точке P равна

$$\sigma=-(e\cdot AD)/(2\pi\cdot AP^3). \tag{16}$$

Об электрической инверсии

162. Метод электрических изображений непосредственно приводит к методу преобразования, позволяющему для любой электрической задачи, решение которой мы знаем, построить сколько угодно других задач и их решений.

Мы видели, что изображение точки, находящейся на расстоянии r от центра сферы радиуса R, находится на том же самом радиусе на расстоянии r', таком, что $rr'=R^2$. Таким образом, изображение системы точек, линий, поверхностей получается из исходной системы чисто геометрическим методом, известным под названием метода инверсии и описанного Шалем, (Chasles), Сальмоном (Salmon) и другими математиками.

Если A и B — две точки, A' и B' — их изображения [рис. 9], O — центр инверсии, а R — радиус сферы инверсии, то

$$OA\cdot OA'=R^2=OB\cdot OB'.$$

Следовательно, треугольники OAB и $OB'A'$ подобны и $AB : A'B' = OA : OB' = OA \cdot OB/R^2$.

Если количество электричества e поместить в точку A, то его потенциал в точке B будет $V = e/AB$.

Если в точку A' поместить количество электричества e', то его потенциал в точке B' будет $V' = e'/A'B'$.

В теории электрических изображений $e : e' = OA : R = R : OA'$, так что

$$V : V' = R : OB, \tag{17}$$

т. е. потенциал в точке B, создаваемый зарядом в точке A, относится к потенциалу в изображении точки B от электрического изображения точки A, как R к OB.

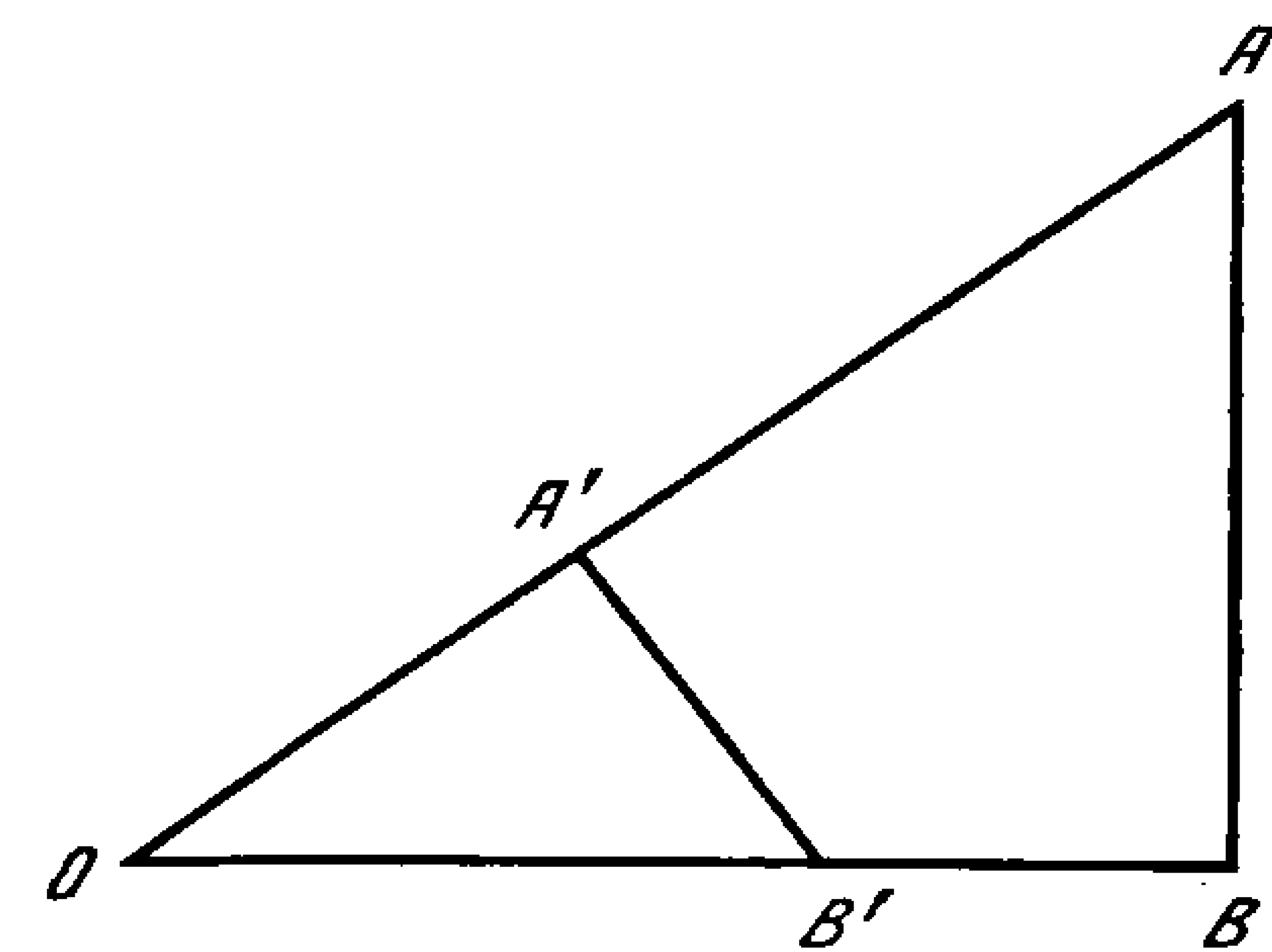


Рис. 9

Поскольку это отношение зависит лишь от OB и не зависит от OA, потенциал в точке B от произвольной системы заряженных тел относится к потенциалу в точке B' от изображения этой системы, как R к OB.

Пусть r — расстояние произвольной точки A от центра, r' — расстояние его изображения A' от центра, e — электризация точки A, e' — электризация точки A'; L, S, K — элементы длины, поверхности и объема у точки A; L', S', K' — их изображения у точки A'; λ, σ, ρ, λ', σ', ρ' — соответствующие линейные, поверхностные и объемные плотности электризации в этих двух точках, V — потенциал в точке A, создаваемый исходной системой, а V' — потенциал в точке A', создаваемый инверсной системой.

Тогда

$$\frac{r'}{r} = \frac{L'}{L} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{r'^2}{R^2}, \qquad \frac{S'}{S} = \frac{R^4}{r^4} = \frac{r'^4}{R^4}, \qquad \frac{K'}{K} = \frac{R^6}{r^6} = \frac{r'^6}{R^6},$$
$$\frac{e'}{e} = \frac{R}{r} = \frac{r'}{R}, \qquad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{r}{R} = \frac{R}{r'}, \qquad \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{R^3}{r'^3}, \qquad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{r^5}{R^5} = \frac{R^5}{r'^5}, \tag{18}$$
$$\frac{V'}{V} = \frac{r}{R} = \frac{R}{r'}.$$

[1]

Если в исходной системе некоторая поверхность была поверхностью проводника, так что потенциал на ней был постоянен и равен P, то в преобразованной системе на изображении поверхности будет потенциал PR/r'. Но если поместить в центре инверсии O количество электричества $-PR$, то потенциал преобразованной поверхности станет равным нулю.

Следовательно, если известно распределение электричества на изолированном проводнике в свободном пространстве, заряженном до потенциала P, то можно с помощью инверсии найти распределение на заземленном проводнике, являющемся изображением исходного проводника, устанавливающееся под влиянием точечного заряда $-PR$, помещенного в центр инверсии.

[1] См. «*Natural Philosophy*» Томсона и Тэта, § 515.

163. При исследовании различных случаев инверсии полезны следующие геометрические теоремы.

Каждая сфера переходит при инверсии в сферу, если только она не проходит через центр инверсии. В последнем случае она переходит в плоскость.

Если расстояния центров этих двух сфер от центра инверсии обозначить через a и a', их радиусы — через α и α' и определить *показатель* (power) сферы по отношению к центру инверсии как произведение отрезков, отсекаемых сферой на линии, проходящей через центр инверсии, то для первой сферы показатель равен $a^2-\alpha^2$, а для второй — $a'^2-\alpha'^2$. При этом

$$\frac{a'}{a}=\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{R^2}{a^2-\alpha^2}=\frac{a'^2-\alpha'^2}{R^2}, \tag{19}$$

т. е. отношение расстояний центров первой и второй сферы от центра инверсии равно отношению их радиусов, отношению показателя сферы инверсии к показателю первой сферы и отношению показателя второй сферы к показателю сферы инверсии.

Изображение центра инверсии по отношению к одной из сфер является точкой инверсии центра другой сферы.

В случае, когда инверсными поверхностями являются плоскость и сфера, перпендикуляр из центра инверсии на плоскость относится к радиусу инверсии как этот радиус относится к диаметру сферы, центр сферы расположен на этом перпендикуляре, а сама сфера проходит через центр инверсии.

Любая окружность инвертируется в окружность, если только она не проходит через центр инверсии. В этом случае она инвертируется в прямую.

Углы между двумя пересекающимися поверхностями или линиями не меняются при инверсии.

Любая окружность, проходящая через некоторую точку и через ее изображение в сфере, пересекает эту сферу под прямыми углами.

Следовательно, любая окружность, проходящая через некоторую точку и пересекающая сферу инверсии под прямыми углами, проходит и через изображение этой точки.

164. Метод инверсии можно применить для определения распределения электричества на заземленной сфере под действием точечного заряда, исходя из однородного распределения на изолированной сфере в отсутствие других тел.

Если точечный заряд находится в точке A, то примем ее за центр инверсии, тогда для сферы радиуса a, центр которой находится на расстоянии f от точки A, инвертированной фигурой будет сфера радиуса a' с центром на расстоянии f', где

$$\frac{a'}{a}=\frac{f'}{f}=\frac{R^2}{f^2-a^2}. \tag{20}$$

Центр каждой из этих сфер совпадает с инверсной точкой для A относительно другой сферы, т. е. если C — центр, а B — инверсная точка первой сферы, то C' — инверсная точка, а B' — центр второй сферы.

Пусть теперь e' — количество электричества, сообщенное второй сфере, на которую не действуют внешние силы. Оно распределится равномерно по сфере с поверхностной плотностью

$$\sigma'=e'/(4\pi a'^2). \tag{21}$$

Действие его в любой точке вне сферы точно такое же, как действие заряда e', помещенного в центре сферы B'.

На самой сферической поверхности и внутри нее потенциал равен постоянной величине

$$P'=e'/a'. \tag{22}$$

Произведем тепер і инверсию этой системы. Центр B' переходит в инвертированной системе в инверсную точку B, заряд e' в точке B' переходит в $e'R/f'$ в точке B и во всех точках, отделенных от точки B сферической поверхностью, потенциал равен потенциалу от заряда в точке B.

Потенциал в любой точке P, находящейся на сферической поверхности или по ту же сторону от нее, что и точка B, равен в инвертированной системе $(e'/a')\times\times(R/AP)$.

Если теперь добавить к этой системе заряд e в точке A, равный

$$e=-(e'/a')R, \tag{23}$$

то потенциал на сферической поверхности и во всех точках, расположенных по ту же сторону от нее, что и точка B, станет равным нулю. Во всех точках, расположенных с той стороны, где находится точка A, потенциал будет равен потенциалу от заряда e в точке A и заряда $e'R/f'$ в точке B.

Но

$$e'(R/f')=-e(a'/f)=-e(a/f), \tag{24}$$

как мы видели раньше для заряда изображения в точке B.

Для нахождения плотности в каждой точке первой поверхности имеем

$$\sigma=\sigma' R^3/AP^3. \tag{25}$$

Подставляя выражение σ' через характеристики первой сферы, получим то же значение, что и в п. 158:

$$\sigma=-e(f^2-a^2)/(4\pi a\cdot AP^2). \tag{26}$$

О конечных системах последовательных изображений

165. Если две проводящие плоскости пересекаются под углом, являющимся целым делителем двух прямых углов, то получается конечная система изображений, полностью определяющая электризацию.

Действительно, пусть AOB — сечение двух проводящих плоскостей, перпендикулярное линии их пересечения, пусть угол пересечения $AOB=\pi/n$, а P — точечный заряд. Тогда, построив окружность с центром в точке O радиусом OP и найдя точки, являющиеся последовательными изображениями точки P в обеих плоскостях, начиная с изображения в OB, мы найдем изображение Q_1 точки P в OB, изображение P_2 точки Q_1 в OA, изображение Q_3 точки P_2 в OB, изображение P_3 точки Q_3 в OA, изображение Q_2 точки P_3 в OB и так далее. Если бы мы начали с изображения P в AO, то получили бы те же точки в обратной последовательности — Q_2, P_3, Q_3, P_2, Q_1, если только AOB является целым делителем двух прямых углов [рис. 10].

Заданный точечный заряд и получающиеся через раз изображения P_2, P_3 расположены по окружности на угловом расстонии $2AOB$ друг от друга, промежуточные изображения Q_1, Q_2, Q_3 находятся на таких же расстояниях друг от друга. Таким образом, если $2AOB$ является целым делителем 2π, то получится конечная система изображений, причем ни одно из них не попадет внутрь угла AOB. Если же AOB не является целым делителем π, то истинное распределение электричества не может быть представлено конечным набором точечных зарядов.

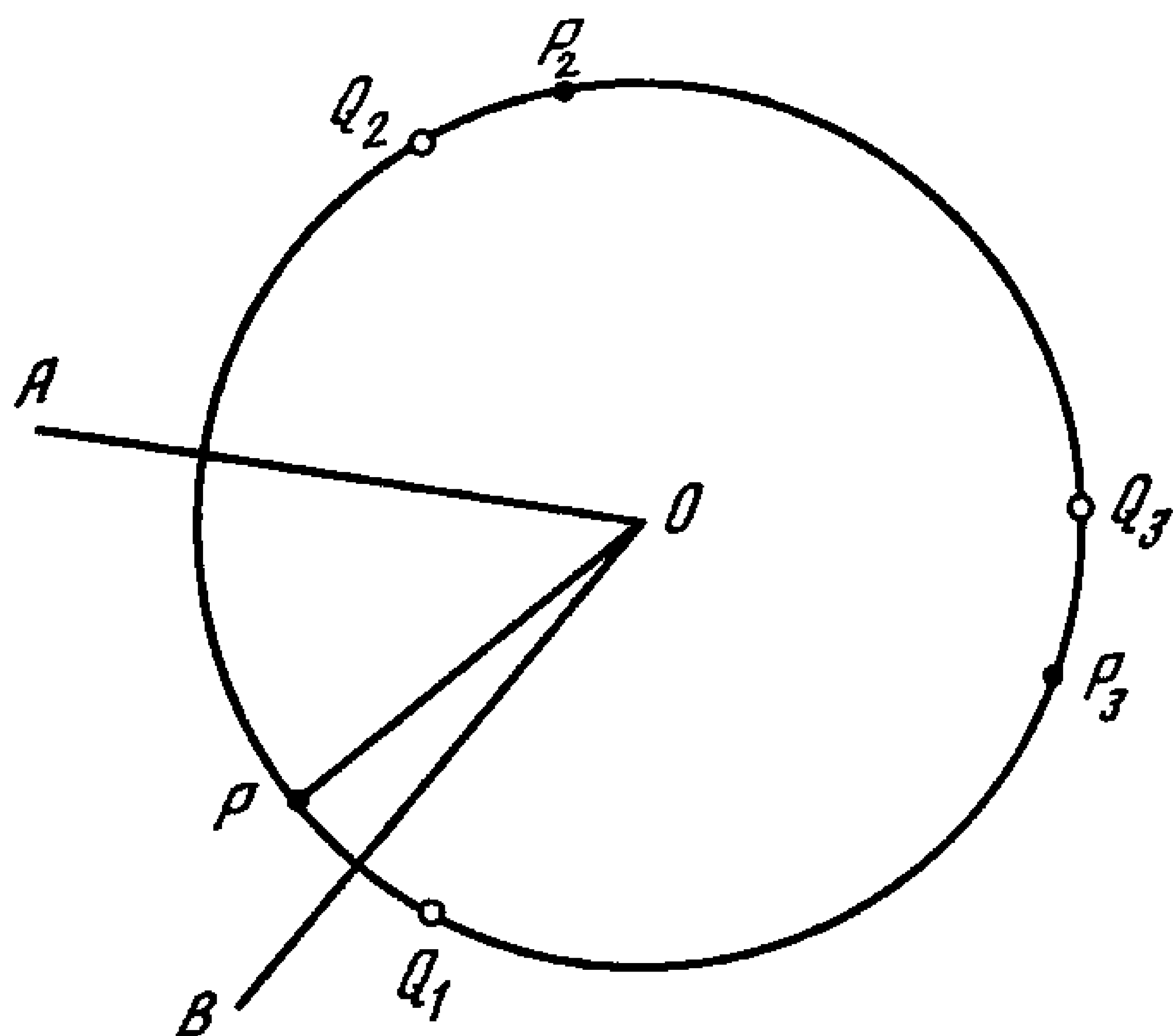


Рис. 10

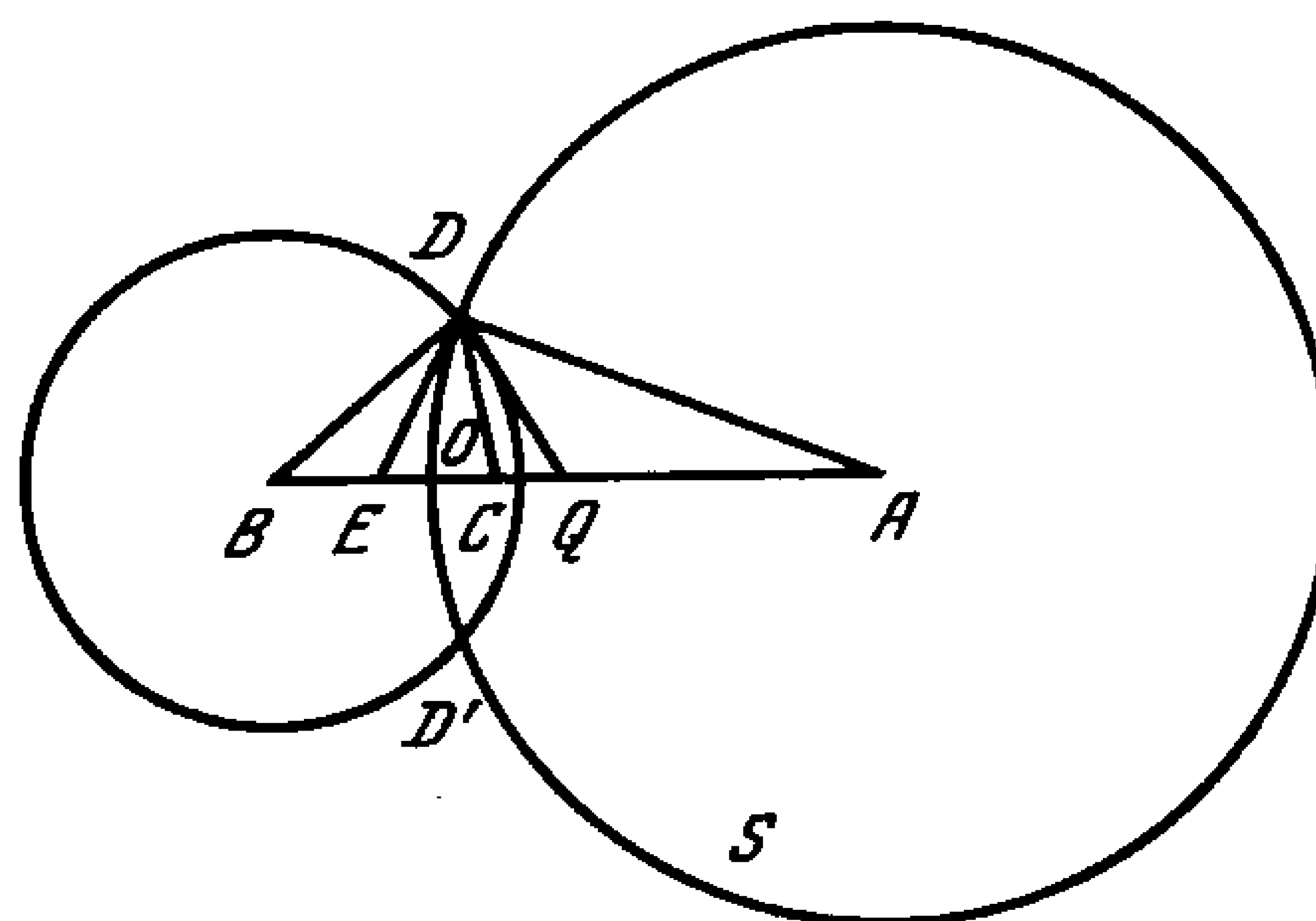


Рис. 11

Если $AOB = \pi/n$, то будет n отрицательных изображений Q_1, Q_2 и т. д., равных по величине и противоположных по знаку заряду P, и $n-1$ положительных изображений P_2, P_3 и т. д., равных P по величине и по знаку.

Угол между последовательными изображениями одинакового знака равен $2\pi/n$. Если каждую из проводящих плоскостей рассмотреть как плоскость симметрии, то видно, что точечный заряд и его положительные и отрицательные изображения расположены симметрично относительно этой плоскости, причем каждому положительному изображению соответствует отрицательное изображение, расположенное на той же нормали и на таком же расстоянии по другую сторону от плоскости.

Если теперь инвертировать систему относительно произвольной точки, то обе плоскости перейдут в две сферы или же в сферу и плоскость, пересекающиеся под углом π/n, причем точка **P**, инверсная к точке P, расположена внутри этого угла.

Последовательные изображения расположены на окружности, проходящей через точку **P** и пересекающей обе сферы под прямыми углами.

Чтобы найти положение этих изображений, можно использовать тот факт, что точка и ее изображение в сфере расположены на одном и том же радиусе сферы, и построить последовательно хорды окружности, на которой лежат изображения, начиная с точки **P** и проводя их попеременно через центры обеих сфер.

Для определения заряда, который следует приписать каждому изображению, выберем произвольную точку на окружности пересечения, тогда заряд каждого изображения будет пропорционален его расстоянию до этой точки, а знак будет

положительным или отрицательным в зависимости от того, принадлежит ли точка изображения к первой последовательности или ко второй.

166. Итак, мы нашли расположение изображений для любого объема, ограниченного проводником, состоящим из двух сферических поверхностей, встречающихся под углом π/n, поддерживаемого под нулевым потенциалом и находящегося под действием точечного заряда.

Методом инверсии мы можем рассмотреть случай расположенного в свободном пространстве проводника, состоящего из двух сферических сегментов, пересекающихся под входящим углом π/n, и находящегося под единичным потенциалом.

Для этого произведем инверсию системы плоскостей по отношению к точке P и изменим знаки зарядов. Окружность, на которой раньше располагались заряды, переходит в прямую, проходящую через центры сфер.

Пусть рис. 11 представляет собой сечение, проходящее через линию центров AB, а D и D' — точки пересечения общей окружности обеих сфер с плоскостью чертежа. Тогда для нахождения последовательных изображений построим радиус DA первой сферы и прямые DC, DE и т. д., образующие углы π/n, $2\pi/n$ и т. д. с DA. В точках A, C, E и т. д., в которых эти прямые пересекают линию центров, расположены положительные изображения, а заряд в каждой точке дается ее расстоянием от точки D. Последнее из этих изображений находится в центре второй окружности.

Для нахождения отрицательных изображений проведем прямые DQ, DR и т. д., образующие углы π/n, $2\pi/n$ и т. д. с линией центров. Пересечения этих прямых с линией центров дают положения отрицательных изображений, а величина заряда в них дается их расстоянием до точки D, так как, если E и Q — инверсные точки для сферы A, то углы ADE, AQD равны между собой.

Поверхностная плотность в произвольной точке любой из сфер равна сумме поверхностных плотностей, обусловленных системой изображений. Так, например, поверхностная плотность в произвольной точке S сферы с центром в A равна

$$\sigma=\frac{1}{4\pi\cdot DA}\left\{1+(AD^2-AB^2)\frac{DB}{BS^3}+(AD^2-AC^2)\frac{DC}{CS^3}+\ldots\right\},$$

где A, B, C и т. д.— последовательность положительных изображений.

Если точка S расположена на окружности пересечения, то плотность в ней равна нулю.

Для нахождения полного заряда одного из сферических сегментов нужно найти поверхностный интеграл по этому сегменту от величины индукции, создаваемой каждым изображением.

Полный заряд на сегменте с центром в точке A, обусловленный изображением в точке A с зарядом DA, равен

$$DA\,\frac{DA+OA}{2\,(DA)}=\frac{1}{2}\,(DA+OA),$$

где O — центр окружности пересечения.

Аналогично заряд на этом же сегменте, обусловленный изображением B, равен $(DB+OB)/2$ и т. д., причем отрезки OB и т. п., отсчитываемые влево от O, считаются отрицательными.

Таким образом, полный заряд на сегменте с центром в точке A равен $(DA+DB+DC+\ldots)/2+$ $(OA+OB+OC+\ldots)/2-$ $(DP+DQ+\ldots)/2-$ $(OP+OQ+$ $+\ldots)/2$.

167. Метод электрических изображений может быть применен к любому объему, ограниченному плоскими или сферическими поверхностями, если все эти поверхности пересекаются под углами, являющимися целыми делителями двух прямых углов.

Для того чтобы существовала такая система сферических поверхностей, каждый пространственный угол должен быть трехгранным, причем два образующих его угла должны быть прямыми, а третий — либо прямой, либо целый делитель двух прямых углов.

Таким образом, имеются следующие случаи конечного числа изображений: 1) одиночная сферическая поверхность или плоскость; 2) две плоскости, сфера и плоскость или две сферы, пересекающиеся под углом π/n; 3) две таких поверхности вместе с третьей поверхностью, плоской или сферической, пересекающей первые две под прямым углом; 4) три таких поверхности вместе с четвертой поверхностью, плоской или сферической, пересекающей первые две поверхности ортогонально, а третью — под углом π/n; из этих четырех поверхностей по крайней мере одна должна быть сферической.

Первый и второй случай мы уже рассмотрели. В первом случае имеется единственное изображение. Во втором — $(2n-1)$-изображений расположены двумя последовательностями на окружности, проходящей через действующий заряд и ортогональной обеим поверхностям. В третьем случае мы имеем наряду с этими изображениями и действующим зарядом еще их изображения в третьей поверхности, т. е. всего $(4n-1)$-изображений, не считая действующего заряда.

В четвертом случае проведем сначала через действующий заряд окружность, ортогональную первым двум поверхностям, и найдем на ней положения и величины n отрицательных изображений и $(n-1)$ положительных изображений. Затем через каждую из этих $2n$ точек, включая и точку нахождения действующего заряда, проведем окружность, ортогональную третьей и четвертой поверхностям, и найдем на ней две последовательности изображений по n' изображений в каждой. Таким образом, мы получим, не считая действующего заряда, $(2nn'-1)$ положительных и $2nn'$ отрицательных изображений. Эти $4nn'$ точек являются точками пересечения окружностей, принадлежащих двум системам линий кривизны циклиды.

Если в каждой из упомянутых точек поместить заряд надлежащей величины, то поверхность нулевого потенциала будет состоять из $n+n'$ сфер, принадлежащих к двум семействам, причем последовательные сферы одного семейства пересекаются под углом π/n, сферы другого семейства пересекаются под углом π/n и любая сфера первого семейства ортогональна любой сфере второго семейства.

Случай двух взаимно ортогональных сфер
(см. рис. IV в конце этого тома)

168. Пусть A и B — центры двух сфер, пересекающих друг друга под прямым углом по окружности, проходящей через точки D и D' (см. рис. 12), и пусть прямая DD' пересекает линию центров в точке C. Тогда точка C является изображением A в сфере B, а также изображением B в сфере A. Если $AD=\alpha$, а $BD=\beta$,

то $AB=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, и если в точки A, B, C поместить соответственно количества электричества α, β и $-\alpha\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, то обе сферы будут эквипотенциальными поверхностями с единичным потенциалом.

С помощью такой системы мы можем, следовательно, определить распределение электричества для следующих случаев:

1) На проводнике $PDQD'$, образуемом большими сегментами обеих сфер. Потенциал проводника равен единице, а заряд равен

$$\alpha+\beta-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=AD+BD-CD.$$

Это же выражение является, следовательно, и мерой емкости такого проводника, когда он свободен от индуктивного действия других тел.

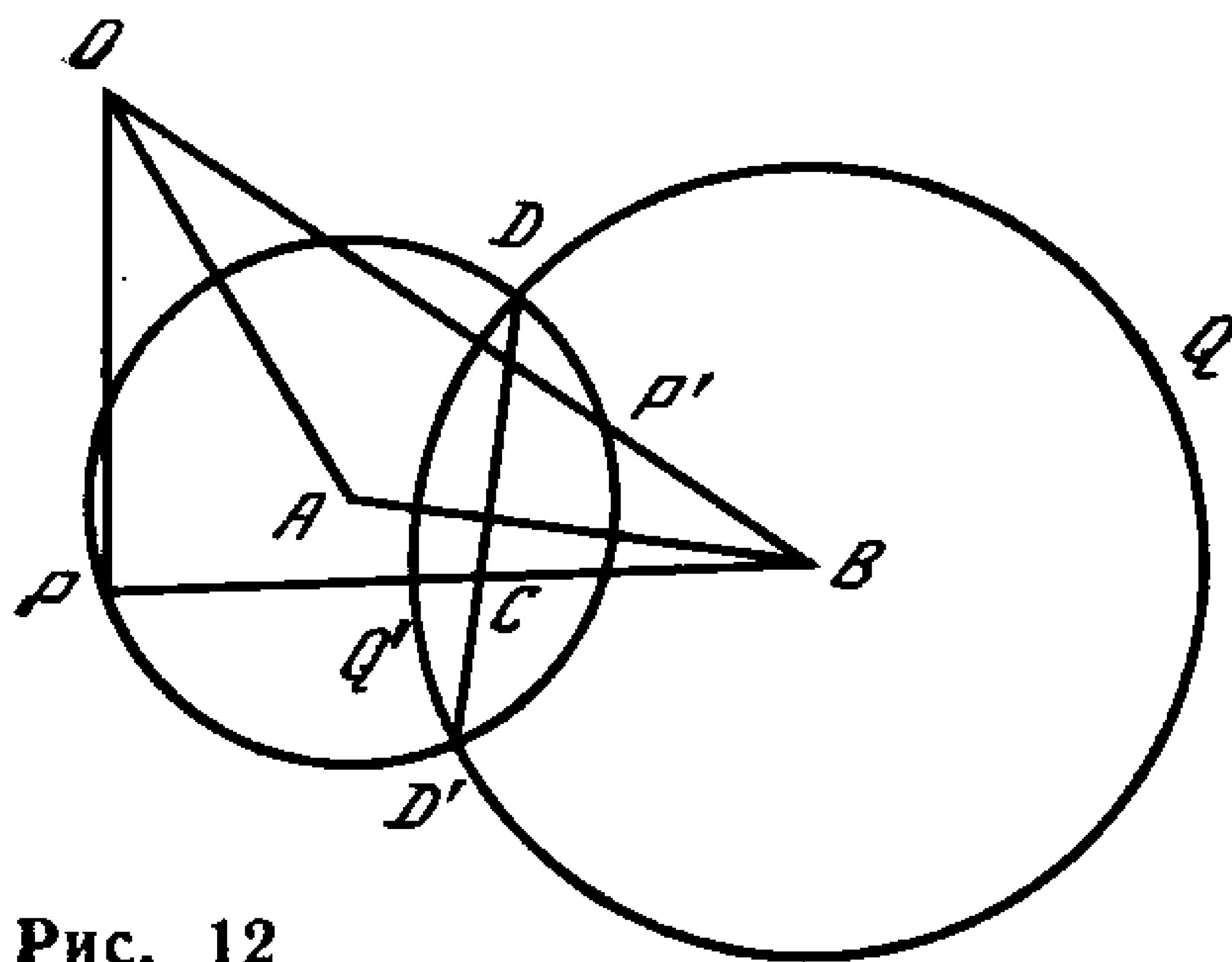


Рис. 12

Плотность в произвольной точке P сферы с центром в A и в произвольной точке O сферы с центром в B равны соответственно

$$\frac{1}{4\pi\alpha}\left(1-\left(\frac{\beta}{BP}\right)^3\right) \text{ и } \frac{1}{4\pi\beta}\left(1-\left(\frac{\alpha}{AQ}\right)^3\right).$$

На окружности пересечения плотность равна нулю.

Если одна из сфер намного больше другой, то плотность в вершине меньшей сферы в пределе втрое больше плотности в вершине большей сферы.

2) На линзе $P'DQ'D'$, образуемой обоими меньшими сегментами сфер, заряженной количеством электричества $=-\alpha\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, находящейся под воздействием точек A и B, несущих заряды α и β, и имеющей единичный потенциал. Плотность в произвольной точке выражается той же формулой.

3) На мениске $DPD'Q'$ с зарядом α, подверженном воздействию точек B и C, несущих соответственно заряды β и $-\alpha\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ и тоже находящемся в равновесии при единичном потенциале.

4) На другом мениске $QDP'D'$ с зарядом β, находящемся под воздействием точечных зарядов в A и C.

Мы можем также найти распределение электричества на следующих внутренних поверхностях:

— полая линза $P'DQ'D'$ под действием расположенного внутри точечного заряда C в центре окружности DD';

— полый мениск под действием точечного заряда в центре вогнутой поверхности;

— полость, образуемая двумя большими сегментами обеих сфер под действием трех точечных зарядов A, B, C.

Однако вместо того, чтобы расписывать решения для этих случаев, мы применим принцип электрических изображений для определения плотности электричества, наводимой в точке P внешней поверхности проводника $PDQD'$ под действием единичного точечного заряда, находящегося в точке O.

Пусть $OA=a$, $OB=b$, $OP=r$, $BP=p$, $AD=\alpha$, $BD=\beta$, $AB=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.
Произведем инверсию системы по отношению к сфере единичного радиуса с центром в точке O.

Обе сферы останутся сферами, пересекающимися под прямым углом, с центрами, расположенными на тех же радиусах, что A и B.

Если обозначить величины, относящиеся к инвертированной системе, штрихом, то

$$a'=\frac{a}{a^2-\alpha^2},\qquad b'=\frac{b}{b^2-\beta^2},\qquad \alpha'=\frac{\alpha}{a^2-\alpha^2},\qquad \beta'=\frac{\beta}{b^2-\beta^2},$$
$$r'=\frac{1}{r},\qquad p'^2=\frac{\beta^2r^2+(b^2-\beta^2)(p^2-\beta^2)}{r^2(b^2-\beta^2)^2}.$$

Если в инвертированной системе потенциал поверхности равен единице, то плотность заряда в точке P' равна

$$\sigma'=\frac{1}{4\pi\alpha'}\left(1-\left(\frac{\beta'}{p'}\right)^3\right).$$

Если в первоначальной системе плотность в точке P равна σ, то $(\sigma/\sigma')=(1/r^3)$, а потенциал равен $1/r$. При помещении в точку O отрицательного единичного электрического заряда потенциал обращается в нуль на первоначальной поверхности, а плотность в точке P становится равной

$$\sigma=\frac{1}{4\pi}\frac{a^2-\alpha^2}{\alpha r^3}\left(1-\frac{\beta^3r^3}{(\beta^2r^2+(b^2-\beta^2)(p^2-\beta^2))^{3/2}}\right).$$

Это выражение дает распределение электричества на одном из сферических сегментов под воздействием заряда в точке O. Распределение электричества на другом сферическом сегменте может быть найдено перестановкой a и b, α и β и заменой p на q или AQ.

Для нахождения полного заряда, наводимого на проводнике точечным зарядом O, рассмотрим инвертированную систему.

В инвертированной системе мы имеем заряд α' в A', β' в B' и отрицательный заряд $\alpha'\beta'/\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$ в точке C', расположенной на прямой $A'B'$ так, что

$$A'C' : C'B'=\alpha'^2 : \beta'^2.$$

Если $OA'=a'$, $OB'=b'$, $OC'=c'$, то

$$c'^2=\frac{a'^2\beta'^2+b'^2\alpha'^2-\alpha'^2\beta'^2}{\alpha'^2+\beta'^2}.$$

Инвертируя эту систему, получим

$$\frac{\alpha'}{a'}=\frac{\alpha}{a},\qquad \frac{\beta'}{b'}=\frac{\beta}{b}\quad\text{и}\quad -\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}\frac{1}{c'}=-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2\beta^2}}.$$

Следовательно, полный заряд на проводнике, обусловленный единичным отрицательным зарядом в O, равен

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-\alpha^2\beta^2}}.$$

Распределение электричества на трех сферических поверхностях, пересекающихся под прямыми углами

169. Пусть радиусы этих сфер равны α, β и γ. Тогда

$$BC=\sqrt{\beta^2+\gamma^2},\qquad CA=\sqrt{\gamma^2+\alpha^2},\qquad AB=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Пусть P, Q, R на рис. 13 — основания перпендикуляров, опущенных из A, B, C на противоположные стороны треугольника, а O — пересечение этих перпендикуляров. Тогда P является изображением B в сфере γ, а также изображением C в сфере β. Точка O также является изображением P в сфере α.

Пусть в точки A, B и C помещены заряды α, β и γ.

Тогда заряд, который необходимо поместить в точку P, будет равен

$$-\frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

Но $AP=\dfrac{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$, так что заряд в точке O, рассматриваемой как изображение точки P, равен

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

Рис. 13

Таким же путем можно найти систему изображений, электрически эквивалентных четырем сферическим поверхностям, находящимся под единичным потенциалом и пересекающимся под прямыми углами.

Если радиус четвертой сферы равен δ, то, поместив в центр этой сферы заряд δ, получим заряд на пересечении линии центров любых двух сфер, скажем α и β, с их плоскостью пересечения, равный

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}}.$$

Заряд на пересечении плоскости любых трех центров ABC с перпендикуляром из центра D равен

$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}},$$

а заряд на пересечении четырех перпендикуляров равен

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}}}.$$

Система четырех пересекающихся под прямыми углами сфер под нулевым потенциалом, находящихся под воздействием единичного точечного заряда

170. Обозначим эти сферы через A, B, C, D, а точку нахождения заряда — через O. Построим четыре сферы A_1, B_1, C_1, D_1, каждая из которых, скажем сфера A_1, проходит через точку O и пересекает три заданных сферы, в нашем случае B, C, D, под прямыми углами. Построим далее шесть сфер (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd), каждая из которых проходит через точку O и через окружность пересечения двух из первоначальных сфер.

Три сферы B_1, C_1, D_1 пересекутся и в другой точке, отличной от O. Обозначим эту точку через A', и пусть B', C', D' — соответственно пересечения сфер (C_1, D_1, A_1), (D_1, A_1, B_1), (A_1, B_1, C_1). Любые две из этих сфер (скажем, A_1, B_1) пересекаются с одной из шести сфер (cd) в точке $(a'b')$. Всего существует шесть таких точек.

Любая из сфер типа A_1 пересекается с тремя сферами из шестерки (ab), (ac), (ad) в точке a'. Таких точек всего четыре. Наконец, шесть сфер (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd) пересекаются, помимо точки O, в одной точке S.

Если теперь эту систему инвертировать по отношению к сфере единичного радиуса с центром в O, то четыре сферы A, B, C, D инвертируются в сферы, а остальные десять сфер перейдут в плоскости. Первые четыре точки пересечения A', B', C', D' переходят в центры сфер, а остальные соответствуют остальным описанным выше одиннадцати точкам. Эти пятнадцать точек образуют изображение точки O в системе четырех сфер.

В точке A', которая является изображением O в сфере A, мы должны поместить заряд, равный изображению O, т. е. $-\alpha/a$, где α — радиус сферы A, а a — расстояние ее центра от O. Аналогично мы должны поместить надлежащие заряды в точки B', C', D'.

Заряд в любой из остальных одиннадцати точек может быть найден из выражений, приведенных в предыдущем пункте, с заменой α, β, γ, δ на α', β', γ', δ' и умножением результата для каждой точки на ее расстояние от точки O. Здесь

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{a^2-\alpha^2}, \qquad \beta' = -\frac{\beta}{b^2-\beta^2}, \qquad \gamma' = -\frac{\gamma}{c^2-\gamma^2}, \qquad \delta' = -\frac{\delta}{d^2-\delta^2}.$$

[Приведенные в пп. 169, 170 случаи можно рассмотреть следующим образом: взяв три координатные плоскости, перпендикулярные друг другу, поместим в систему восьми точек ($\pm 1/2\alpha$, $\pm 1/2\beta$, $\pm 1/2\gamma$) заряды $\pm e$, причем отрицательные заряды помещаются в точки, имеющие одну или три отрицательные координаты. Очевидно, что координатные плоскости находятся под нулевым потенциалом. Теперь, произведя инверсию по отношению к любой точке, мы получим случай трех сфер, пересекающихся под прямыми углами и находящихся под воздействием точечного заряда. Если произвести инверсию по отношению к одному из точечных зарядов, мы получим решение для случая свободно заряженного проводника в форме трех сфер радиусов α, β, γ, пересекающихся под прямыми углами.

Если к полученной выше системе электрических точечных зарядов добавить их изображения в сфере с центром в начале координат, то, как легко видеть, помимо трех координатных плоскостей, поверхность сферы также становится частью поверхности нулевого потенциала.]

Две непересекающиеся сферы

171. Если область пространства ограничена двумя непересекающимися сферами, то последовательные изображения точечного заряда, расположенного внутри этой области, образуют две бесконечные последовательности точек, ни одна из которых не расположена между сферическими поверхностями, так что они удовлетворяют условию применимости метода электрических изображений.

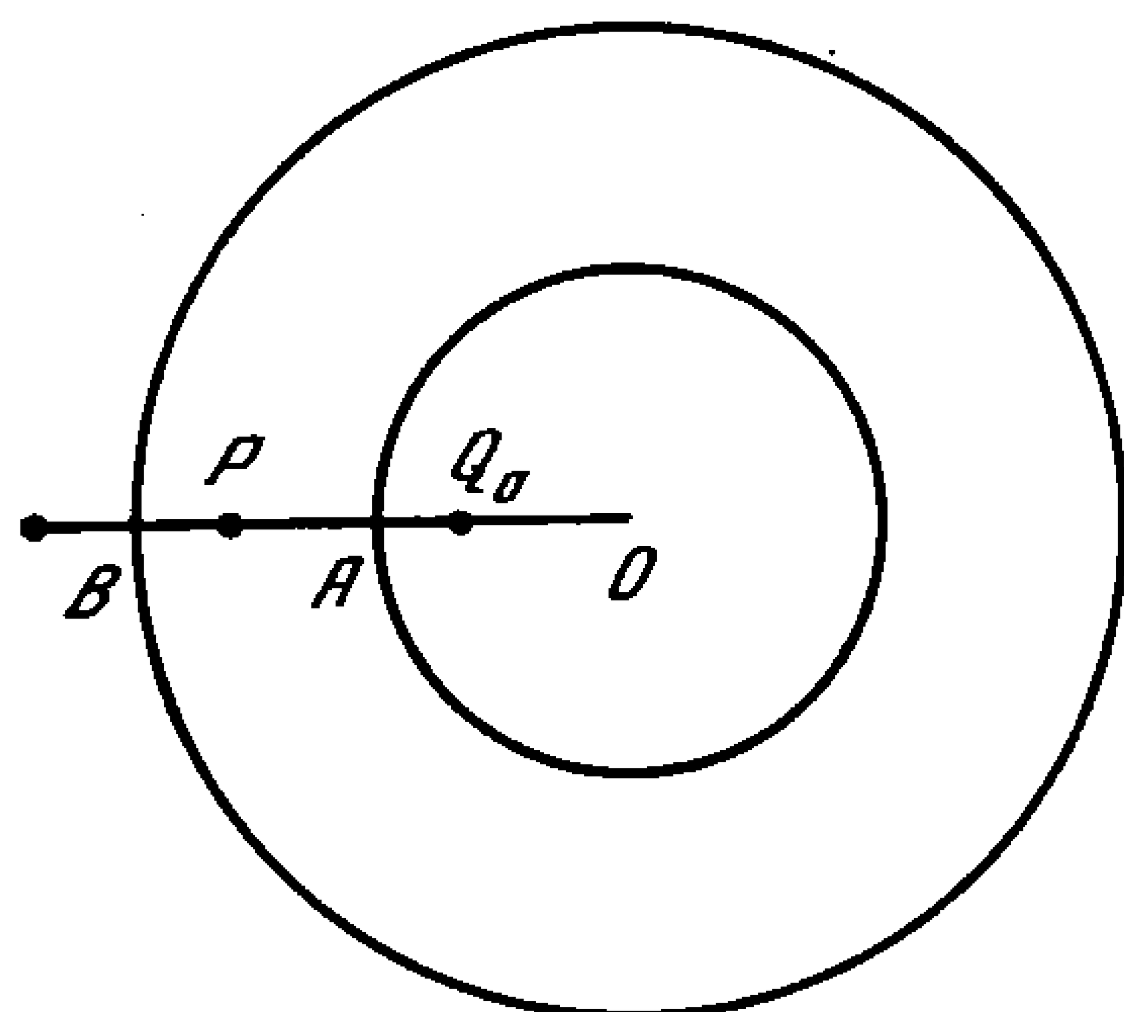


Рис. 14

Любые две непересекающиеся сферы можно инвертировать в две концентрические сферы, взяв за точку инверсии любую из двух общих точек инверсии этой пары сфер.

Поэтому мы начнем со случая двух заземленных концентрических сферических поверхностей, находящихся под воздействием точечного заряда P, помещенного между ними.

Пусть радиус первой сферы равен b, второй сферы — $be^{\tilde{\omega}}$, а расстояние действующего заряда от центра $r=be^{u}$.

Все последующие изображения будут находиться на том же радиусе, что и действующий заряд.

Пусть Q_0—изображение точки P в первой сфере (рис. 14), P_1—изображение Q_0 во второй сфере, Q_1—изображение P_1 в первой сфере и т. д. Тогда $OP_s \cdot OQ_s = b^2$ и $OP_s \cdot OQ_{s-1} = b^2 e^{2\tilde{\omega}}$, кроме того, $OQ_0 = be^{-u}$, $OP_1 = be^{u+2\tilde{\omega}}$, $OQ_1 = be^{-(u+2\tilde{\omega})}$ и т. д.

Отсюда $OP_s = be^{(u+2s\tilde{\omega})}$, $OQ_s = be^{-(u+2s\tilde{\omega})}$.

Если заряд в точке P обозначить через P, а заряд в точке P_s — через P_s, то

$$P_s = Pe^{\tilde{\omega}}, \qquad Q_s = -Pe^{-(u+s\tilde{\omega})}.$$

Пусть далее Q_1' — изображение P во второй сфере, P_1' — изображение Q_1' в первой сфере и т. д.

Тогда

$$OQ_1' = be^{2\tilde{\omega}-u}, \qquad OP_1' = be^{u-2\tilde{\omega}},$$
$$OQ_2' = be^{4\tilde{\omega}-u}, \qquad OP_2' = be^{u-4\tilde{\omega}},$$
$$OQ_s' = be^{2s\tilde{\omega}-u}, \qquad OP_s' = be^{u-2s\tilde{\omega}},$$
$$Q_s' = -Pe^{s\tilde{\omega}-u}, \qquad P_s' = Pe^{-s\tilde{\omega}}.$$

Из этой серии изображений все P — положительны, все Q — отрицательны, все P' и Q принадлежат первой сфере, а все P и Q' — второй.

Изображения внутри первой сферы образуют два сходящихся ряда, сумма которых равна $-P\left(e^{\tilde{\omega}-u}-1\right)/\left(e^{\tilde{\omega}}-1\right)$.

Таково, следовательно, количество электричества на первой, внутренней сфере. Изображения вне второй сферы образуют два расходящихся ряда, но каждое из этих изображений дает нулевой вклад в поверхностный интеграл по поверхности сферы. Поэтому электрический заряд на внешней сферической поверхности равен

$$P\left(\frac{e^{\tilde{\omega}-u}-1}{e^{\tilde{\omega}}-1}-1\right)=-P\,\frac{e^{\tilde{\omega}}-e^{\tilde{\omega}-u}}{e^{\tilde{\omega}}-1}.$$

Если подставить значения входящих сюда величин, выраженные через OA, OB и OP, получим

$$\text{заряд на } A=-P\cdot\frac{OA}{OP}\cdot\frac{PB}{AB},\quad \text{заряд на } B=-P\cdot\frac{OB}{OP}\cdot\frac{AP}{AB}.$$

Если радиусы сфер устремить в бесконечность, мы придем к случаю точки, расположенной между двумя параллельными плоскостями A и B. В этом случае выражения для зарядов принимают вид

$$\text{заряд на } A=-P\cdot\frac{PB}{AB},\quad \text{заряд на } B=-P\cdot\frac{AP}{AB}.$$

172. Чтобы перейти от рассмотренного случая к случаю двух произвольных непересекающихся сфер, начнем с нахождения двух общих точек инверсии **O** и **O′**, через которые проходят все окружности, ортогональные обеим сферам. Произведя затем инверсию системы по отношению к одной из этих точек, мы переведем наши сферы в две концентрические сферы, рассмотренные выше.

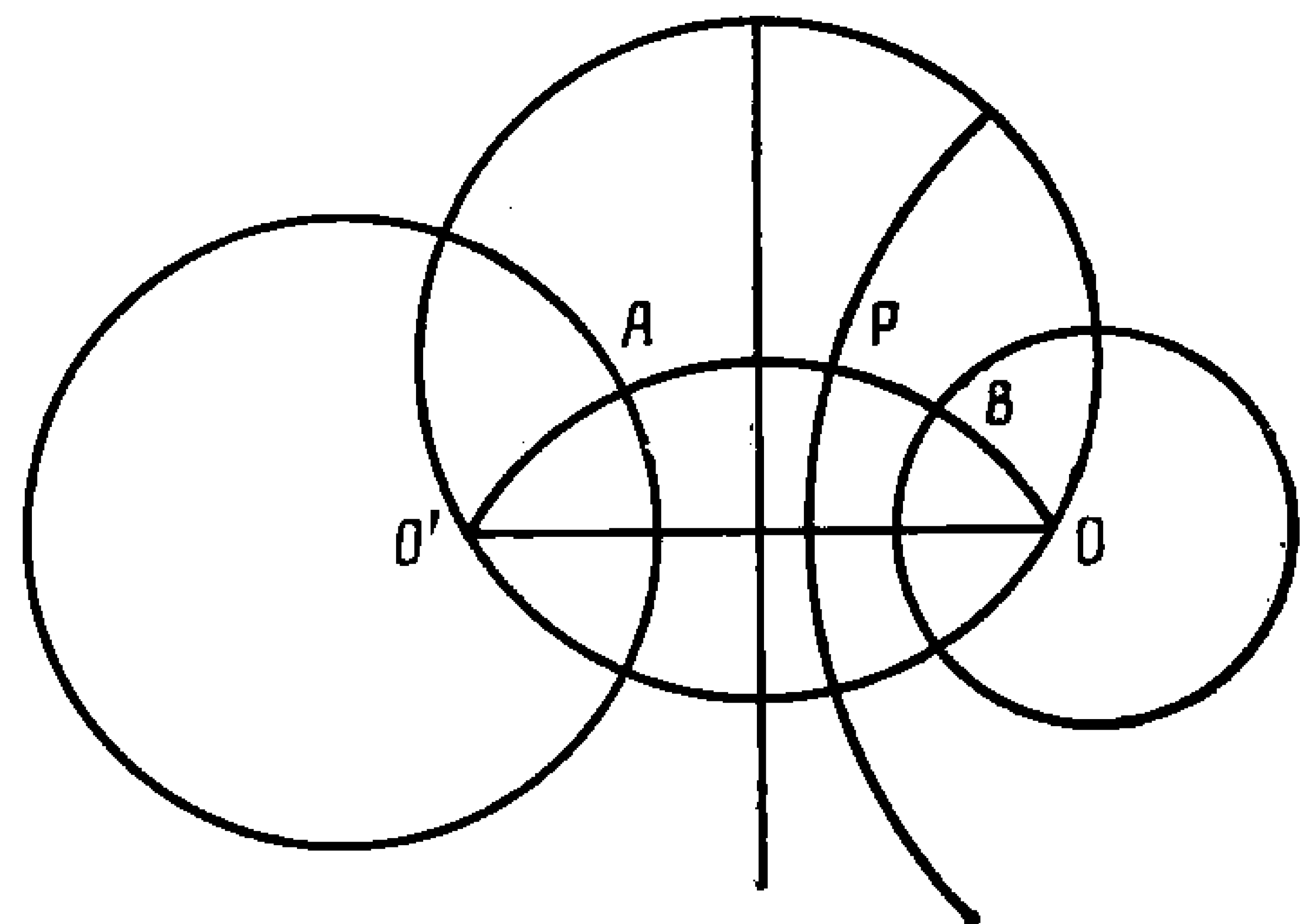


Рис. 15

Если точку **O** на рис. 15 принять за центр инверсии, то на рис. 14 она будет расположена где-то между двумя сферическими поверхностями.

Но в п. 171 мы решили задачу о точечном заряде, расположенном между двумя концентрическими проводниками, находящимися под нулевым потенциалом. Инвертируя эту систему по отношению к точке **O**, мы найдем, таким образом, распределения зарядов на двух сферических проводниках, находящихся под нулевым потенциалом и расположенных один вне другого, наводимые находящимся вблизи них точечным зарядом. В п. 173 будет показано, как использовать полученный результат для нахождения распределения на двух сферических заряженных проводниках, находящихся лишь под взаимным влиянием.

Радиус $OAPB$ на рис. 14, на котором расположены последовательные изображения, переходит на рис. 15 в дугу окружности, проходящей через **O** и **O′**, причем отношение **O′P** к **OP** равно Ce^{u}, где C — численный множитель.

Если положить

$$\theta=\ln\frac{\mathbf{O'P}}{\mathbf{OP}},\qquad \alpha=\ln\frac{\mathbf{O'A}}{\mathbf{OA}},\qquad \beta=\ln\frac{\mathbf{O'B}}{\mathbf{OB}},$$

то $\beta-\alpha=\tilde{\omega}$, $u+\alpha=\theta$.

Все последующие изображения точки **P** будут лежать на дуге O'APBO.

Для отображения $\mathbf{Q}_0$ точки **P** в **A**

$$\theta(\mathbf{Q}_0)=\ln\frac{\mathbf{O'Q}_0}{\mathbf{OQ}_0}=2\alpha-\theta.$$

Для отображения $\mathbf{P}_1$ точки $\mathbf{Q}_0$ в **B**

$$\theta(\mathbf{P}_1)=\ln\frac{\mathbf{O'P}_1}{\mathbf{OP}_1}=\theta+2\tilde{\omega}.$$

Аналогично $\theta(\mathbf{P}_s)=\theta+2s\tilde{\omega}$, $\theta(\mathbf{Q}_s)=2\alpha-\theta-2s\tilde{\omega}$.

Точно так же, обозначая через $\mathbf{Q}_0'$, $\mathbf{P}_1'$, $\mathbf{Q}_1'$ и т. д. последовательные изображения **P** в **B**, **A**, **B** и т. д., получим

$$\theta(\mathbf{Q}_0')=2\beta-\theta,\qquad \theta(\mathbf{P}_s')=\theta-2s\tilde{\omega},\qquad \theta(\mathbf{P}_1')=\theta-2\omega,\qquad \theta(\mathbf{Q}_s')=2\beta-\theta+2s\tilde{\omega}.$$

Для нахождения заряда каждого изображения $\mathbf{P}_s$ учтем, что в инвертированной системе (рис. 14) его заряд равен $P\sqrt{(OP_s/OP)}$. В исходной системе (рис. 15) эту величину следует дополнительно умножить на $\mathbf{OP}_s$. Следовательно, заряд в $\mathbf{P}_s$ на биполярной фигуре (поскольку $P=\mathbf{P}/\mathbf{OP}$), равен

$$\mathbf{P}\sqrt{\frac{\mathbf{OP}_s\cdot\mathbf{O'P}_s}{\mathbf{OP}\cdot\mathbf{O'P}}}.$$

Положим $\xi=\sqrt{\mathbf{OP}\cdot\mathbf{O'P}}$ и будем называть ξ параметром точки **P**. Тогда $\mathbf{P}_s=(\xi_s/\xi)\mathbf{P}$, т. е. заряд каждого изображения пропорционален его параметру.

Если воспользоваться криволинейными координатами θ и φ так, что

$$e^{\theta+\sqrt{-1}\,\varphi}=\frac{x+\sqrt{-1}\,y-k}{x+\sqrt{-1}\,y+k},$$

где $2k$ — расстояние OO', то[2]

$$x=-\frac{k\,\mathrm{sh}\,\theta}{\mathrm{ch}\,\theta-\cos\varphi},\qquad y=\frac{k\sin\theta}{\mathrm{ch}\,\theta-\cos\varphi},$$

$$x^2+(y-k\,\mathrm{ctg}\,\varphi)^2=k^2\csc^2\varphi,\qquad (x+k\,\mathrm{cth}\,\theta)^2+y^2=k^2\mathrm{csh}^2\theta,$$

$$\mathrm{ctg}\,\varphi=\frac{x^2+y^2-k^2}{2ky},\qquad \mathrm{cth}\,\theta=-\frac{x^2+y^2+k^2}{2kx},\qquad \xi=\frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\theta-\cos\varphi}}.$$

---

[2] В этих выражениях следует помнить, что $2\mathrm{ch}\,\theta=e^{\theta}+e^{-\theta}$, $2\mathrm{sh}\theta=e^{\theta}-e^{-\theta}$, а другие функции от θ определены через эти так же, как и соответственные тригонометрические функции.

Метод использования биполярных координат в этом случае дан Томсоном в *Liouville's Journal*. 1847 г. См. работу Томсона в *Electrical Papers*, § 211, 212. В своем изложении я использовал исследования проф. Бетти (*Nuovo Cimento*, vol. XX) при изложении аналитического метода, однако я сохранил идею электрических изображений, примененную Томсоном в его оригинальных исследованиях (*Phil. Mag.*, 1853).

Поскольку заряд каждого изображения пропорционален его параметру ξ, а знак его зависит от того, относится ли изображение к типу **P** или к типу **Q**, то

$$\mathbf{P}_s=\frac{\mathbf{P}\sqrt{\operatorname{ch}\theta-\cos\varphi}}{\sqrt{\operatorname{ch}(\theta+2s\tilde{\omega})-\cos\varphi}},\qquad \mathbf{Q}_s=-\frac{\mathbf{P}\sqrt{\operatorname{ch}\theta-\cos\varphi}}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\alpha-\theta-2s\tilde{\omega})-\cos\varphi}},$$

$$\mathbf{P}'_s=\frac{\mathbf{P}\sqrt{\operatorname{ch}\theta-\cos\varphi}}{\sqrt{\operatorname{ch}(\theta-2s\tilde{\omega})-\cos\varphi}},\qquad \mathbf{Q}'_s=-\frac{\mathbf{P}\sqrt{\operatorname{ch}\theta-\cos\varphi}}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\beta-\theta+2s\tilde{\omega})-\cos\varphi}}.$$

Таким образом, мы нашли положения и величины зарядов для обеих бесконечных последовательностей изображений. Теперь нам остается определить полный заряд на сфере **A**, просуммировав все изображения типа **Q** и **P′**, расположенные внутри сферы. Эти суммы можно записать в виде

$$\mathbf{P}\sqrt{\operatorname{ch}\theta-\cos\varphi}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(\theta-2s\tilde{\omega})-\cos\varphi}},$$

$$-\mathbf{P}\sqrt{\operatorname{ch}\theta-\cos\varphi}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\alpha-\theta-2s\tilde{\omega})-\cos\varphi}}.$$

Аналогично полный заряд, индуцированный на B, равен

$$\mathbf{P}\sqrt{\operatorname{ch}\theta-\cos\varphi}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(\theta+2s\tilde{\omega})-\cos\varphi}},$$

$$-\mathbf{P}\sqrt{\operatorname{ch}\theta-\cos\varphi}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\beta-\theta+2s\tilde{\omega})-\cos\varphi}}.$$

173. Применим эти результаты для нахождения коэффициентов емкости и индукции для двух сфер радиусов a и b с расстоянием между центрами c.

Пусть сфера A находится под единичным потенциалом, а сфера B — под нулевым потенциалом. Тогда последовательные изображения заряда a, помещенного в центре сферы A, дадут истинное распределение электричества. Все изображения будут лежать на оси между полюсами и центрами сфер, причем, как легко видеть, из четырех систем изображений, определенных в п. 172, в этом случае существует только третья и четвертая.

Полагая

$$k=(a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)^{1/2}/(2c),$$

получим $\operatorname{sh}\alpha=-(k/a)$, $\operatorname{sh}\beta=(k/b)$.

Значения θ и φ для центра сферы A равны $\theta=2\alpha$, $\varphi=0$.

Таким образом, мы должны в уравнениях заменить **P** на a или $-k/\operatorname{sh}\alpha$, θ — на 2α, φ — на 0, имея в виду, что само **P** является частью заряда сферы A. Таким образом, для коэффициента емкости сферы A получаем

$$q_{aa}=k\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}(s\tilde{\omega}-\alpha)},$$

а для коэффициента индукции A на B или B на A

$$q_{ab} = -k \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} s\tilde{\omega}}.$$

Таким же способом можно было бы, считая потенциал B единичным, а потенциал A — нулевым, найти значение q_{bb}. В принятых обозначениях мы получили бы следующее выражение:

$$q_{bb} = k \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\beta + s\tilde{\omega})}.$$

Чтобы выразить эти величины через радиусы сфер a и b и через расстояние между их центрами c, заметим, что если ввести обозначение

$$K = (a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)^{1/2},$$

то можно написать

$$\operatorname{sh}\alpha = -K/(2ac), \quad \operatorname{sh}\beta = K/(2bc), \quad \operatorname{sh}\tilde{\omega} = K/(2ab), \quad \operatorname{ch}\alpha = (c^2+a^2-b^2)/2ca,$$
$$\operatorname{ch}\beta = (c^2+b^2-a^2)/(2cb), \quad \operatorname{ch}\tilde{\omega} = (c^2-a^2-b^2)/(2ab)$$

и использовать соотношения

$$\operatorname{sh}(\alpha+\beta) = \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\beta + \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta,$$
$$\operatorname{ch}(\alpha+\beta) = \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\beta.$$

С помощью этих соотношений или же непосредственно рассчитывая последовательные изображения, как это сделано в работе сэра У. Томсона, получим

$$q_{aa} = a + \frac{a^2b}{c^2-b^2} + \frac{a^3b^2}{(c^2-b^2+ac)(c^2-b^2-ac)} + \ldots$$
$$q_{ab} = -\frac{ab}{c} - \frac{a^2b^2}{c(c^2-a^2-b^2)} - \frac{a^3b^3}{c(c^2-a^2-b^2+ab)(c^2-a^2-b^2-ab)} - \ldots$$
$$q_{bb} = b + \frac{ab^2}{c^2-a^2} + \frac{a^2b^3}{(c^2-a^2+bc)(c^2-a^2-bc)} + \ldots$$

174. Для определения зарядов E_a и E_b двух сфер, наэлектризованных соответственно до потенциалов V_a и V_b, мы имеем следующие уравнения:

$$E_a = V_a q_{aa} + V_b q_{ab}, \qquad E_b = V_a q_{ab} + V_b q_{bb}.$$

Если положить $q_{aa}q_{bb} - q_{ab}^2 = D = (1/D')$ и $p_{aa} = q_{bb}D'$, $p_{ab} = -q_{ab}D'$, $p_{bb} = q_{aa}D'$, так что $p_{aa}p_{bb} - p_{ab}^2 = D'$, то уравнения для определения потенциалов через заряды будут иметь вид

$$V_a = p_{aa}E_a + p_{ab}E_b, \qquad V_b = p_{ab}E_a + p_{bb}E_b,$$

где p_{aa}, p_{ab} и p_{bb} — коэффициенты потенциала.

Полная энергия системы равна, согласно п. 85,

$$Q = (E_aV_a + E_bV_b)/2 = (V_a^2 q_{aa} + 2V_aV_b q_{ab} + V_b^2 q_{bb})/2 = (E_a^2 p_{aa} + 2E_aE_b p_{ab} + E_b^2 p_{bb})/2.$$

Сила расталкивания между сферами равна, таким образом, согласно пп. 92, 93,

$$F=\frac{1}{2}\left\{V_a^2\frac{dq_{aa}}{dc}+2V_aV_b\frac{dq_{ab}}{dc}+V_b^2\frac{dq_{bb}}{dc}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{E_a^2\frac{dp_{aa}}{dc}+2E_aE_b\frac{dp_{ab}}{dc}+E_b^2\frac{dp_{bb}}{dc}\right\},$$

где c — расстояние между центрами сфер.

Из приведенных двух выражений силы расталкивания более удобно для расчетов первое выражение, в котором сила выражена через потенциалы сфер и коэффициенты емкости и индукции.

Таким образом, нам нужно дифференцировать коэффициенты q по c. Эти коэффициенты выражены как функции от k, α, β, $\tilde{\omega}$, причем при дифференцировании следует считать a и b постоянными. Из уравнений

$$k=-a\operatorname{sh}\alpha=b\operatorname{sh}\beta=-c\frac{\operatorname{sh}\alpha\cdot\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{sh}\tilde{\omega}}$$

находим

$$\frac{dk}{dc}=-\frac{\operatorname{ch}\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sh}\tilde{\omega}},\qquad \frac{d\alpha}{dc}=\frac{\operatorname{sh}\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta}{k\operatorname{sh}\tilde{\omega}},\qquad \frac{d\beta}{dc}=\frac{\operatorname{ch}\alpha\cdot\operatorname{sh}\beta}{k\operatorname{sh}\tilde{\omega}},\qquad \frac{d\tilde{\omega}}{dc}=\frac{1}{k},$$

откуда

$$\frac{dq_{aa}}{dc}=\frac{\operatorname{ch}\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sh}\tilde{\omega}}\cdot\frac{q_{aa}}{k}-\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(sc+b\operatorname{ch}\beta)\operatorname{ch}(s\tilde{\omega}-\alpha)}{c\,(\operatorname{sh}(s\tilde{\omega}-\alpha))^2},$$

$$\frac{dq_{ab}}{dc}=\frac{\operatorname{ch}\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sh}\tilde{\omega}}\cdot\frac{q_{ab}}{k}+\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{s\operatorname{ch}s\tilde{\omega}}{(\operatorname{sh}s\tilde{\omega})^2},$$

$$\frac{dq_{bb}}{dc}=\frac{\operatorname{ch}\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sh}\tilde{\omega}}\cdot\frac{q_{bb}}{k}-\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(sc+a\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{ch}(s\tilde{\omega}+\beta)}{c\,(\operatorname{sh}(s\tilde{\omega}+\beta))^2}.$$

Сэр Уильям Томсон рассчитал силу между двумя сферами равного радиуса, находящимися на произвольном расстоянии, не превышающем диаметра одной из сфер. Для больших расстояний нет необходимости использовать больше двух-трех последовательных изображений.

Ряды для производных q по c могут быть легко получены прямым дифференцированием

$$\frac{dq_{aa}}{dc}=-\frac{2a^2bc}{(c^2-b^2)^2}-\frac{2a^3b^2c\,(2c^2-2b^2-a^2)}{(c^2-b^2+ac)^2\,(c^2-b^2-ac)^2}-\ldots$$

$$\frac{dq_{ab}}{dc}=\frac{ab}{c^2}+\frac{a^2b^2\,(3c^2-a^2-b^2)}{c^2\,(c^2-a^2-b^2)^2}+\frac{a^3b^3\left\{(5c^2-a^2-b^2)\,(c^2-a^2-b^2)-a^2b^2\right\}}{c^2\,(c^2-a^2-b^2+ab)^2\,(c^2-a^2-b^2-ab)^2}+\ldots$$

$$\frac{dq_{bb}}{dc}=-\frac{2ab^2c}{(c^2-a^2)^2}-\frac{2a^2b^3c\,(2c^2-2a^2-b^2)}{(c^2-a^2+bc)^2\,(c^2-a^2-bc)^2}-\ldots$$

Распределение электричества на двух соприкасающихся сферах

175. Если рассмотреть две такие сферы при единичном потенциале, на которые не воздействуют никакие другие заряды, то при инверсии системы по отношению к точке соприкосновения мы получим две параллельные плоскости, отстоящие на

расстоянии $1/2a$ и $1/2b$ от точки инверсии, электризация которых определяется действием положительного единичного заряда, находящегося в этой точке.

Возникнет последовательность положительных изображений с единичным зарядом на расстояниях $s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ от начала координат, где s может принимать все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Кроме того, будет и последовательность отрицательных изображений с зарядом -1, расстояние которых от начала координат, отсчитываемое в направлении a, равно $\frac{1}{a}+s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

При обратной инверсии этой системы в две соприкасающиеся сферы положительным изображениям соответствует последовательность отрицательных изображений, расстояние которых от точки соприкосновения дается выражением $\left[s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^{-1}$, где s — положительно для сферы A и отрицательно для сферы B. При единичном потенциале сфер заряд каждого изображения численно равен его расстоянию от точки соприкосновения и всегда отрицателен.

Кроме того, будет существовать последовательность положительных изображений, соответствующая отрицательным изображениям для двух плоскостей; расстояния этих положительных изображений от точки соприкосновения, отсчитываемые в направлении центра сферы A, равны $\left[\frac{1}{a}+s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^{-1}$.

При s равном нулю или целому положительному числу изображение находится внутри сферы A, при s целом отрицательном изображение находится внутри сферы B. Заряд каждого изображения численно равен его расстоянию от начала координат и всегда положителен.

Таким образом, полный заряд сферы A равен

$$E_a=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\frac{1}{a}+s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}-\frac{ab}{a+b}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s}.$$

Оба эти ряда расходятся, но если их скомбинировать в виде

$$E_a=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{a^2b}{s(a+b)\{s(a+b)-a\}},$$

то ряд становится сходящимся.

Аналогично для заряда на сфере B получим

$$E_b=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{ab}{s(a+b)-b}-\frac{ab}{a+b}\sum_{s=-1}^{s=-\infty}\frac{1}{s}=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{ab^2}{s(a+b)\{s(a+b)-b\}}.$$

Очевидно, выражение для E_a равно

$$\frac{ab}{a+b}\int_0^1\frac{\theta^{\frac{b}{a+b}-1}-1}{1-\theta}\,d\theta.$$

Последний результат для этого случая был получен Пуассоном.

Можно также показать (Legendre, *Traité des Fonctions Elliptiques*, II, 438), что приведенный выше ряд для E_a равен

$$a-\left\{\gamma+\Psi\left(\frac{b}{a+b}\right)\right\}\frac{ab}{a+b},$$

где $\gamma=0{,}57712\ldots$, а $\Psi(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(1+x)$.

Таблицы значений Ψ приведены Гауссом (*Werke*, Band III, p. 161—162).

Если временно обозначить $b/(a+b)$ через x, то разность зарядов E_a и E_b запишется в виде

$$-\frac{d}{dx}\ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\cdot\frac{ab}{a+b}\qquad=\frac{ab}{a+b}\frac{d}{dx}\ln\sin\pi x\qquad=\frac{\pi ab}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{\pi b}{a+b}.$$

Для одинаковых сфер заряд каждой равен при единичном потенциале

$$E_a=a\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{2s(2s-1)}=a\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)=a\ln 2=0{,}69314718a.$$

Если сфера A много меньше сферы B, то заряд на A приблизительно равен

$$E_a=\frac{a^2}{b}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^2}=\frac{\pi^2}{6}\frac{a^2}{b},$$

а заряд на B приблизительно тот же, что и при удалении сферы A, т. е. $E_b=b$.

Средняя плотность на каждой сфере находится делением заряда на величину поверхности. Таким образом,

$$\sigma_a=\frac{E_a}{4\pi a^2}=\frac{\pi}{24b},\qquad \sigma_b=\frac{E_b}{4\pi b^2}=\frac{1}{4\pi b},\qquad \sigma_a=\frac{\pi^2}{6}\sigma_b.$$

Следовательно, при прикосновении малой сферы к очень большой средняя плотность на малой сфере отличается от средней плотности на большой сфере множителем $\pi^2/6$, т. е. 1,644936.

Применение метода электрической инверсии к случаю сферической чаши

176. Одной из наиболее замечательных иллюстраций метода электрических изображений сэра У. Томсона является его исследование распределения электричества на части сферической поверхности, ограниченной малым кругом. Результаты этих исследований были без доказательства сообщены г-ну Лиувилю и опубликованы в его *Journal* в 1847 г. Полное исследование опубликовано у Томсона в *Electrical Papers*, статья XV.

Насколько мне известно, ни одним другим математиком не было дано какого-либо решения задачи о распределении электричества на конечной части какой-либо искривленной поверхности.

Поскольку моей целью является разъяснение метода, а не проверка вычислений, я не будут подробно излагать ни геометрии задачи, ни вычислений, отсылая читателей к работе Томсона.

Распределение электричества на эллипсоиде

177. Известным методом было доказано [3], что притяжение оболочки, ограниченной двумя подобными, подобно расположенными и концентрическими эллипсоидами, таково, что на точку, находящуюся внутри оболочки, не действует никакая результирующая сила притяжения. Если предположить, что толщина оболочки неограниченно уменьшается, а плотность на ней неограниченно возрастает, мы в пределе придем к понятию поверхностной плотности, меняющейся пропорционально величине перпендикуляра, опущенного из центра на касательную плоскость. Поскольку результирующая сила притяжения такого поверхностного распределения, действующая на любую точку внутри эллипсоида, равна нулю, то при таком распределении электричества на поверхности имеет место равновесие.

Таким образом, поверхностная плотность в любой точке эллипсоида, не возмущенного внешним воздействием, меняется как расстояние касательной плоскости от центра.

Распределение электричества на диске

Взяв две оси эллипсоида равными, а третью устремив к нулю, мы придем к случаю кругового диска и к выражению для поверхностной плотности в произвольной точке P такого диска, заряженного до потенциала V и невозмущенного внешним влиянием. Если σ — поверхностная плотность на одной стороне диска, а KPL — хорда проходящая через точку P, то $\sigma = V/(2\pi^2\sqrt{KP\cdot PL})$.

Применение принципа электрической инверсии

178. Примем произвольную точку Q за центр инверсии и пусть R — радиус сферы инверсии. Тогда плоскость диска переходит в сферическую поверхность, проходящую через точку Q, а сам диск становится частью этой сферической поверхности, ограниченной окружностью. Назовем эту часть поверхности *чашей*.

Пусть S' — диск, заряженный до потенциала V' и не находящийся под внешним воздействием. Его электрическое изображение S будет сферическим сегментом под нулевым потенциалом, электризация которого вызвана действием количества электричества $V'R$, помещенного в точку Q.

Таким образом, с помощью процесса инверсии мы получили решение задачи о распределении электричества на чаше или на плоском диске, находящихся под нулевым потенциалом, под воздействием точечного заряда, лежащего на поверхности сферы или плоскости, являющихся продолжением чаши или диска.

Влияние точечного заряда, расположенного на незанятой части сферической поверхности

Применение описанных выше методов и геометрических свойств инверсии приводит к следующей форме решения.

Пусть C — центральная точка, или полюс, сферической чаши S, а a — расстояние от C до произвольной точки на границе сегмента. Пусть далее в точку Q на поверхности сферы, являющейся продолжением чаши, помещено количество

---

[3] См. Thomson and Tait, «*Natural Philosophy*», § 520 или п. 150 настоящего трактата.

электричества q, а чаша S поддерживается под нулевым потенциалом. Тогда плотность σ в любой точке P чаши будет равна

$$\sigma=\frac{1}{2\pi^2}\frac{q}{QP^2}\sqrt{\frac{CQ^2-a^2}{a^2-CP^2}},$$

где CQ, CP и QP — прямые, соединяющие точки C, Q, P. Замечательно, что это выражение не зависит от радиуса сферической поверхности, частью которой является чаша. Следовательно, оно применимо без изменения и в случае плоского диска.

Влияние произвольного числа точечных зарядов

Рассмотрим теперь сферу, разделенную на две части. Одна из них представляет собой сферический сегмент, на котором мы определили распределение электричества (будем называть ее *чашей*), а на другой (оставшейся, или незанятой) — части сферы располагается точечный заряд Q.

Если на оставшейся части сферы расположено несколько точечных зарядов, то наводимое ими распределение электричества в любой точке чаши может быть получено суммированием плотностей, наводимых в отдельности каждым зарядом.

179. Пусть вся оставшаяся поверхность сферы заряжена равномерно с поверхностной плотностью ρ, тогда плотность в каждой точке чаши может быть получена простым интегрированием по заряженной таким образом поверхности.

Таким образом, мы получим решение для случая чаши, находящейся под нулевым потенциалом и заряженной под воздействием оставшейся части сферической поверхности, на которой фиксирована однородная плотность ρ.

Изолируем теперь всю систему, внесем ее внутрь сферы диаметра f и зададим на этой сфере равномерное жесткое распределение заряда с поверхностной плотностью ρ'.

Внутри этой сферы не будет никакой результирующей силы, так что распределение электричества на чаше останется неизменным, но потенциал во всех точках внутри сферы возрастет на величину V, равную $V=2\pi\rho' f$.

Таким образом, потенциал во всех точках чаши станет равным V.

Пусть теперь эта сфера концентрична сфере, частью которой является чаша, и путь ее радиус лишь на бесконечно малую величину больше радиуса этой последней сферы. Мы приходим при этом к случаю чаши, поддерживаемой под потенциалом V и находящейся под воздействием оставшейся части сферы, на которой задано жесткое распределение электричества с поверхностной плотностью $\rho+\rho'$.

180. Остается предположить, что $\rho+\rho'=0$, и мы получим случай чаши, поддерживаемой под потенциалом V и свободной от внешнего воздействия.

Пусть σ — плотность на любой из поверхностей чаши в заданной точке в случае, когда потенциал чаши равен нулю, а оставшаяся часть сферы заряжена с плотностью ρ. Тогда для чаши, находящейся под потенциалом V, следует увеличить плотность на наружной стороне на ρ', где ρ' — плотность на охватывающей сфере.

В результате таких расчетов получим, что поверхностная плотность σ на поверхности внутри чаши равна

$$\sigma=\frac{V}{2\pi^2 f}\left\{\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}}\right\},$$

а поверхностная плотность снаружи в той же точке равна $\sigma+(V/2\pi f)$. Здесь f — диаметр сферы, a — хорда радиуса чаши, r — хорда расстояния P от полюса чаши.

Эти формулы получаются простым интегрированием по части сферической поверхности. Для построения полной теории электризации сферической чаши нам понадобилось лишь знание геометрии инверсии сферических поверхностей.

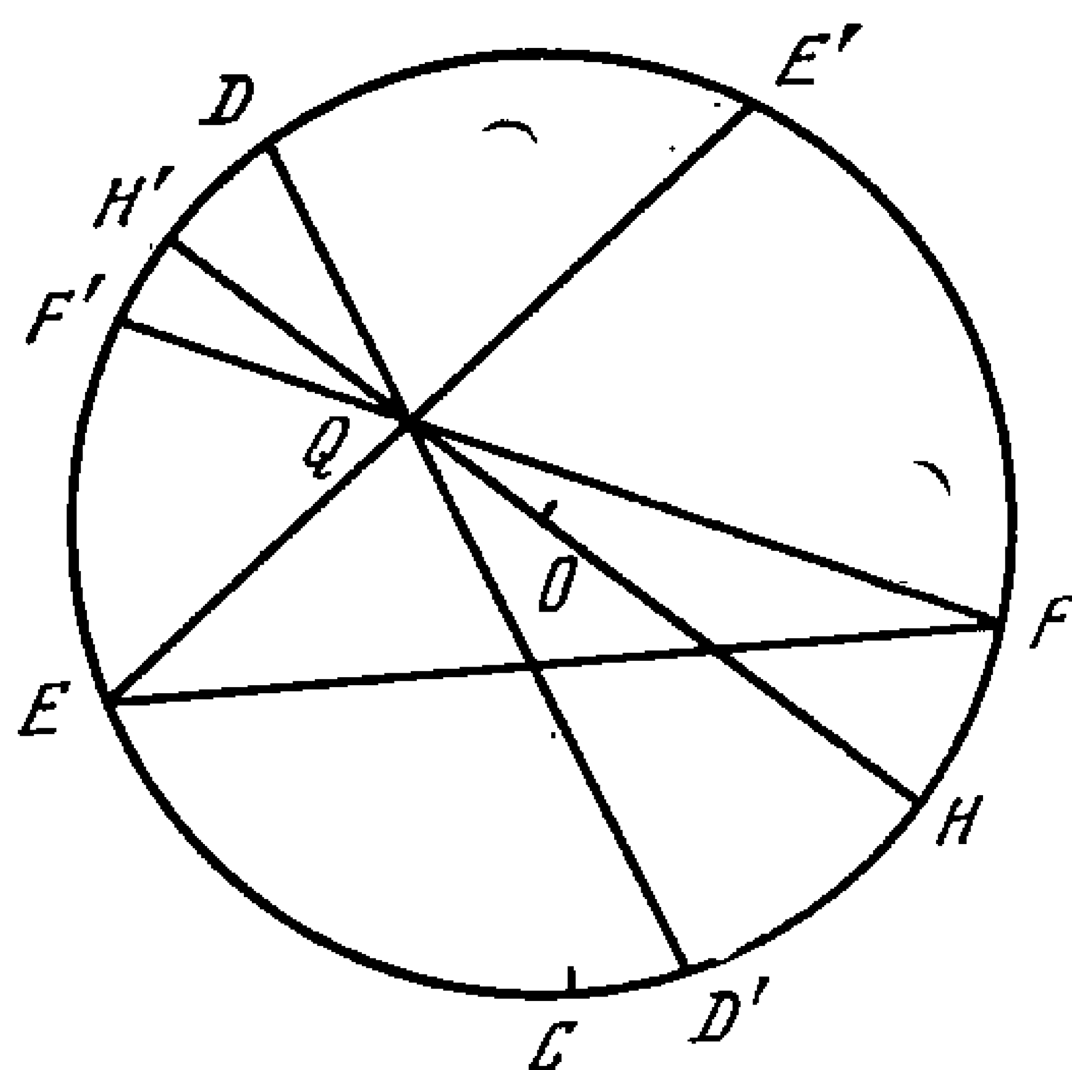


Рис. 16

181. Пусть требуется определить поверхностную плотность, наводимую в произвольной точке заземленной чаши количеством электричества q, помещенным в точку Q, не расположенную теперь на сферической поверхности, являющейся продолжением чаши.

Произведем инверсию чаши по отношению к Q, приняв радиус сферы инверсии равным R. Чаша S перейдет в свое изображение S', а точка P — в свое изображение P'. Нам нужно определить плотность σ' в P' для чаши S', поддерживаемой под потенциалом V', таким, что $q=V'R$, и не подверженной внешним влияниям.

Плотность σ в точке P первоначальной чаши будет равна $\sigma=-(\sigma' R^3/QP^3)$, причем эта чаша будет находиться под нулевым потенциалом и под воздействием количества электричества q, помещенного в точку Q.

Такая процедура приводит к следующему результату.

Пусть рис. 16 представляет собой сечение сферы через центр O, полюс чаши C и индуцирующий точечный заряд Q. Точка D соответствует в инвертируемой фигуре незанятому полюсу ободка чаши и может быть найдена следующим построением.

Проведем через Q хорды EQE' и FQF'. Если принять радиус инверсии сферы равным среднему геометрическому между отрезками, на которые делится хорда в точке Q, то $E'F'$ будет изображением EF. Пусть точка D' делит дугу $F'CE'$ пополам, так что $F'D'$ равно $D'E'$. Проведем прямую $D'QD$ до пересечения со сферой в точке D. Эта точка D и является искомой. Проведем также через центр сферы O и точку Q прямую $HOQH'$, пересекающуюся со сферой в точках H и H'. Тогда для любой точки P на чаше наводимая количеством электричества q в точке Q поверхностная плотность на той стороне, которая отделена от Q дополняющей чашу сферической поверхностью, будет равна

$$\sigma=\frac{q}{2\pi^2}\frac{QH\cdot QH'}{HH'\cdot PQ^3}\left\{\frac{PQ}{DQ}\left(\frac{CD^2-a^2}{a^2-CP^2}\right)^{1/2}-\operatorname{arctg}\left[\frac{PQ}{DQ}\left(\frac{CD^2-a^2}{a^2-CP^2}\right)^{1/2}\right]\right\},$$

где a означает хорду, проведенную из полюса чаши C до ободка чаши.

На ближайшей к Q стороне поверхностная плотность равна

$$\sigma+\frac{q}{2\pi}\frac{QH\cdot QH'}{HH'\cdot PQ^3}.$$

ГЛАВА XII

ТЕОРИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

182. Число независимых случаев, в которых решена задача электрического равновесия, весьма невелико. Для сферических проводников развит метод сферических гармоник. Еще более мощными являются методы электрических изображений и инверсии в тех случаях, когда они применимы. Случай поверхностей второго порядка, насколько я знаю,— единственный, для которого известны и эквипотенциальные поверхности, и силовые линии, причем силовые линии не являются плоскими кривыми.

Но существует важный класс задач в теории электрического равновесия и в теории прохождения тока, в которых рассматривается лишь двумерное пространство.

Так, например, если всюду в рассматриваемой части электрического поля и на значительном расстоянии вне ее поверхности всех проводников образованы движением прямых линий, параллельных оси z, а та часть поля, где это не имеет места, настолько удалена от рассматриваемой части, что ее электрическим действием можно пренебречь, то электричество будет равномерно распределено вдоль всех образующих, и если рассмотреть участок поля, ограниченный двумя плоскостями, перпендикулярными оси z и находящимися на единичном расстоянии, то потенциал и распределение электричества будут функцией лишь от x и y.

Пусть $\rho\, dx\, dy$ — количество электричества в элементе объема с площадью основания $dx\, dy$ и единичной высотой, а σds — количество электричества на элементе площади с основанием ds и единичной высотой. Тогда уравнение Пуассона можно написать в виде

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+4\pi\rho=0.$$

При отсутствии свободных зарядов оно сводится к уравнению Лапласа

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=0.$$

Общая задача электрического равновесия может быть сформулирована следующим образом.

Задана непрерывная двумерная область, ограниченная замкнутыми кривыми C_1, C_2 и т. д. Найти вид такой функции V, которая на этих границах принимает соответственно значения V_1, V_2 и т. д., постоянные на каждой границе, а внутри области всюду конечна, непрерывна, однозначна и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Мне неизвестно, было ли дано какое-либо совершенно общее решение даже для этой задачи, но в этом случае применим приводимый в п. 190 метод преобразования, значительно более мощный, чем любой известный нам метод решения для трех измерений.

Этот метод основан на свойствах сопряженных функций двух переменных.

Определение сопряженных функций

183. Величины α и β называются сопряженными функциями от x и y, если $\alpha+\sqrt{-1}\,\beta$ является функцией от $x+\sqrt{-1}\,y$.

Из этого определения следует, что

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{d\beta}{dy} \text{ и } \frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\beta}{dx}=0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}=0, \qquad \frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}=0. \tag{2}$$

Таким образом, обе функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Кроме того,

$$\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}=\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2=\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2=R^2. \tag{3}$$

Если x и y—прямоугольные координаты, ds_1—отрезок кривой (β=const) между кривыми (α) и ($\alpha+d\alpha$), а ds_2 — отрезок кривой α между кривыми (β) и ($\beta+d\beta$), то

$$-\frac{ds_1}{d\alpha}=\frac{ds_2}{d\beta}=\frac{1}{R}, \tag{4}$$

и кривые пересекаются под прямым углом.

Если положить потенциал равным $V=V_0+k\alpha$, где k — некоторая постоянная, то V будет удовлетворять уравнению Лапласа, и кривые (α) будут эквипотенциальными кривыми. Кривые (β) будут при этом силовыми линиями, а поверхностный интеграл от R по цилиндрической поверхности единичной высоты, проекцией которой на плоскость xy является кривая AB, равен $k\,(\beta_B-\beta_A)$, где β_A и β_B — значения β на концах кривой.

Если построить на плоскости одну совокупность кривых, соответствующую значениям α, взятым в арифметической прогрессии, и другую совокупность кривых, соответствующих последовательности значений β с той же разностью прогрессии, то обе эти совокупности кривых будут пересекаться всюду под прямыми углами, и при достаточно малой общей разности обеих прогрессий элементы, на которые разделится плоскость, будут в пределе малыми квадратами, стороны которых в разных участках поля имеют разное направление и величину, будучи обратно пропорциональными R.

Если две или несколько эквипотенциальных линий (α) являются замкнутыми кривыми, ограничивающими непрерывную область, то эти кривые можно принять за поверхности проводников с потенциалами соответственно $V_0+k\alpha_1$, $V_0+k\alpha_2$ и т. д. Количество электричества на любом из этих проводников, расположенное между силовыми линиями (β_1) и (β_2), равно $k\,(\beta_2-\beta_1)/4\pi$.

Таким образом, число эквипотенциальных кривых между двумя проводниками будет показывать разность потенциалов между ними, а число силовых линий, выходящих из проводника, будет показывать количество электричества на нем.

Ниже мы сформулируем некоторые из наиболее важных теорем, касающихся сопряженных функций, причем при их доказательстве мы будем исходить либо из уравнений (1), содержащих производные, либо из первоначального определения, использующего мнимые обозначения.

184. Теорема I. *Если x' и y' — сопряженные функции по отношению к x и y, а x'' и y'' — тоже сопряженные функции по отношению к x и y, то функции $x'+x''$ и $y'+y''$ будут сопряженными функциями по отношению к x и y.*

Действительно, $\frac{dx'}{dx}=\frac{dy'}{dy}$ и $\frac{dx''}{dx}=\frac{dy''}{dy}$, так что $\frac{d(x'+x'')}{dx}=\frac{d(y'+y'')}{dy}$.

Далее, $\frac{dx'}{dy}=-\frac{dy'}{dx}$ и $\frac{dx''}{dy}=-\frac{dy''}{dx}$, откуда $\frac{d(x'+x'')}{dy}=-\frac{d(y'+y'')}{dx}$, т. е. $x'+x''$ и $y'+y''$ являются сопряженными по отношению к x и y.

Графическое представление функции, являющейся суммой двух заданных функций

Пусть функция (α) от x и y графически представлена семейством кривых в плоскости xy, каждая из которых соответствует некоторому значению α из последовательности значений, нарастающих с постоянной разностью δ.

Пусть другая функция (β) от x и y аналогично представлена семейством кривых, соответствующих значениям β с той же разностью, что и в последовательности α.

Тогда для аналогичного представления функции ($\alpha+\beta$) нужно провести кривые через точки пересечения предыдущих семейств кривых, соединив точку пересечения кривых (α) и (β) с точкой пересечения кривых ($\alpha+\delta$) и ($\beta-\delta$), далее с точкой пересечения ($\alpha+2\delta$) и ($\beta-2\delta$) и т. д. Во всех этих точках функция имеет одно и то же значение ($\alpha+\beta$). Следующая кривая может быть проведена через точки пересечения (α) и ($\beta+\delta$), ($\alpha+\delta$) и (β), ($\alpha+2\delta$) и ($\beta-\delta$) и т. д. Этой кривой соответствует значение функции ($\alpha+\beta+\delta$).

Таким образом, можно по имеющемуся семейству кривых (α) и семейству (β) построить семейство кривых ($\alpha+\beta$). Эти три семейства кривых могут быть построены на отдельных листах прозрачной бумаги. Совместив соответственно первый и второй листы, можно произвести построение на третьем листе.

Комбинируя таким образом сопряженные функции с помощью сложения, можно легко получить графики для многих интересных случаев, если только мы можем построить их для более простых случаев, входящих в качестве слагаемых. Однако в нашем распоряжении имеется и значительно более мощный метод преобразования решений, даваемый следующей теоремой.

185. Теорема II. *Пусть x'' и y'' — сопряженные функции по отношению к переменным x' и y', а x' и y' — сопряженные функции по отношению к x и y, тогда x'' и y'' будут сопряженными функциями по отношению к x и y.*

Действительно, $\frac{dx''}{dx}=\frac{dx''}{dx'}\frac{dx'}{dx}+\frac{dx''}{dy'}\frac{dy'}{dx}=\frac{dy''}{dy'}\frac{dy'}{dy}+\frac{dy''}{dx'}\frac{dx'}{dy}=\frac{dy''}{dy}$

и

$$\frac{dx''}{dy}-\frac{dx''}{dx'}\frac{dx'}{dy}+\frac{dx''}{dy'}\frac{dy'}{dy}=-\frac{dy''}{dy'}\frac{dy'}{dx}-\frac{dy''}{dx'}\frac{dx'}{dx}=-\frac{dy''}{dx},$$

а это как раз условия того, что x'' и y'' — сопряженные функции от x и y.

Это можно показать также, исходя из первоначального определения сопряженных функций. Поскольку $x''+\sqrt{-1}\,y''$ является функцией от $x'+\sqrt{-1}\,y'$, а $x'+$

$+\sqrt{-1}\,y'$ является функцией от $x+\sqrt{-1}\,y$, то $x''+\sqrt{-1}\,y''$ является функцией от $x+\sqrt{-1}y$.

Точно так же можно показать, что если x' и y' — сопряженные функции от x и y, то x и y — сопряженные функции от x' и y'.

Эту теорему можно графически интерпретировать следующим образом.

Пусть x' и y' приняты за прямоугольные координаты и на чертеже построены кривые, соответствующие значениям x'' и y'', взятым в арифметической прогрессии. Мы получим, таким образом, два семейства кривых, разбивающих чертеж на квадратики. Построим также на чертеже горизонтальные и вертикальные прямые на равных расстояниях друг от друга, пометив их соответствующими значениями x' и y'.

Пусть теперь на другом чертеже x и y приняты за прямоугольные координаты и построено два семейства кривых x', y', помеченных соответствующими значениями x' и y'. Эта система криволинейных координат будет однозначно соответствовать прямоугольной системе координат x', y' на первом чертеже.

Таким образом, если взять произвольное число точек на кривой x'' первого чертежа, заметить значения x' и y' в этих точках и отметить соответствующие точки на втором чертеже, то мы получим ряд точек преобразованной кривой x''. Если проделать такое построение для всех кривых x'' и y'' первого чертежа, то на втором чертеже получится два семейства кривых x'', y'', отличающихся от прежних, но обладающих тем же свойством разбиения чертежа на квадратики.

186. Теорема III. *Если V — произвольная функция от x' и y', а x' и y' — сопряженные функции от x и y, то*

$$\iint\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\right)dx\,dy=\iint\left(\frac{d^2V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}\right)dx'\,dy',$$

где интегрирование справа и слева производится в соответствующих пределах.

Действительно,

$$\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{dx'}\frac{dx'}{dx}+\frac{dV}{dy'}\frac{dy'}{dx},$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{d^2V}{dx'^2}\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2+2\frac{d^2V}{dx'\,dy'}\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dx}+\frac{d^2V}{dy'^2}\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2+\frac{dV}{dx'}\frac{d^2x'}{dx^2}+\frac{dV}{dy'}\frac{d^2y'}{dx^2},$$

$$\frac{d^2V}{dy^2}=\frac{d^2V}{dx'^2}\left(\frac{dx'}{dy}\right)^2+2\frac{d^2V}{dx'\,dy'}\frac{dx'}{dy}\frac{dy'}{dy}+\frac{d^2V}{dy'^2}\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2+\frac{dV}{dx'}\frac{d^2x'}{dy^2}+\frac{dV}{dy'}\frac{d^2y'}{dy^2}.$$

Складывая два последних уравнения и учитывая условие (1) для сопряженных функций, получим

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=\frac{d^2V}{dx'^2}\left\{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx'}{dy}\right)^2\right\}+\frac{d^2V}{dy'^2}\left\{\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2\right\}=$$
$$=\left(\frac{d^2V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}\right)\left(\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dy}-\frac{dx'}{dy}\frac{dy'}{dx}\right),$$

откуда

$$\iint\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\right)dx\,dy=\iint\left(\frac{d^2V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}\right)\left(\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dy}-\frac{dx'}{dy}\frac{dy'}{dx}\right)dx\,dy=$$
$$=\iint\left(\frac{d^2V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}\right)dx'dy'.$$

Если V — потенциал, то, согласно уравнению Пуассона,

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+4\pi\rho=0,$$

так что $\iint\rho dxdy=\iint\rho' dx'dy'$, т. е. количество электричества в соответствующих участках обеих систем одинаково, если координаты одной системы являются сопряженными функциями координат другой системы.

Дополнительные теоремы о сопряженных функциях

187. Теорема IV. *Если x_1 и y_1, а также x_2 и y_2 являются сопряженными функциями от x и y, а* $X=x_1x_2-y_1y_2$ и $Y=x_1y_2+x_2y_1$, *то X и Y — сопряженные функции от x и y.*

Действительно,

$X+\sqrt{-1}Y=(x_1+\sqrt{-1}y_1)(x_2+\sqrt{-1}y_2)$.

Теорема V. *Если φ — решение уравнения*

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=0,\quad а\quad 2R=\ln\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right\}\quad и\quad \Theta=-\operatorname{arctg}\frac{d\varphi/dx}{d\varphi/dy},$$

то R и Θ — сопряженные функции от x и y.

Действительно, R и Θ — сопряженные функции от $d\varphi/dy$ и $d\varphi/dx$, а последние являются сопряженными функциями от x и y.

Пример I. *Инверсия.*

188. В качестве примера общего метода преобразования возьмем случай инверсии в двух измерениях.

Пусть O — фиксированная точка в плоскости, OA — фиксированное направление, $r=OP=ae^{\rho}$, $\theta=AOP$, x и y — прямоугольные координаты точки P относительно O. Тогда

$$\begin{aligned}\rho&=\ln\left[\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)/a\right], &\quad \theta&=\operatorname{arctg}(y/x),\\ x&=ae^{\rho}\cos\theta, & y&=ae^{\rho}\sin\theta,\end{aligned}\tag{5}$$

так что ρ и θ являются сопряженными функциями от x и y.

Если $\rho'=n\rho$ и $\theta'=n\theta$, то ρ' и θ' будут сопряженными функциями от ρ и θ. При $n=-1$

$$r'=a^2/r\ \text{и}\ \theta'=-\theta,\tag{6}$$

т. е. мы имеем дело с обычной инверсией в сочетании с поворотом на 180° от направления OA.

Инверсия в двух измерениях

Пусть в этом случае r и r' представляют собой расстояния соответствующих точек от O, e и e' — полную электризацию тела, S и S' — элементы поверхности, V и V' — элементы объема, σ и σ' — поверхностные плотности, ρ и ρ' — объемные плотности, φ и φ' — соответствующие потенциалы. Тогда

$$\frac{r'}{r}=\frac{S'}{S}=\frac{a^2}{r^2}=\frac{r'^2}{a^2},\quad \frac{V'}{V}=\frac{a^4}{r^4}=\frac{r'^4}{a^4},\quad \frac{e'}{e}=1,\quad \frac{\sigma'}{\sigma}=\frac{r^2}{a^2}=\frac{a^2}{r'^2},\quad \frac{\rho'}{\rho}=\frac{r^4}{a^4}=\frac{a^4}{r'^4},\tag{7}$$

и, поскольку, по предположению, φ' получается из φ выражением старых переменных через новые,

$$\varphi'/\varphi=1. \tag{7'}$$

Пример II. *Электрические изображения в двух измерениях*

189. Пусть A — центр окружности радиуса $AQ=b$ [рис. 17], находящейся при нулевом потенциале, а E — заряд в точке A. Тогда потенциал в точке P равен

$$\varphi=2E\ln(b/AP), \tag{8}$$

и если окружность представляет собой сечение полого проводящего цилиндра, то поверхностная плотность в произвольной точке Q равна $-E/(2\pi b)$.

Произведем инверсию этой системы относительно точки O, приняв $AO=mb$, $a^2=(m^2-1)b^2$. Тогда окружность инвертируется сама в себя и мы получаем заряд в A', равный заряду A, причем $AA'=(b/m)$.

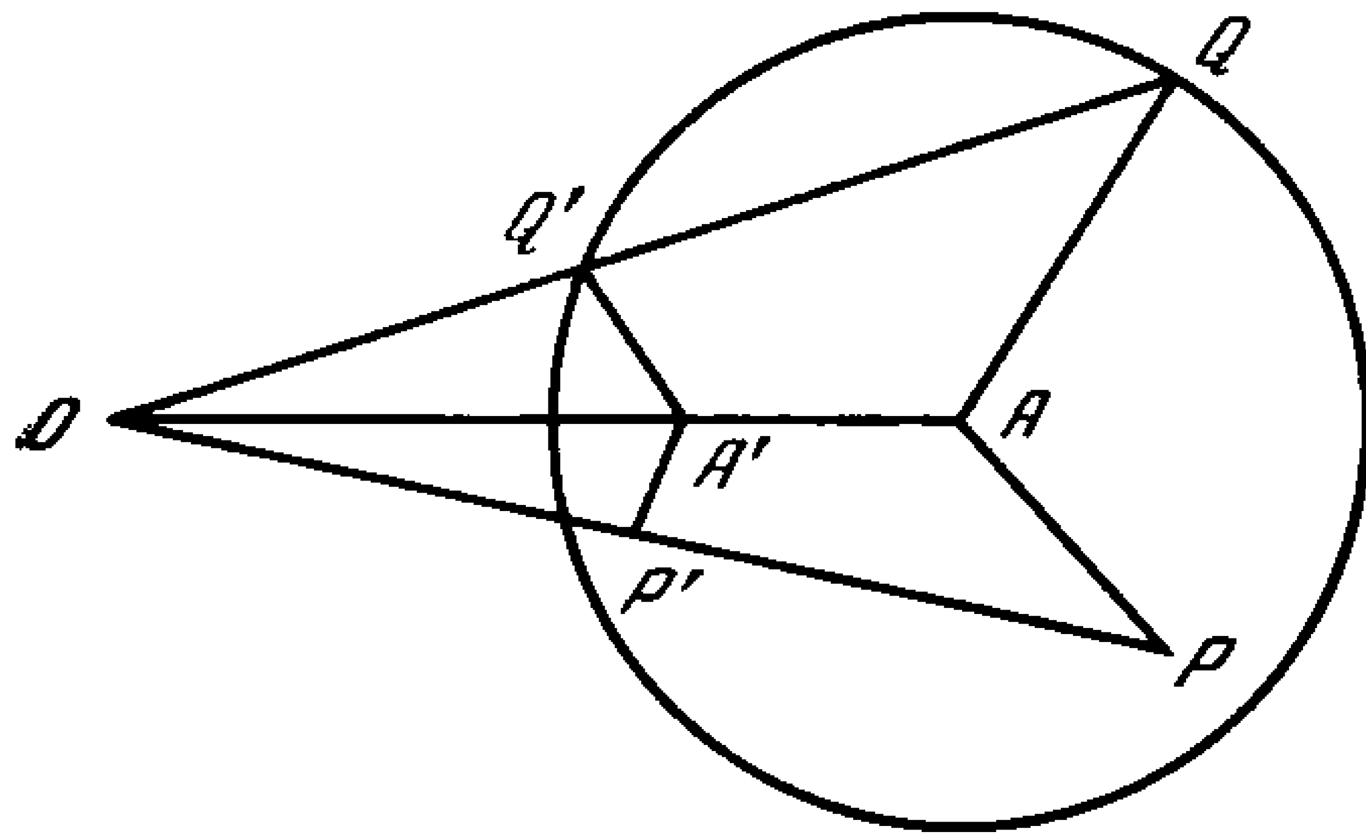


Рис. 17

Плотность в точке Q' равна $-\frac{E}{2\pi b}\frac{b^2-AA'^2}{A'Q'^2}$, а потенциал в произвольной точке P' внутри окружности равен

$$\varphi'=\varphi=2E(\ln b-\ln AP)= \\ =2E(\ln OP'-\ln A'P'-\ln m). \tag{9}$$

Этот потенциал эквивалентен потенциалу, возникающему от комбинации заряда E в точке A' и заряда $-E$ в точке O, являющейся изображением точки A' по отношению к окружности. Таким образом, заряд изображения в точке O равен и противоположен заряду в точке A'.

Если точка P' определена своими полярными координатами, отнесенными к центру окружности, то, положив $\rho=\ln r-\ln b$, $\rho_0=\ln AA'-\ln b$, получим

$$AP'=be^{\rho},\qquad AA'=be^{\rho_0},\qquad AO=be^{-\rho_0}, \tag{10}$$

и потенциал в точке (ρ, θ) равен

$$\varphi=E\ln(e^{-2\rho_0}-2e^{-\rho_0}e^{\rho}\cos\theta+e^{2\rho})-E\ln(e^{2\rho_0}-2e^{\rho_0}e^{\rho}\cos\theta+e^{2\rho})+2E\rho_0. \tag{11}$$

Это потенциал в точке (ρ, θ), обязанный заряду E, помещенному в точку $(\rho_0, 0)$, причем $\varphi=0$, когда $\rho=0$.

В этом случае ρ и θ — сопряженные функции в уравнении (5): ρ — логарифм отношения радиус-вектора точки к радиусу окружности, а θ — угол.

Центр является единственной особой точкой в этой системе координат, так что линейный интеграл $\int(d\theta/ds)ds$ по замкнутой кривой равен 2π или 0 в зависимости от того, охватывает кривая центр или не охватывает.

Пример III. *Преобразование Нейманна для этого случая*[1]

190. Пусть теперь α и β — любые сопряженные функции от x и y, такие, что кривые (α) являются эквипотенциальными кривыми, а кривые (β) — силовыми линиями, обусловленными зарядом с линейной плотностью в половину единицы заряда, расположенным в начале координат, и заряженной системой, расположенной произвольным образом на некотором расстоянии от начала координат.

Предположим, что кривая, для которой потенциал равен α_0, является замкнутой, причем ни одна часть заряженной системы не расположена внутри нее, за исключением половины единичного заряда в начале координат.

Тогда все кривые (α), расположенные между этой кривой и началом координат, будут замкнутыми кривыми, охватывающими начало координат, а все кривые (β) встречаются в начале координат и перпендикулярны кривым (α).

Координаты произвольной точки внутри кривой (α_0) определяются значениями α и β в этой точке, причем при перемещении точки вдоль одной из кривых (α) в положительном направлении значение β увеличивается на 2π при полном обходе кривой.

Предположим теперь, что кривая (α_0) является сечением внутренней поверхности полого цилиндра произвольной формы, поддерживаемого при нулевом потенциале и находящегося под влиянием заряда с линейной плотностью E, расположенного на прямой, представляемой началом координат. При этом внешнюю заряженную систему можно не учитывать, потенциал в произвольной точке (α) внутри кривой равен

$$\varphi=2E\,(\alpha-\alpha_0), \tag{12}$$

а количество электричества на любом отрезке кривой α_0, ограниченной точками соответствующими β_1 и β_2, равно

$$Q=E\,(\beta_1-\beta_2)/2\pi. \tag{13}$$

Если мы таким образом или как-нибудь иначе определили распределение потенциала для кривой данной формы с зарядом, расположенным в данной точке, принятой за начало координат, то мы можем перейти к случаю, когда заряд расположен в любой другой точке внутри кривой, применив общий метод преобразования.

Пусть значения α и β для точки, в которой помещен заряд, равны α_1 и β_1. Подставляя в уравнение (11) $\alpha-\alpha_0$ вместо ρ, $\alpha_1-\alpha_0$ вместо ρ_0 (поскольку оба выражения обращаются в нуль на поверхности $\alpha=\alpha_0$) и $\beta-\beta_1$ вместо θ, получим для потенциала в произвольной точке с координатами α и β

$$\begin{aligned}\varphi = E\ln\left(1-2e^{\alpha+\alpha_1-2\alpha_0}\cos(\beta-\beta_1)+e^{2(\alpha+\alpha_1-2\alpha_0)}\right)-\\ -E\ln\left(1-2e^{\alpha-\alpha_1}\cos(\beta-\beta_1)+e^{2(\alpha-\alpha_1)}\right)-2E\,(\alpha_1-\alpha_0).\end{aligned} \tag{14}$$

Это выражение для потенциала обращается в нуль при $\alpha=\alpha_0$, конечно и непрерывно внутри кривой α_0, за исключением точки (α_1, β_1), в которой второе слагаемое обращается в бесконечность, причем в окрестности этой точки это слагаемое в пределе равно $-2E\ln r'$, где r' — расстояние от этой точки.

---

[1] См. Crelle's *Journal*, LIX, p. 335, 1861, а также Schwarz Crelle, LXXIV, p. 218, 1872.

Таким образом, мы нашли способ нахождения решения задачи Грина для заряда, находящегося в любой точке внутри замкнутой кривой, если известно решение для какой-либо другой точки.

Заряд на элементе кривой α_0 между точками β и $\beta+d\beta$, наводимый зарядом E, помещенным в точку (α_1, β_1), равен в обозначениях п. 183 $-\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{ds_1}ds_2$, где ds_1 отсчитывается внутрь, а α после дифференцирования полагается равным α_0. Согласно (4) из п. 183, это равно $\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{d\alpha}d\beta$, $(\alpha=\alpha_0)$; т. е.

$$-\frac{E}{2\pi}\frac{1-e^{2(\alpha_1-\alpha_0)}}{1-2e^{(\alpha_1-\alpha_0)}\cos(\beta-\beta_1)+e^{2(\alpha_1-\alpha_0)}}d\beta. \qquad (15)$$

Это выражение позволяет найти потенциал в произвольной точке (α_1, β_1) внутри замкнутой кривой, если в каждой точке этой кривой потенциал задан как функция β при условии, что внутри замкнутой кривой нет зарядов.

Действительно, согласно п. 86, часть потенциала в точке (α_1, β_1), обусловленная наличием потенциала V на участке $d\beta$ замкнутой кривой, равна nV, где n — заряд, наводимый на $d\beta$ единичным зарядом в (α_1, β_1). Таким образом, если V — потенциал в точке замкнутой кривой, заданный как функция β, а φ — потенциал в точке (α_1, β_1) внутри замкнутой кривой, не содержащей внутри зарядов, то

$$\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-e^{2(\alpha_1-\alpha_0)}\right)V\,d\beta}{1-2e^{(\alpha_1-\alpha_0)}\cos(\beta-\beta_1)+e^{2(\alpha_1-\alpha_0)}}. \qquad (16)$$

Пример IV. *Распределение электричества у ребра проводника, образуемого двумя плоскими гранями*

191. В случае, когда границей проводника является бесконечная плоскость $y=0$, проводник расположен со стороны отрицательных y и поверхностная плотность заряда равна σ_0, потенциал на расстоянии y от плоскости равен $V=C-4\pi\sigma_0 y$, где C — значение потенциала на самом проводнике.

Примем некоторую прямую, лежащую в плоскости, за полярную ось и преобразуем это выражение к полярным координатам. Тогда потенциал представится в виде $V=C-4\pi\sigma_0 e^{\rho}\sin\theta$, а количество электричества на параллелограмме единичной ширины и длины ae^{ρ}, измеряемой вдоль оси, будет равно $E=\sigma_0 ae^{\rho}$.

Положим теперь $\rho=n\rho'$ и $\theta=n\theta'$. Поскольку ρ' и θ' сопряжены ρ и θ, уравнения

$$V=C-4\pi\sigma_0 ae^{n\rho'}\sin n\theta' \quad \text{и} \quad E=\sigma_0 ae^{n\rho'}.$$

дают возможное распределение потенциала и заряда.

Заменим $ae^{\rho'}$ на r, где r — расстояние от оси, и переобозначим угол θ' через θ. Тогда получим

$$V=C-4\pi\sigma_0\frac{r^n}{a^{n-1}}\sin n\theta, \qquad E=\sigma_0\frac{r^n}{a^{n-1}}.$$

V равно C при $n\theta$ равном π или кратном π.

Пусть ребро представляет собой выступающий угол проводника с раствором α между гранями, тогда угол области диэлектрика равен $2\pi-\alpha$, так что при $\theta=2\pi-\alpha$ точка находится на второй грани проводника.

Поэтому мы должны положить $n(2\pi-\alpha)=\pi$ или $n=\pi/(2\pi-\alpha)$. Тогда

$$V=C-4\pi\sigma_0 a (r/a)^{\pi/(2\pi-\alpha)}\sin\frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha},\qquad E=\sigma_0 a (r/a)^{\pi/(2\pi-\alpha)}.$$

Поверхностная плотность σ на произвольном расстоянии r от ребра равна

$$\sigma=\frac{dE}{dr}=\frac{\pi}{2\pi-\alpha}\sigma_0 (r/a)^{(\alpha-\pi)/(2\pi-\alpha)}.$$

Если угол выступающий, то α меньше π и плотность заряда меняется обратно пропорционально некоторой степени расстояния от ребра, так что на самом ребре плотность становится бесконечной, хотя полный заряд на любом конечном расстоянии от ребра всегда конечен.

Так, при $\alpha=0$ ребро бесконечно острое, как край математической плоскости. В этом случае плотность меняется обратно пропорционально квадратному корню из расстояния от края.

При $\alpha=\pi/3$ ребро такое, как у равносторонней призмы, а плотность меняется обратно расстоянию в степени 2/5.

При $\alpha=\pi/2$ угол у ребра прямой, а плотность обратно пропорциональна корню кубическому из расстояния.

При $\alpha=2\pi/3$ ребро подобно ребру правильной шестигранной призмы, а плотность обратно пропорциональна корню четвертой степени из расстояния.

При $\alpha=\pi$ ребро исчезает и плотность постоянна.

При $\alpha=4\pi/3$ угол у ребра равен внешнему углу шестигранной призмы, а плотность *прямо* пропорциональна корню четвертой степени из расстояния от ребра.

При $\alpha=3\pi/2$ ребро представляет собой входящий прямой угол, а плотность прямо пропорциональна расстоянию от ребра.

При $\alpha=5\pi/3$ у ребра входящий угол 60°, а плотность пропорциональна квадрату, расстояния от ребра.

В действительности, во всех случаях, когда плотность становится бесконечной в какой-либо точке, имеет место электрический разряд в диэлектрик в этой точке, как было пояснено в п. 55.

Пример V. *Эллипсы и гиперболы*. Рис. X

192. Мы знаем, что, если положить

$$x_1=e^{\varphi}\cos\psi,\qquad y_1=e^{\varphi}\sin\psi, \tag{1}$$

то x_1 и y_1 будут сопряженными функциями от φ и ψ. Точно так же, если

$$x_2=e^{-\varphi}\cos\psi,\qquad y_2=e^{-\varphi}\sin\psi, \tag{2}$$

то x_2 и y_2 будут также сопряженными функциями от φ и ψ. Следовательно, если положить

$$2x=x_1+x_2=(e^{\varphi}+e^{-\varphi})\cos\psi,\qquad 2y=y_1+y_2=(e^{\varphi}+e^{-\varphi})\sin\psi, \tag{3}$$

то x и y также будут сопряженными функциями от φ и ψ. В этом случае точки с постоянным φ лежат на эллипсе с осями $e^{\varphi}+e^{-\varphi}$ и $e^{\varphi}-e^{-\varphi}$. Точки, для которых постоянно ψ, лежат на гиперболе с осями $2\cos\psi$ и $2\sin\psi$. На оси x между $x=-1$ и $x=+1$ имеем

$$\varphi=0, \qquad \psi=\arccos x. \tag{4}$$

Вне этих пределов с обеих сторон на оси

$$\begin{aligned} x>1, \qquad &\psi=2n\pi, \qquad \varphi=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\\ x<-1, \qquad &\psi=(2n+1)\pi, \qquad \varphi=\ln\left(\sqrt{x^2-1}-x\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, считая φ потенциальной функцией, а ψ — функцией потока, мы приходим к случаю потока электричества с положительной стороны оси x на отрицательную через промежуток между точками -1 и $+1$, причем участки оси вне этих пределов непроницаемы для электричества.

Поскольку ось y в этом случае является линией потока, мы можем ее также считать непроницаемой для электричества.

Мы можем рассматривать также эллипсы как сечения эквипотенциальных поверхностей для бесконечно длинного плоского проводника ширины 2, заряженного половиной единицы электричества на единицу длины. (Учитывается заряд с обеих сторон плоского проводника.)

Если считать ψ потенциальной функцией, а φ — функцией потока, то мы приходим к случаю бесконечной плоскости, в которой вырезана полоса шириной 2 и у которой одна сторона заряжена до потенциала π, а вторая остается под нулевым потенциалом.

Эти задачи можно считать частными случаями поверхностей второго порядка, рассмотренных в главе X. Форма кривых показана на рис. X [в конце книги].

Пример VI. Рис. XI

193. Пусть теперь x' и y' — функции от x и y, причем

$$x'=b\ln\sqrt{x^2+y^2}, \qquad y'=b\,\mathrm{arctg}\,(y/x). \tag{6}$$

Тогда x' и y' будут также сопряженными функциями от φ и ψ, определенных в п. 192. Кривые, получающиеся при преобразовании рис. X к новым координатам, приведены на рис. XI.

Если x' и y' — прямоугольные координаты, то свойства оси x на первой фигуре переносятся на последовательность кривых, параллельных x', на второй фигуре, для которых $y'=bn'\pi$, где n' — произвольное целое число. Положительные значения x' на этих кривых будут соответствовать значениям x, большим единицы, для которых, как мы уже видели,

$$\psi=n\pi, \quad \varphi=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\ln\left(e^{x'/b}+\sqrt{e^{(2x'/b)}-1}\right). \tag{7}$$

Отрицательные значения x' на тех же кривых будут соответствовать значениям x, меньшим единицы, для которых, как мы видели,

$$\varphi=0, \qquad \psi=\arccos x=\arccos e^{(x'/b)}. \tag{8}$$

Свойства оси y на первой фигуре переносятся на последовательность кривых на второй фигуре, параллельных x', для которых

$$y' = b\pi[n' + (1/2)]. \qquad (9)$$

На этих кривых $\psi = \pi[n + (1/2)]$ для всех точек, как положительных, так и отрицательных, а

$$\varphi = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \ln\left(e^{(x'/b)} + \sqrt{e^{(2x'/b)}+1}\right). \qquad (10)$$

Кривые, для которых φ и ψ — постоянны, можно усмотреть непосредственно из уравнений

$$x' = \frac{1}{2} b \ln \frac{1}{4}\left(e^{2\varphi} + e^{-2\varphi} + 2\cos 2\psi\right), \qquad y' = b \operatorname{arctg}\left(\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \operatorname{tg}\psi\right).$$

Поскольку фигура повторяется через интервалы πb по y', достаточно рассмотреть кривые для одного такого интервала.

Следует различать два случая, в зависимости от того, какая из двух функций, φ или ψ, меняет знак вместе с y'. Предположим, что знак меняет функция φ. Тогда любая кривая, для которой ψ постоянно, будет симметрична относительно оси x' и ортогонально пересекать эту ось в некоторой точке отрицательной полуоси x'. Если начать с этой точки, для которой $\varphi = 0$, и постепенно увеличивать φ, то кривая будет постепенно изгибаться от первоначально ортогонального к оси до почти параллельного (при больших φ) направления. Положительная полуось x' принадлежит к системе $\psi = \text{const}$, а именно ψ на ней равно нулю, а при $y' = \pm\pi b/2$ $\psi = \pi/2$. Таким образом, кривые, для которых ψ имеет постоянное значение между 0 и $\pi/2$, образуют систему кривых, охватывающих положительную полуось x'.

Кривые, для которых φ постоянно, пересекают ортогонально систему кривых ψ, причем значения φ лежат в пределах от $+\infty$ до $-\infty$. Для любой кривой φ, построенной выше оси x', значение φ положительно, вдоль отрицательной полуоси x' значение φ равно нулю, а для любой кривой ниже оси x' значение φ отрицательно.

Мы видели, что система ψ симметрична относительно оси x'. Пусть PQR — любая кривая, ортогонально пересекающая эту систему и оканчивающаяся в точках P и R на линиях $y' = \pm\pi b/2$, причем точка Q лежит на оси x'. Тогда кривая PQR симметрична относительно оси x', но если c —значение φ вдоль PQ, то значение φ вдоль QR равно $-c$. В случае, рассматриваемом в п. 195, эта разрывность в значениях φ объясняется распределением электрического заряда.

Если же считать, что не φ, а ψ меняет свой знак вместе с y', то значение φ будет меняться от 0 до ∞. При $\varphi = 0$ мы имеем отрицательную полуось x', при $\varphi = \infty$ — бесконечно удаленную прямую, перпендикулярную к оси x'. Вдоль любой кривой PQR, расположенной между этими двумя кривыми, пересекающей ортогонально ψ-систему, значение φ постоянно по всей длине и положительно.

Значения ψ испытывают теперь скачок в точке, где кривая постоянного значения ψ пересекает отрицательную полуось x', знак ψ при этом меняется. Значение этой разрывности ψ станет ясно в п. 197.

Кривые, построение которых здесь описано, приведены на рис. XI. При этом следует ограничиться двумя третями графика, отбросив верхнюю треть.

194. Если считать φ потенциальной функцией, а ψ — функцией потока, то мы приходим к случаю бесконечно длинной металлической полосы шириной πb

с непроводящей прокладкой, неограниченно простирающейся от начала координат в положительном направлении и, таким образом, разделяющей положительную часть полосы на две отдельных части. Мы можем представлять себе эту прокладку как узкую щель в металлическом листе.

Если электрический ток течет вдоль одной стороны этой прокладки и обратно вдоль другой, причем вход и выход тока находятся на бесконечном расстоянии на положительной полуоси, то распределение потенциала и тока дается соответственно функциями φ и ψ.

Если, наоборот, считать ψ потенциалом, а φ — функцией потока, то мы придем к случаю тока, протекающего в общем направлении вдоль y' по листу, в котором помещен ряд непроводящих прокладок, параллельных x' и простирающихся от оси y' до бесконечности в отрицательном направлении.

195. Полученные результаты можно также применить к двум важным случаям статического электричества.

(1) Пусть проводник в виде плоского листа, ограниченного прямолинейным краем с одной стороны и неограниченного с другой стороны, помещен в плоскости xz с положительной стороны от начала координат и пусть параллельно ему по обе стороны на расстоянии $\pi b/2$ помещены две бесконечные проводящие плоскости. Тогда потенциальная функция ψ равна 0 на среднем проводнике и равна $\pi/2$ на обеих плоскостях.

Рассмотрим количество электричества на части среднего проводника, простирающейся вдоль z на расстояние 1, а вдоль x' — от начала координат до $x'=a$.

Количество электричества на части этой полосы, простирающейся от x'_1 до x'_2, равно $(\varphi_2-\varphi_1)/4\pi$, следовательно, количество электричества от начала координат до $x'=a$ на одной стороне средней пластины равно

$$E=\frac{1}{4\pi}\ln\left(e^{a/b}+\sqrt{e^{(2a/b)}-1}\right). \tag{11}$$

Если a много больше b, то

$$E=\frac{1}{4\pi}\ln\left(2e^{(a/b)}\right)=\frac{a+b\ln 2}{4\pi b}. \tag{12}$$

Таким образом, количество электричества на пластине, ограниченной прямолинейным краем, больше, чем оно было бы при равномерном распределении с плотностью, равной плотности вдали от границы, и равно количеству электричества, равномерно распределенному с той же плотностью по пластине, ширина которой увеличена на $b\ln 2$ за пределы ее фактической границы.

Это воображаемое однородное распределение указано пунктирными прямыми на рис. XI. Вертикальные прямые изображают силовые линии, а горизонтальные — эквипотенциальные поверхности в предположении однородной плотности в обеих плоскостях, продолженных до бесконечности во всех направлениях.

196. Иногда конденсаторы представляют собой пластину, помещенную посредине между двумя параллельными пластинами, простирающимися значительно дальше, чем промежуточная пластина. Если радиус кривизны границы промежуточной пластины много больше расстояния между пластинами, эту границу можно считать прямолинейной и при расчете емкости конденсатора принять, что площадь промежуточной пластины увеличена на полосу постоянной ширины вдоль

всей границы, а поверхностная плотность на этой увеличенной пластине та же, что на участках первоначальной пластины, удаленных от границы.

Таким образом, если S — истинная площадь пластины, L — ее периметр, а B — расстояние между большими пластинами, то

$$b=B/\pi \tag{13}$$

и ширина дополнительной полоски равна

$$\alpha=(B\cdot\ln 2)/\pi, \tag{14}$$

так что площадь увеличенной пластины равна

$$S'=S+(BL\cdot\ln 2)/\pi, \tag{15}$$

а емкость одной стороны средней пластины равна

$$\frac{1}{2\pi}\frac{S'}{B}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{S}{B}+L\frac{1}{\pi}\ln 2\right\}. \tag{16}$$

Поправки на толщину пластины

Поскольку толщиной средней пластины в общем случае нельзя пренебречь по сравнению с расстоянием между пластинами, можно получить лучшее описание этого случая, приняв сечение промежуточной пластины соответствующим кривой $\psi=\psi'$.

При этом пластина будет иметь почти постоянную толщину $\beta=2b\psi'$ вдали от границы и закругление у края.

Истинное положение края пластины можно найти, положив $y'=0$, откуда

$$x'=b\ln\cos\psi'. \tag{17}$$

Значение φ на этом краю равно 0, а в точке, для которой $x'=a$ (a/b велико), оно приблизительно равно $(a+b\ln 2)/b$.

Таким образом, общее количество электричества на пластине таково, как если бы к ней добавлялась полоса шириной

$$\frac{B}{\pi}\left(\ln 2+\ln\cos\frac{\pi\beta}{2B}\right),\ \text{т. е.}\ \frac{B}{\pi}\ln\left(2\cos\frac{\pi\beta}{2B}\right), \tag{18}$$

а плотность была бы всюду постоянной и равной плотности вдали от границы.

Плотность у края

Поверхностная плотность в любой точке пластины равна

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dx'}=\frac{1}{4\pi b}\frac{e^{x'/b}}{\sqrt{e^{2x'/b}-1}}=\frac{1}{4\pi b}\left(1+\frac{1}{2}e^{-2x'/b}+\frac{3}{8}e^{-4x'/b}+\ldots\right). \tag{19}$$

Величина в скобках быстро приближается к единице с ростом x', так что на расстоянии от границы, превышающем в n раз ширину полосы α, истинная плотность превышает нормальную примерно на $1/2^{2n+1}$ от нормальной плотности.

Аналогично можно найти плотность на бесконечных пластинах

$$=\frac{1}{4\pi b}\frac{e^{x'/b}}{\sqrt{e^{2x'/b}+1}}. \qquad (20)$$

При $x'=0$ плотность составляет $2^{-1/2}$ от нормальной плотности.

В сторону положительных x' на расстоянии от границы, превышающем в n раз ширину граничной полосы, плотность меньше нормальной примерно на $1/2^{2n+1}$ от нормальной плотности. На таком же расстоянии в сторону отрицательных x' плотность составляет примерно $1/2^n$ от нормальной плотности.

Эти результаты позволяют судить о степени точности, на которую можно рассчитывать при применении этих методов к пластинам ограниченных размеров или при наличии нерегулярностей недалеко от границы. Такое же распределение имело бы место и в случае бесконечной последовательности одинаковых пластин на равных расстояниях друг от друга, потенциалы которых попеременно равны $+V$ и $-V$. В этом случае расстояние между пластинами следует принять равным B.

197. (2) Второй случай, который мы рассмотрим,— это случай бесконечной совокупности плоскостей параллельных $x'z$, отстоящих друг от друга на расстояние $B=\pi b$ и ограничиваемых плоскостью $y'z$, так что они расположены лишь с отрицательной стороны от этой плоскости. Если считать φ потенциальной функцией, то эти плоскости можно рассматривать как проводники под нулевым потенциалом.

Рассмотрим кривые постоянного φ.

При $y'=n\pi b$, т. е. на продолжении каждой плоскости,

$$x'=b\ \ln\left[(e^{\varphi}+e^{-\varphi})/2\right]. \qquad (21)$$

При $y'=[n+(1/2)]\pi b$, т. е. в промежуточных положениях,

$$x'=b\ \ln\left[(e^{\varphi}-e^{-\varphi})/2\right]. \qquad (22)$$

Таким образом, при больших φ кривая постоянного φ имеет волнообразный характер.

Среднее ее расстояние от оси y' приблизительно равно

$$a=b\ (\varphi-\ln 2), \qquad (23)$$

а амплитуда колебаний по обе стороны от этой прямой равна

$$\frac{1}{2}b\ln\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}. \qquad (24)$$

При больших φ эта величина стремится к $be^{-2\varphi}$, так что кривая приближается к прямой линии, параллельной оси y' и находящейся на расстоянии a от этой оси с положительной стороны.

Если принять, что плоскость $x'=a$ поддерживается под постоянным потенциалом, а система параллельных плоскостей — под другим потенциалом, то, поскольку $b\varphi=a+b\ln 2$, поверхностная плотность электричества, наведенного на плоскости, такая же, как при помещении плоскости, параллельной данной, при потенциале, равном потенциалу последовательности плоскостей, на расстоянии, превышающем расстояние до краев плоскостей на $b\ln 2$.

Если B — расстояние между двумя плоскостями бесконечной последовательности, $B=\pi b$, то дополнительное расстояние равно

$$\alpha=(B \ln 2)/\pi. \tag{25}$$

198. Рассмотрим теперь объем, заключенный между двумя эквипотенциальными поверхностями, одна из которых состоит из последовательности параллельных волн, а вторая соответствует большим значениям φ и может приближенно считаться плоской.

Если D — глубина этих колебаний, измеряемая от вершины до впадины каждой волны, то для соответствующего значения φ получим

$$\varphi=\frac{1}{2}\ln\frac{e^{D/b}+1}{e^{D/b}-1}. \tag{26}$$

Значение x' в вершине волны равно

$$b \ln [(e^{\varphi}+e^{-\varphi})/2]. \tag{27}$$

Таким образом [2], если A — расстояние от вершин волн до противолежащей плоскости, то емкость системы, состоящей из плоской поверхности, и волнообразной поверхности такая же, как для двух плоскостей, находящихся на расстоянии $A+\alpha'$, где

$$\alpha'=\frac{B}{\pi}\ln\frac{2}{1+e^{-\pi D/B}}. \tag{28}$$

199. Если в проводнике с плоской поверхностью проделана отдельная канавка такой формы, а другой проводник представляет собой плоскую поверхность на расстоянии A, то емкость одного проводника по отношении к другому при этом уменьшается. Уменьшение емкости не превышает $(1/n)$-й части уменьшения, вызываемого n такими рядом расположенными канавками, потому что в последнем случае средняя электрическая сила между проводниками будет меньше, чем в первом, так что индукция на поверхности каждой канавки будет уменьшена за счет соседних канавок.

Пусть L — длина, B — ширина, D — глубина канавки. Емкость участка противостоящей плоскости площади S будет равна

$$\frac{S-LB}{4\pi A}+\frac{LB}{4\pi(A+\alpha')}=\frac{S}{4\pi A}-\frac{LB}{4\pi A}\frac{\alpha'}{A+\alpha'}. \tag{29}$$

При A много больше B или α' поправка, согласно (28), принимает вид

$$\frac{L}{4\pi^2}\frac{B^2}{A^2}\ln\frac{2}{1+e^{-\pi D/B}}, \tag{30}$$

---

[2] Пусть Φ — потенциал плоскости, а φ — потенциал волнообразной поверхности. Количество электричества на плоскости, приходящееся на единицу площади, равно $1/4\,\pi b$. Следовательно, емкость

$=1/4\,\pi b(\Phi-\varphi)$, $\quad =1/4\pi(A+\alpha')$ (по предположению).

Таким образом, $A+\alpha'=b(\Phi-\varphi)$. Но $A+b\ln[(e^{\varphi}+e^{-\varphi})/2]=b(\Phi-\ln 2)$. Следовательно, $\alpha'=-b\varphi+b(\ln 2+\ln{}^1/_2(e^{\varphi}+e^{-\varphi}))=b\ln(1+e^{-2\varphi})=b\ln[2/(1+e^{-D/b})]/$, согласно (26).

а для щели бесконечной глубины, полагая $D=\infty$, получим

$$\frac{L}{4\pi^2}\frac{B^2}{A^2}\ln 2. \tag{31}$$

Чтобы найти поверхностную плотность на семействе параллельных пластин, нужно определить $\sigma=\frac{1}{4\pi}\frac{d\psi}{dx'}$ при $\varphi=0$. Расчет дает

$$\sigma=\frac{1}{4\pi b}\frac{1}{\sqrt{e^{-2x'/b}-1}}. \tag{32}$$

Средняя плотность на плоской пластине, находящейся на расстоянии A от краев семейства пластин, равна $\bar{\sigma}=1/4\pi b$. Следовательно, на расстоянии $n\alpha$ от края каждой пластины поверхностная плотность равна $(2^{2n}-1)^{-1/2}$ от этой средней плотности.

200. Попытаемся теперь вывести из наших результатов распределение электричества в конфигурации в виде семейства коаксиальных цилиндров перед плоскостью, образуемой вращением двумерной системы из п. 197 вокруг оси $y'=-R$. В этом случае уравнение Пуассона примет вид

$$\frac{d^1V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}+\frac{1}{R+y'}\frac{dV}{dy'}+4\pi\rho=0. \tag{33}$$

Примем, что V равно функции φ из п. 193, и определим значение ρ из этого уравнения. Мы знаем, что первые два члена сократятся, так что

$$\rho=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R+y'}\frac{d\varphi}{dy'}. \tag{34}$$

Если предположить, что, кроме уже рассмотренной ранее поверхностной плотности, имеет место объемное распределение электричества по установленному выше закону, то распределение потенциала будет даваться кривыми на рис. XI.

Но из рис. XI видно, что $d\varphi/dy'$ очень мало́, за исключением областей вблизи границ пластин, так что это новое распределение можно приблизительно представить некоторым поверхностным распределением электричества у краев пластин.

Если, следовательно, вычислить интеграл $\int\rho dx'dy'$ от $y'=0$ до $y'=\pi b/2$ и от $x'=-\infty$ до $x'=+\infty$, то можно найти полный дополнительный заряд на одной стороне пластин, обусловленный кривизной.

Поскольку $\frac{d\varphi}{dy'}=-\frac{d\psi}{dx'}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho\,dx'=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R+y'}\frac{d\psi}{dx'}dx'=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R+y'}(\psi_\infty-\psi_{-\infty})=\frac{1}{8}\frac{1}{R+y'}\left(2\frac{y'}{B}-1\right). \tag{35}$$

Интегрируя по y', получим

$$\int_0^{B/2}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\,dx'\,dy' = \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\frac{2R+B}{B}\ln\frac{2R+B}{2R}, \tag{36}$$

$$= -\frac{1}{32}\frac{B}{R}+\frac{1}{192}\frac{B^2}{R^2}+\ldots . \tag{37}$$

Это выражение дает половину полного количества электричества, приходящегося на единицу длины, которое мы должны считать распределенным в пространстве вблизи края одного из цилиндров. Поскольку эта объемная плотность заметна лишь вблизи края пластины, мы можем считать все электричество сосредоточенным на поверхности пластины, не изменив при этом заметным образом его воздействие на противолежащую плоскую поверхность. При расчете притяжения этой поверхности к цилиндрической поверхности мы можем считать это электричество расположенным на цилиндрической поверхности.

Если бы никакой кривизны не было, то избыточный заряд на положительной стороне пластины, приходящийся на единицу длины, был бы равен

$$-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dy'}\,dx' = \frac{1}{4\pi}(\psi_0-\psi_{-\infty}) = -\frac{1}{8}.$$

Следовательно, при добавлении сюда полного найденного выше распределения этот заряд следует умножить на множитель $1+(B/2R)$, чтобы получить полный заряд на положительной стороне.

Для диска радиуса R, помещенного между двумя параллельными плоскостями на расстоянии B, мы получим следующее выражение для емкости диска:

$$\frac{R^2}{B}+2\frac{\ln 2}{\pi}R+\frac{1}{2}B. \tag{38}$$

Теория томсоновского защитного кольца

201. В некоторых электрометрах Сэра У. Томсона большая плоская поверхность (большой диск) поддерживается под некоторым потенциалом, а на расстоянии A от этой поверхности помещен плоский диск радиуса R, окруженный большой плоской пластиной, называемой Защитным кольцом, в которой имеется круглое отверстие радиуса R', концентрическое диску. Этот диск и пластина поддерживаются под нулевым потенциалом.

Промежуток между диском и защитной пластиной можно рассматривать как круглую канавку бесконечной глубины и ширины $R'-R$, которую мы обозначим через B.

Заряд на диске, обусловленный единичным потенциалом большого диска, будет в предположении однородной плотности равен $R^2/4A$.

Заряд с одной стороны прямолинейной канавки ширины B, длины $L=2\pi R$ и бесконечной глубины может быть оценен по числу силовых линий, исходящих из большого диска и попадающих на эту сторону канавки. Таким образом, соглас-

но п. 198 и примечанию, заряд равен

$$\frac{1}{2}LB\times\frac{1}{4\pi b},\ \text{т. е.}\ \frac{1}{4}\frac{RB}{A+\alpha'},$$

поскольку в этом случае $\Phi=1$, $\varphi=0$ и, следовательно, $b=A+\alpha'$.

Но так как канавка не прямолинейна, а имеет радиус кривизны R, то полученный результат следует умножить на $1+(B/2R)$.

Следовательно, полный заряд на диске равен

$$\frac{R^2}{4A}+\frac{1}{4}\frac{RB}{A+\alpha'}\left(1+\frac{B}{2R}\right) \quad (39)$$

$$=\frac{R^2+R'^2}{8A}-\frac{R'^2-R^2}{8A}\frac{\alpha'}{A+\alpha'}. \quad (40)$$

Величина α' не может быть больше, чем $(B\ \ln 2)/\pi\approx 0{,}22B$.

Если B мало по сравнению с A или R, то это выражение дает достаточно хорошее приближение для заряда на диске, обусловленного единичной разницей потенциалов. Отношение A к R может быть при этом произвольным, но разность между радиусом большого диска или защитного кольца и радиусом R должна быть в несколько раз больше A.

Пример VII. Рис. XII

202. Гельмгольц в своем мемуаре о разрывном течении жидкости [3] указал на применение некоторых формул, в которых координаты выражены как функции потенциала и сопряженной ему функции.

Одна из его формул может быть применена к случаю заряженной пластины конечных размеров, расположенной параллельно заземленной бесконечной плоской поверхности.

Поскольку $x_1=A\varphi$ и $y_1=A\psi$, а также $x_2=Ae^{\varphi}\cos\psi$ и $y_2=Ae^{\varphi}\sin\psi$ являются сопряженными функциями от φ и ψ, то функции, получающиеся сложением x_1 и x_2, y_1 и y_2, тоже будут сопряженными. Поэтому, если $x=A\varphi+Ae^{\varphi}\cos\psi$, $y=A\psi+Ae^{\varphi}\sin\psi$, то x и y сопряжены по отношению к φ и ψ, а φ и ψ сопряжены по отношению к x и y.

Пусть теперь x и y — прямолинейные координаты, а $k\psi$ — потенциал. Тогда $k\varphi$ сопряжено $k\psi$ (k — постоянная).

Положим $\psi=\pi$, тогда $y=A\pi$, $x=A(\varphi-e^{\varphi})$. При изменении φ от $-\infty$ до 0 и затем от 0 до $+\infty$ x меняется от $-\infty$ до $-A$ и от $-A$ до $-\infty$. Таким образом, эквипотенциальная поверхность, для которой $\psi=\pi$, представляет собой плоскость, параллельную xz, находящуюся на расстоянии $b=\pi A$ от начала координат и простирающуюся от $x=-\infty$ до $x=-A$.

Рассмотрим часть этой плоскости, простирающуюся от $x=-(A+a)$ до $x=-A$ и от $z=0$ до $z=c$, расположенную на расстоянии $y=b=A\pi$ от плоскости xz и находящуюся под потенциалом $V=k\psi=k\pi$.

Электрический заряд на рассмотренной части плоскости может быть найден по значениям φ в крайних ее точках.

[3] *Monatsberichte der Konigl. Akad. der Wissenschaften* zu Berlin, April 23, 1868, p. 215.

Таким образом, нам нужно определить φ из уравнения $x=-(A+a)=A(\varphi-e^{\varphi})$. Для φ получается отрицательное значение φ_1 и положительное значение φ_2. На краю плоскости при $x=-A$, $\varphi=0$. Таким образом, заряд на одной стороне плоскости равен $-ck\varphi_1/4\pi$, а на другой, $ck\varphi_2/4\pi$. Оба эти заряда положительны, и их сумма равна $ck(\varphi_2-\varphi_1)/4\pi$.

Если считать, что a много больше A, то

$$\varphi_1=-\frac{a}{A}-1+e^{-\frac{a}{A}-1+e^{-(a/A)-1+\dots}},$$

$$\varphi_2=\ln\left\{\frac{a}{A}+1+\ln\left(\frac{a}{A}+1+\dots\right)\right\}.$$

Если пренебречь экспоненциальным членом в φ_1, то легко видеть, что заряд на отрицательной поверхности превышает заряд, который был бы при однородной поверхностной плотности, равной ее значению вдали от границы, на величину заряда полосы шириной $A=b/\pi$ с той же однородной поверхностной плотностью.

Полная емкость рассмотренной части плоскости равна

$$C=c(\varphi_2-\varphi_1)/4\pi^2.$$

Полный заряд равен CV, а притяжение к бесконечной плоскости $y=0$ под потенциалом $\psi=0$ равно

$$-\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{db}=V^2\frac{ac}{8\pi^3A^2}\left[1+\frac{A/a}{1+\frac{A}{a}\ln\frac{a}{A}}+e^{-\frac{a}{A}}+\dots\right]=$$

$$=\frac{V^2c}{8\pi b^2}\left\{a+\frac{b}{\pi}-\frac{b^2}{\pi^2a}\ln\frac{a\pi}{b}+\dots\right\}.$$

Эквипотенциальные и силовые линии приведены на рис. XII.

Пример VIII. *Теория решетки из параллельных проволок.* Рис. XIII

203. Во многих электрических приборах применяется проволочная решетка для предохранения некоторых частей прибора от электризации через индукцию. Мы знаем, что если проводник полностью окружен металлическим сосудом, находящимся под тем же потенциалом, что и проводник, то никакое заряженное тело вне сосуда не может навести на поверхности проводника никакого заряда. Однако проводник, полностью окруженный металлом, становится невидимым, и поэтому в некоторых случаях оставляют отверстие, закрываемое решеткой из тонких проволочек. Рассмотрим, как сказывается такая решетка на уменьшении эффекта электрической индукции. Мы примем, что такая решетка состоит из ряда параллельных проволок, расположенных в одной плоскости через равные интервалы. Диаметр проволок будем считать много меньше расстояния между ними, а расстояние от плоскости экрана до ближайших заряженных тел с одной стороны решетки и до защищаемого проводника с другой стороны будем считать существенно больше расстояния между соседними проволочками.

204. Потенциал на расстоянии r' от оси прямой проволоки бесконечной длины с зарядом λ на единицу длины равен

$$V=-2\lambda \ln r'+C. \quad (1)$$

Мы можем записать это выражение в полярных координатах относительно оси, находящейся на единичном расстоянии от проволочки. При этом мы должны положить

$$r'^2=1-2r\cos\theta+r^2. \quad (2)$$

Если принять, что ось отсчета также заряжена с линейной плотностью λ', то

$$V=-\lambda \ln(1-2r\cos\theta+r^2)-2\lambda'\ln r+C. \quad (3)$$

Если положить, что

$$r=e^{(2\pi y)/a}, \qquad \theta=(2\pi x)/a, \quad (4)$$

то, согласно теории сопряженных функций, величина

$$V=-\lambda \ln\left(1-2e^{(2\pi y)/a}\cos(2\pi x/a)+e^{(4\pi y)/a}\right)-2\lambda'\ln e^{(2\pi y)/a}+C \quad (5)$$

(x, y — прямоугольные координаты) будет значением потенциала, обусловленного бесконечным рядом тонких проволочек, параллельных z, расположенных в плоскости xz и проходящих через точки оси x, для которых x кратно a, и плоскостями, перпендикулярными оси y.

Каждая из этих проволочек заряжена с линейной плотностью λ.

Член с λ' указывает на электризацию, вызывающую постоянную силу $4\pi\lambda'/a$ в направлении y.

Форма эквипотенциальных поверхностей и силовых линий при $\lambda'=0$ дана на рис. XIII. Вблизи проволочек эквипотенциальные поверхности имеют почти цилиндрическую форму, так что мы можем считать решение приблизительно верным и в том случае, когда проволочки представляют собой цилиндры, диаметр которых конечен, но мал по сравнению, с расстоянием между ними.

Вдали от проволочек эквипотенциальные поверхности становятся все ближе и ближе к плоскостям, параллельным плоскости решетки.

Если положить в уравнении $y=b_1$, где b_1 много больше a, то приближенно

$$V_1=-(4\pi b_1/a)(\lambda+\lambda')+C. \quad (6)$$

Если далее положить $y=-b_2$, где b_2 положительно и много больше a, то приближенно

$$V_2=(4\pi b_2/a)\lambda'+C. \quad (7)$$

Если c — радиус проволочек решетки, причем c много меньше a, то потенциал самой решетки можно найти, приняв, что поверхность проволочки совпадает с эквипотенциальной поверхностью, пересекающей плоскость xz на расстоянии c от оси z. Поэтому для нахождения потенциала решетки положим $x=c$ и $y=0$, откуда

$$V=-2\lambda \ln[2\sin(\pi c/a)]+C. \quad (8)$$

205. Мы получили теперь выражения, описывающие электрическое состояние системы, состоящей из проволочной решетки с диаметром проволок, много мень-

шим расстояния между ними, и двух проводящих поверхностей по обе стороны от решетки, находящихся на расстояниях, много больших расстояния между проволочками.

Поверхностная плотность σ_1 на первой плоскости находится из уравнения (6):

$$4\pi\sigma_1 = \frac{dV_1}{db_1} = -\frac{4\pi}{a}(\lambda + \lambda'), \tag{9}$$

а на второй плоскости — из уравнения (7):

$$4\pi\sigma_2 = \frac{dV_2}{db_2} = \frac{4\pi}{a}\lambda'. \tag{10}$$

Если положить

$$\alpha = -\frac{a}{2\pi}\ln\left(2\sin\frac{\pi c}{a}\right) \tag{11}$$

и исключить c, λ и λ' из уравнений (6), (7), (8), (9), (10), то получим

$$4\pi\sigma_1\left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}\right) = V_1\left(1 + \frac{b_2}{\alpha}\right) - V_2 - V\frac{b_2}{\alpha}, \tag{12}$$

$$4\pi\sigma_2\left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}\right) = -V_1 + V_2\left(1 + \frac{b_1}{\alpha}\right) - V\frac{b_1}{\alpha}. \tag{13}$$

Для бесконечно тонких проволочек α становится бесконечным, члены, где α входит в знаменатель, исчезают, так что мы приходим к случаю двух параллельных пластин без всякой решетки.

Если решетка находится в металлическом контакте с одной из плоскостей, скажем с первой, то $V=V_1$ и правая часть уравнения для σ_1 становится равной $V_1 - V_2$. Следовательно, плотность σ_1, наводимая на первой плоскости при наличии решетки, относится к значению плотности, которая наводилась бы при отсутствии решетки, и при второй плоскости, поддерживаемой при том же потенциале, как 1 к $1+[b_1 b_2/\alpha\,(b_1+b_2)]$.

Мы пришли бы к той же величине уменьшения электрического влияния первой поверхности на вторую при наличии решетки, если бы считали, что решетка связана со второй поверхностью. Это ясно из того, что b_1 и b_2 входят в это выражение одинаково. Это непосредственно следует также из теоремы п. 88.

Индукция одной заряженной плоскости на другую через решетку получается такая же, что и при удаленной решетке, но на расстоянии между плоскостями, увеличенном с b_1+b_2 до $b_1+b_2+(b_1 b_2/\alpha)$.

Если обе плоскости находятся под нулевым потенциалом, а решетка заряжена до заданного потенциала, то количество электричества на ней относится к количеству электричества, которое индуцировалось бы на плоскости равной площади, помещенной в то же положение, как $b_1 b_2/[b_1 b_2+\alpha\,(b_1+b_2)]$.

Эти результаты справедливы в предположении, что b_1 и b_2 много больше α, а α много больше c. Величина α имеет размерность длины и может принимать любое значение. Она становится бесконечно большой при неограниченном уменьшении c.

Если положить $c=a/2$, то между проволочками решетки не будет никакого зазора, так что не будет никакой индукции через решетку. Поэтому α должно

было бы быть равным 0. Но формула (11) дает в этом случае $\alpha = -(a/2\pi)\ln 2 = -0{,}11a$, что, очевидно, неверно, так как решетка никогда не может привести к изменению знака индукции. Нетрудно, однако, в случае решетки и цилиндрических проволочек перейти к более высокому приближению. Я здесь только намечу основные этапы такого перехода.

Метод приближения

206. Поскольку проволоки имеют цилиндрическую форму и распределение электричества на каждой проволоке симметрично относительно диаметра параллельного оси y, то подходящее разложение для потенциала имеет вид

$$V = C_0 \ln r + \Sigma C_i r^i \cos i\theta, \tag{14}$$

где r — расстояние от оси проволочек, а θ — угол между r и y. Поскольку проволока является проводником, то при r равном радиусу проволоки V должно быть постоянно, и, следовательно, коэффициенты при всех косинусах дуг, кратных θ, должны обращаться в 0.

Перейдем для краткости к новым координатам ξ, η и т. д., так что

$$a\xi = 2\pi x, \qquad a\eta = 2\pi y, \qquad a\rho = 2\pi r, \qquad a\beta = 2\pi b \quad \text{и т. д.}, \tag{15}$$

и пусть

$$F_\beta = \ln\left(e^{\eta+\beta} + e^{-(\eta+\beta)} - 2\cos\xi\right). \tag{16}$$

Тогда, положив

$$V = A_0 F_\beta + A_1 \frac{dF_\beta}{d\eta} + A_2 \frac{d^2 F_\beta}{d\eta^2} + \ldots, \tag{17}$$

мы можем, выбрав соответствующие значения коэффициентов A, представить любой потенциал, являющийся функцией от η и $\cos\xi$ и не обращающийся в бесконечность нигде, кроме $\eta+\beta=0$ и $\cos\xi=1$.

При $\beta=0$ разложение F по ρ и θ имеет вид

$$F_0 = 2\ln\rho + \frac{1}{12}\rho^2\cos 2\theta - \frac{1}{1440}\rho^4\cos 4\theta + \ldots. \tag{18}$$

Для конечных значений β разложение F имеет вид

$$F_\beta = \beta + 2\ln\left(1 - e^{-\beta}\right) + \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\rho\cos\theta - \frac{e^{-\beta}}{(1-e^{-\beta})^2}\rho^2\cos 2\theta + \ldots. \tag{19}$$

В случае решетки с двумя проводящими плоскостями, уравнения которых $\eta=\beta_1$ и $\eta=-\beta_2$, а уравнение плоскости решетки $\eta=0$, получатся два бесконечных ряда изображений решетки. Первый ряд будет состоять из самой решетки и бесконечной последовательности изображений с обеих сторон с зарядом той же величины и знака. Оси этих воображаемых цилиндров лежат в плоскостях, уравнения которых имеют вид

$$\eta = \pm 2n\,(\beta_1+\beta_2). \tag{20}$$

Второй ряд будет состоять из бесконечной последовательности изображений, для которых коэффициенты A_0, A_2, A_4 и т. д. равны и противоположны по знаку соответствующим величинам для самой решетки, а коэффициенты A_1, A_3 и т. д.

совпадают по величине и по знаку с соответствующими коэффициентами для решетки. Оси этих изображений расположены в плоскостях, уравнения которых имеют вид

$$\eta=2\beta_2\pm 2m\,(\beta_1+\beta_2), \tag{21}$$

где m — целое.

Потенциал, создаваемый любой бесконечной последовательностью таких изображений, будет зависеть от того, четно или нечетно число изображений. Таким образом, потенциал бесконечной последовательности остается неопределенным, но если добавить к нему функцию $B\eta+C$, то условия задачи достаточны, чтобы найти распределение электричества.

Сначала нужно выразить потенциалы двух проводящих плоскостей V_1 и V_2 через B, C и коэффициенты A_0, A_1, ... Затем нужно определить поверхностные плотности σ_1, σ_2 в произвольной точке этих плоскостей. Средние значения σ_1 и σ_2 даются уравнениями

$$4\pi\sigma_1=(2\pi/a)\,(A_0-B), \qquad 4\pi\sigma_2=(2\pi/a)\,(A_0+B). \tag{22}$$

Затем потенциалы самой решетки и всех изображений следует разложить по ρ и по косинусам дуг, кратных θ, и добавить к ним $B\,\rho\cos\theta+C$.

Члены, не зависящие от θ, дают при этом потенциал решетки V, а приравнивание к нулю коэффициентов при косинусах дает уравнения для неопределенных коэффициентов.

Полученных таким образом уравнений достаточно для того, чтобы исключить все эти коэффициенты и свести к двум уравнениям, выражающим σ_1 и σ_2 через V_1, V_2 и V.

Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} V_1-V&=4\pi\sigma_1\,(b_1+\alpha-\gamma)+4\pi\sigma_2\,(\alpha+\gamma),\\ V_2-V&=4\pi\sigma_1\,(\alpha+\gamma)+4\pi\sigma_2\,(b_2+\alpha-\gamma). \end{aligned} \tag{23}$$

Количество электричества, наводимое на одной из плоскостей, защищенной решеткой, другой плоскостью при заданной разности потенциалов, будет таким, как если бы плоскости находились не на расстоянии b_1+b_2, а на расстоянии

$$(\alpha-\gamma)\,(b_1+b_2+b_1b_2-4\alpha\gamma)/\,(\alpha+\gamma).$$

Значения α и γ приближенно равны

$$\alpha=\frac{a}{2\pi}\left\{\ln\frac{a}{2\pi c}-\frac{5}{3}\cdot\frac{\pi^4c^4}{15a^4+\pi^4c^4}+\right.$$
$$\left.+\,2e^{-4\pi(b_1+b_2)/a}\left(1+e^{-4\pi(b_1/a)}+e^{-4\pi(b_2/a)}+\ldots\right)+\ldots\right\},$$
$$\gamma=\frac{3\pi ac^2}{3a^2+\pi^2c^2}\left(\frac{e^{-4\pi(b_1/a)}}{1-e^{-4\pi(b_1/a)}}-\frac{e^{-4\pi(b_2/a)}}{1-e^{-4\pi(b_2/a)}}\right)+\ldots.$$

ГЛАВА XIII

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Об электростатических приборах

Приборы, которые нам теперь нужно рассмотреть, можно разделить на следующие классы:

1) Приборы для получения и увеличения электризации.
2) Умножители — для увеличения электризации в известное число раз.
3) Электрометры — для измерения электрических потенциалов и зарядов.
4) Накопители — для удержания больших электрических зарядов.

Электрические машины

207. В обычной электрической машине стеклянная пластинка или стеклянный цилиндр приводятся во вращение так, чтобы при этом происходило трение о кожу, на поверхность которой наносится амальгама цинка и ртути. Поверхность стекла электризуется положительно, а натирающая поверхность (щетка) — отрицательно. Когда электризованная поверхность стекла отходит от отрицательно электризованной щетки, стекло приобретает высокий положительный потенциал. Затем поверхность проходит мимо набора заостренных металлических стержней, соединенных кондуктором машины. Положительная электризация стекла вызывает отрицательную электризацию иголок, которая тем больше, чем острее иголки и чем они ближе к стеклу.

Когда машина работает должным образом, между стеклом и остриями происходит разряд через воздух, стекло теряет часть своего положительного заряда, заряд переходит на острия и, таким образом, попадает на изолированный главный кондуктор машины, т. е. на любое другое тело, которое находится с ним в электрическом соединении.

Те участки стекла, которые приближаются к щетке, имеют меньший положительный заряд, чем те, которые в то же самое время удаляются от щетки, так что щетка и связанные с ней проводники становятся отрицательно электризованными.

Поверхность стекла с высоким положительным потенциалом, удаляющаяся от щетки, сильнее притягивается отрицательным зарядом щетки, чем частично разряженная поверхность, которая приближается к щетке. Поэтому электрические силы действуют как сопротивление той силе, которая приводит машину во вращение. Таким образом, работа, затраченная на вращение машины, оказывается больше, чем работа, затраченная на преодоление обычного трения и других сил сопротивления, а избыток идет на создание состояния электризации, энергия которого эквивалентна этому избытку.

Работа, затраченная на преодоление трения, сразу переходит в тепло в трущихся друг о друга телах. Электрическая энергия также может быть обращена либо в механическую энергию, либо в тепло.

Если машина не запасает механической энергии, то вся энергия будет обращена в тепло, и единственная разница между теплом от трения и теплом от электрического действия заключается в том, что первое порождается на трущихся по

верхностях, в то время как второе может порождаться в проводниках на расстоянии [1].

Мы видели, что электрический заряд на поверхности стекла притягивается щеткой. Если бы это притяжение было достаточно велико, то вместо разряда между стеклом и собирающими остриями мог бы возникнуть разряд между стеклом и щеткой. Чтобы этого не произошло, к щетке прикрепляются кусочки шелка. Они отрицательно электризуются и прижимаются к стеклу и, таким образом, уменьшают потенциал вблизи от щетки.

Поэтому по мере того как стекло отходит от щетки, потенциал возрастает не так быстро и, таким образом, в каждой точке притяжение заряда на стекле к щетке оказывается меньше, а следовательно, уменьшается и опасность прямого разряда на щетку.

В некоторых электрических машинах движущаяся часть сделана из эбонита, а не из стекла, а щетка — из шерсти или меха. В этом случае щетка заряжается положительно, а главный кондуктор — отрицательно.

Электрофор Вольта

208. Электрофор состоит из смоляной или эбонитовой пластины, которая имеет сзади металлическое покрытие, и из металлической пластины того же размера. К задней стороне каждой из этих пластин может быть привернута изолированная рукоятка. Эбонитовая пластина имеет металлическую иглу, и, когда металлическая и эбонитовая пластины соприкасаются, эта игла соединяет металлическую пластину с металлическим покрытием на задней стороне эбонитовой пластины.

Эбонитовая пластина электризуется отрицательно трением о шерсть или кошачью шкурку. Затем при помощи изолирующей ручки к эбониту подносится металлическая пластина. Между эбонитом и металлической пластиной не происходит прямого разряда, но вследствие индукции потенциал металлической пластины становится отрицательным, так что, когда она подходит на определенное расстояние к металлической игле, проскакивает искра. Если теперь металлическую пластину отвести на некоторое расстояние, то окажется, что она заряжена положительно, и ее заряд может быть передан проводнику. При этом металлическое покрытие на обратной стороне эбонитовой пластины получает отрицательный заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду на металлической пластине.

При использовании этого прибора для зарядки конденсатора или накопителя одна из пластин помещается на проводнике, соединенном с землей, а другая сначала кладется на первую, затем снимается и приводится в соприкосновение с электродом конденсатора, затем кладется на закрепленную пластину, и процесс повторяется. Если закреплена эбонитовая пластина, конденсатор будет заряжен положительно. Если закреплена металлическая пластина, конденсатор будет заряжен отрицательно.

---

[1] Представляется вероятным, что во многих случаях, когда динамическая энергия превращается в тепло из-за трения, часть энергии может сначала перейти в электрическую энергию, а затем преобразовываться в тепло по мере того, как электрическая энергия затрачивается на поддержание замкнутых токов вблизи от трущихся поверхностей. См. сэр Уильям Томсон «Об электродинамических свойствах металлов». *Phil. Trans.*, 1856. р. 649.

Работа, совершаемая рукой при разделении пластин, всегда превышает работу сил электрического притяжения, совершаемую при сближении пластин, так что процесс зарядки конденсатора связан с затратой работы. За счет части этой работы создается энергия заряженного конденсатора, часть работы идет на шум и тепло при возникновении искр, а остальная часть — на преодоление других сил, препятствующих движению.

О машинах, создающих электризацию посредством механической работы

209. В обыкновенной фрикционной электрической машине работа, затрачиваемая на преодоление трения, оказывается намного больше, чем та, которая идет на увеличение электризации. Поэтому любая установка, с помощью которой электризация может производиться целиком за счет механической работы против электрических сил, представляется важной с научной точки зрения, даже если она и не имеет практического значения. Первой машиной такого рода, по-видимому, был вращающийся удвоитель Никольсона, описанный в *Philosophical Transactions* за 1788 г. как «прибор, который при вращении рукоятки создает два состояния электричества без трения или соединения с Землей».

210. Именно с помощью вращающегося удвоителя Вольта смог увеличить электризацию, получаемую от столба, до величины, способной воздействовать на его электрометр. Приборы, действующие на том же самом принципе, были независимо изобретены г-ном Варлеем [2] (Varley) и сэром У. Томсоном.

Эти приборы в своей основе состоят из изолированных проводников различной формы, из которых одни закреплены, а другие подвижны. Движущиеся проводники называются носителями, а неподвижные могут быть названы индукторами, приемниками и регенераторами. Индукторы и приемники имеют такую форму, что, когда носители при своем обращении достигают определенных точек, они оказываются почти полностью внутри некоторого проводящего тела. Однако индукторы и приемники не могут полностью окружать носитель и в то же время позволять ему свободно входить и выходить наружу. Этого нельзя добиться без сложного устройства подвижных частей. Поэтому прибор с теоретической точки зрения не является совершенным без пары регенераторов, накапливающих небольшие количества электричества, которые носители удерживают на себе при выходе из приемников.

Однако мы пока можем предположить, что индукторы и приемники полностью окружают носитель, когда он находится внутри них, поскольку в этом случае теория очень упрощается.

Мы предположим, что машина состоит из двух индукторов A и C, из двух приемников B и D и из двух носителей F и G.

Предположим, что индуктор A наэлектризован положительно, так что его потенциал равен A, и пусть носитель F находится внутри индуктора A и имеет потенциал F. Тогда, если коэффициент индукции между A и F равен Q (величину Q считаем положительной), количество электричества на носителе будет равно $Q(F—A)$.

---

[2] Specification of Patent, Jan. 27, 1860, N 206.

Если носитель, находясь внутри индуктора, соединен с землей, то $F=0$, и заряд на носителе будет равен $-QA$, отрицательной величине. Пусть теперь носитель движется по кругу, пока он не попадет в приемник B. Находясь внутри B, носитель касается пружины и, таким образом, приходит в электрическое соединение с B. Тогда, как показано в п. 32, носитель полностью разряжается и передает весь свой отрицательный заряд приемнику B.

Затем носитель войдет в индуктор C, о котором мы будем предполагать, что он заряжен отрицательно. Находясь внутри C, носитель приходит в соединение с землей и, таким образом, приобретает положительный заряд, который он уносит и передает приемнику D и т. д.

Таким путем, если потенциалы индукторов остаются все время постоянными, то приемники B и D получают последовательно заряды одной и той же величины для каждого оборота носителя, и, таким образом, каждый оборот дает одно и то же приращение электричества в приемниках.

Но если индуктор A соединить с приемником D, а индуктор C с приемником B, потенциалы индукторов будут непрерывно возрастать, и количество электричества, доставляемое в приемники при каждом обороте, также будет непрерывно возрастать.

Пусть, например, потенциалы A и D равны U, а потенциалы B и C равны V, тогда, поскольку потенциал носителя внутри A равен нулю (носитель, находясь в A, соединен с землей), его заряд равен $-QU$. Носитель входит в B с этим зарядом и передает его B. Если емкость B и C равна B, их потенциал изменится от V до $V-(Q/B)U$.

Если другой носитель в то же самое время перенес заряд $-QV$ от C к D, это изменит потенциалы A и D от U до $U-(Q'/A)V$, где Q' — коэффициент индукции между носителем и C, а через A обозначена емкость A и D. Таким образом, если обозначить через U_n и V_n потенциалы двух индукторов после n полуоборотов, а U_{n+1} и V_{n+1} — потенциалы после $n+1$ полуоборотов, то

$$U_{n+1}=U_n-(Q'/A)V_n, \qquad V_{n+1}=V_n-(Q/B)U_n.$$

Если мы обозначим $p^2=Q/B$ и $q^2=Q'/A$, то найдем

$$pU_{n+1}+qV_{n+1}=(pU_n+qV_n)(1-pq)=(pU_0+qV_0)(1-pq)^{n+1},$$
$$pU_{n+1}-qV_{n+1}=(pU_n-qV_n)(1+pq)=(pU_0-qV_0)(1+pq)^{n+1}.$$

Таким образом,

$$2U_n=U_0[(1-pq)^n+(1+pq)^n]+(q/p)V_0[(1-pq)^n-(1+pq)^n],$$
$$2V_n=(p/q)U_0[(1-pq)^n-(1+pq)^n]+V_0[(1-pq)^n+(1+pq)^n].$$

Из этих уравнений следует, что величина $pU+qV$ непрерывно уменьшается, так что, каковы бы ни были начальные значения электризации, приемники в конце концов приобретают электризацию противоположного знака, причем отношение потенциалов A и B равно отношению q к $-p$.

С другой стороны, величина $pU-qV$ непрерывно увеличивается, так что, сколь бы мало величина pU ни отличалась вначале от qV в ту или иную сторону, эта разность будет расти по закону геометрической прогрессии с каждым оборотом, пока электродвижущие силы не станут столь большими, что изоляция прибора не выдержит.

Приборы такого типа могут быть использованы для различных целей:

Для достаточной подачи электричества при высоком потенциале, как это делается с помощью большой машины г-на Варлея.

Для регулирования заряда в конденсаторе, как, например, в случае Томсоновского электрометра, заряд которого может быть увеличен или уменьшен с помощью нескольких оборотов очень маленькой машины такого рода, называемой Пополнителем (Replenisher).

Для умножения малых разностей потенциала. Сначала индукторы могут быть заряжены до крайне малого потенциала, например, от термоэлектрической пары. Затем путем вращения машины эта разность потенциалов может непрерывно умножаться, пока она не станет достаточной для измерения обычным электрометром. Определяя на опыте коэффициент увеличения разности потенциалов при каждом обороте машины и зная число оборотов и конечную электризацию, можно определить первоначальную электродвижущую силу, с помощью которой были заряжены индукторы.

Большинство этих приборов сделано так, что носители обращаются вокруг оси и при вращении приходят в должное положение относительно индукторов. Соединения осуществляются с помощью пружин, расположенных таким образом, что носители приходят с ними в контакт в нужные моменты времени.

211. Сэр У. Томсон [3] построил, однако, машину для умножения электрических зарядов, в которой носителями служат капли воды, падающие в изолированный приемник из неизолированного сосуда, помещенного внутри индуктора, но не соприкасающегося с ним. Таким образом, приемник непрерывно получает электричество противоположного знака по отношению к индуктору. Если индуктор электризован положительно, приемник будет получать непрерывно возрастающее количество отрицательного электричества.

Вода выходит из приемника через воронку, носик которой почти окружен металлом приемника. Поэтому капли, падающие из этого носика, почти свободны от электризации. Другие индуктор и приемник той же самой конструкции расположены так, что индуктор одной системы находится в соединении с приемником другой системы. Поэтому возрастание заряда на приемнике уже не является постоянным, а растет со временем по закону геометрической прогрессии, причем заряды двух приемников имеют противоположные знаки. Это возрастание происходит до тех пор, пока падающие капли не начинают под действием электрических сил отклоняться от своего пути настолько, что они падают мимо приемника или даже ударяются об индуктор.

В этом приборе энергия электризации образуется за счет энергии падающих капель.

212. Построено несколько других электрических машин, в которых используется принцип электрической индукции. Наиболее замечательной из них является машина Гольтца (Holtz), в которой носитель представляет собой стеклянную пластину, покрытую шеллачным лаком, а индукторами являются куски картона. Для того чтобы между частями прибора не проскакивали искры, имеются две стеклянные пластины, по одной с каждой стороны от вращающейся пластины носителя. Эта машина оказалась очень эффективной и мало подверженной влия-

[3] *Proc. R. S.*, June, 20, 1867.

нию атмосферных условий. Принцип действия является тем же самым, что и у вращающегося удвоителя и других приборов, основанных на той же самой идее, но, поскольку носитель представляет собой пластину изолятора, а индукторами служат несовершенные проводники, полное объяснение ее действия оказывается более трудным делом, чем в том случае, когда носители являются хорошими проводниками известной формы и они заряжаются или разряжаются в определенных точках.

213. В уже описанных электрических машинах возникают искры каждый раз, как носитель и индуктор приходят в контакт, находясь при различных потенциалах.

Но мы показали, что каждый раз при этом происходит потеря энергии, и поэтому полная работа, затраченная на вращение машины, не переходит в полезную электризацию, но часть теряется на тепло и на шум от электрической искры.

Поэтому я считал желательным показать, как можно построить такую электрическую машину, которая не имела бы таких потерь производительности. Я не предлагаю пригодную форму машины, а рассматриваю пример такого метода, с помощью которого можно применить устройство, которое в тепловых машинах называют регенератором, и тем предотвратить потерю работы.

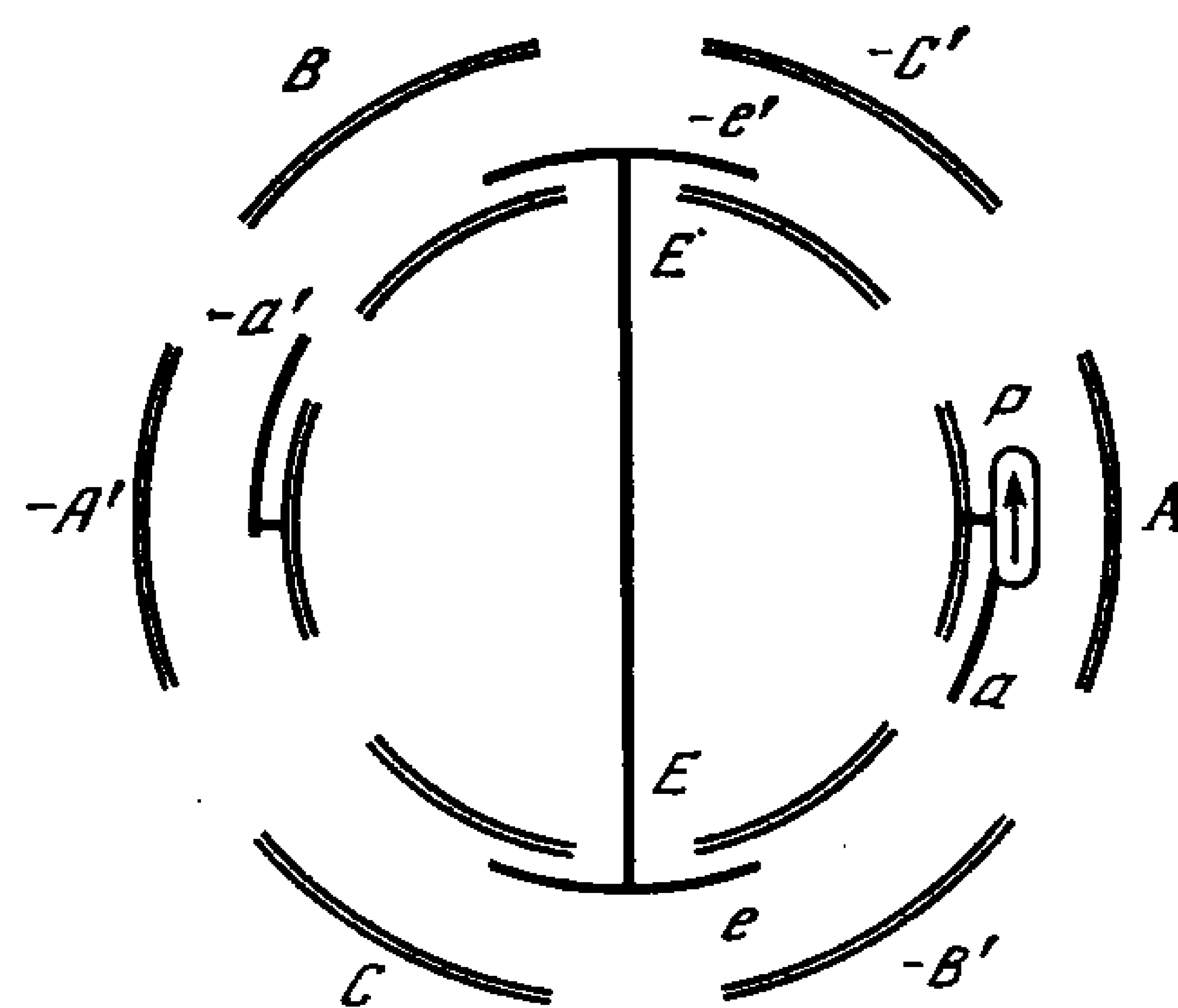


Рис. 18

Пусть на рис. 18 буквы A, B, C и A', B', C' обозначают пустотелые закрепленные проводники, расположенные таким образом, что носитель движется последовательно внутри каждого из них. Из этих проводников пусть A, A' и B, B' почти полностью окружают носитель, когда тот находится в середине своего прохождения, а проводники C и C' окружают носитель не столь полно.

Предположим, что A, B, C соединены с лейденской банкой большой емкости, имеющей потенциал V, а A', B', C', соединены с другой банкой, имеющей потенциал $-V$.

Пусть P — один из носителей, движущийся по кругу от A к C' и т. д. и приходящий на своем пути в соприкосновение с определенными пружинами, из которых a и a' соединены соответственно с A и A', а e и e' соединены с Землей.

Предположим, что, когда носитель P находится в середине A, коэффициент индукции между P и A равен $-A$. Емкость носителя P в этом положении оказывается больше, чем A, потому что он не полностью окружен приемником A. Пусть емкость P равна $A+a$.

Тогда, если потенциал P равен U, а потенциал A равен V, заряд на P будет равен $(A+a)U-AV$.

Пусть теперь P, находясь в середине приемника A, касается пружины a. Тогда потенциал P равен V, такой же, как и потенциал A, поэтому заряд P равен aV.

Если теперь носитель P покидает пружину a, он уносит с собой заряд aV. Когда носитель P покидает A, его потенциал уменьшается, и потенциал еще больше уменьшается, когда P попадает под воздействие проводника C', который электризован отрицательно.

Если в то время, когда носитель P входит в C', его коэффициент индукции по отношению к C' равен $-C'$, а его емкость равна $C'+c'$, тогда, если потенциал P равен U, заряд на P равен $(C'+c')U+C'V'=aV$.
Если $C'V'=aV$, то в этой точке потенциал P обращается в нуль.

Пусть P в этой точке приходит в контакт с пружиной e', которая соединена с Землей. Поскольку потенциал P равен потенциалу пружины, при замыкании контакта искра не возникает.

Этот проводник C', с помощью которого носитель P имеет возможность соединяться с Землей без искры, соответствует устройству, которое в тепловых машинах называется регенератором. Поэтому мы будем называть его Регенератором.

Пусть теперь P движется дальше, находясь еще в контакте с заземляющей пружиной e', пока он не входит в середину индуктора B, потенциал которого равен V. Если $-B$ есть коэффициент индукции между P и B для этой точки, то, поскольку $U=0$, заряд на P будет равен $-BV$.

Когда носитель P отходит от заземленной пружины, он уносит с собой этот заряд. По мере того как он движется из положительного индуктора B по направлению к отрицательному приемнику A', его потенциал становится отрицательным и возрастает по величине. В середине A', если бы он сохранил свой заряд, его потенциал был бы равен $-(A'V'+BV)/(A'+a')$, и если BV больше, чем $a'V'$, численное значение потенциала будет больше, чем значение V'. Таким образом, перед тем, как P дойдет до середины A', существует некоторая точка, в которой его потенциал равен $-V'$. Пусть в этой точке носитель вступает в контакт с отрицательной приемной пружиной a'. Искры не возникает, поскольку оба тела находятся при одном и том же потенциале. Пусть P движется дальше до середины A', все еще находясь в контакте с пружиной и поэтому имея тот же самый потенциал, что и A'. Во время этого движения P передает A' отрицательный заряд. В середине A' носитель P отходит от пружины и уносит заряд $-a'V'$ по направлению к положительному регенератору C, где его потенциал уменьшается до нуля, и он вступает в контакт с заземленной пружиной e. Затем он скользит вдоль заземленной пружины и переходит в отрицательный индуктор B', причем за время этого движения он приобретает положительный заряд $B'V'$, который, наконец, передает в положительный приемник A, и после этого цикл операций повторяется.

За время этого цикла положительный приемник потерял заряд aV и получил заряд $B'V'$. Таким образом, полный прирост положительного электричества равен $B'V'-aV$.

Таким же путем находим, что полный прирост отрицательного электричества равен $BV-a'V'$.

Если сделать индукторы так, что они будут настолько близки к поверхности носителя, насколько это совместимо с изоляцией, значения B и B' можно сделать большими. В то же время можно так сделать приемники, что они будут почти полностью окружать находящийся внутри них носитель. Тем самым значения a и a' могут быть сделаны очень малыми, и тогда заряды обоих лейденских банок будут возрастать при каждом обороте.

Условия, которым должны удовлетворять регенераторы, записываются в виде $C'V'=aV$ и $CV=a'V'$.

Так как значения a и a' малы, регенераторы не должны быть ни велики, ни очень близки к носителям.

Об электрометрах и электроскопах

214. Электрометр — это прибор, с помощью которого могут быть измерены электрические заряды или электрические потенциалы. Приборы, с помощью которых можно обнаружить наличие электрических зарядов или разностей потенциалов, но которые не могут дать численную меру этих величин, называются Электроскопами.

Электроскоп, если он достаточно чувствителен, может быть использован в электрических измерениях при условии, что мы можем привести измерения к случаю нулевой электризации. Например, если у нас есть два заряженных тела A и B, мы можем использовать метод, описанный в главе I, для того чтобы определить, которое из тел имеет больший заряд. Внесем тело A на изолирующей опоре внутрь изолированного замкнутого сосуда C. Соединим C с землей и снова изолируем. Тогда на C не будет никакой внешней электризации. Теперь удалим A, внутрь C введем B и затем проверим электризацию C с помощью электроскопа. Если заряд B равен заряду A, электризации не будет, но если он больше или меньше, то электризация будет соответственно того же знака, что у B, или противоположного.

Методы такого рода, в которых предметом наблюдения является отсутствие некоторого явления, называются *нулевыми* методами. Для этих методов нужен прибор, способный определить наличие данного явления.

В другом классе приборов для регистрации явлений приборы работают так, что дают всегда одно и то же показание для одного и того же значения измеряемой величины, но отсчеты на шкале прибора не пропорциональны значениям измеряемой величины, и связь между этими отсчетами и соответствующими значениями не известна, известно только, что одно является непрерывной функцией другого. К этому классу принадлежат некоторые электрометры, действие которых основано на взаимном отталкивании частей прибора, обладающих сходной электризацией. Такие приборы используются для регистрации явлений, а не для их измерения. Вместо истинных значений измеряемой величины получается ряд чисел, которые впоследствии могут быть использованы для определения этих величин, после того как шкала прибора должным образом исследована и протабулирована.

В приборах еще более высокого класса отсчеты по шкале пропорциональны измеряемой величине, и, таким образом, для полного измерения этой величины требуется знать только коэффициент, на который следует умножить отсчеты по шкале, чтобы получить истинное значение величины.

Приборы, построенные так, что они содержат внутри себя средства для независимого измерения истинных значений величин, называются абсолютными приборами.

Крутильные весы Кулона

215. Многочисленные опыты, в которых Кулон установил основные законы электричества, сводились к измерению сил, действующих между двумя малыми сферами, заряженными электричеством. Одна из этих сфер закреплялась, в то время как другая поддерживалась в равновесии действием двух сил: электрическим действием между сферами и крутильной упругостью стеклянной нити или металлической проволоки. См. п. 38.

Крутильные весы представляют собой горизонтальное коромысло, сделанное из шеллака, подвешенное на тонкой проволоке или на стеклянной нити и несущее на одном конце небольшой шарик, вырезанный из сердцевины бузины и равномерно позолоченный. Проволока подвеса закреплена сверху на вращающейся вокруг вертикальной оси головке, ручка которой может перемещаться по горизонтальному градуированному кругу, так что при этом верхний конец проволоки закручивается вокруг собственной оси на любое число градусов.

Весь этот прибор заключен в камеру. Другой небольшой шарик закреплен на изолирующем стержне. Он может быть заряжен, введен через отверстие в камеру и установлен так, что его центр совпадает с определенной точкой на горизонтальной окружности, которую описывает подвешенный шарик. Положение подвешенного шарика определяется с помощью градуированной окружности, выгравированной на цилиндрической стеклянной камере прибора.

Предположим теперь, что обе сферы заряжены и что подвешенный шарик находится в равновесии в известном положении, при котором коромысло составляет угол θ с радиусом, проходящим через центр закрепленного шарика. Тогда расстояние между центрами равно $2a \sin(\theta/2)$, где a — радиус коромысла. Если F есть сила между шариками, момент этой силы относительно оси кручения равен $Fa \cos(\theta/2)$.

Пусть теперь обе сферы полностью разряжены и коромысло находится в равновесии в положении, составляющем угол φ с радиусом, проходящим через закрепленный шарик.

Тогда угол, на который коромысло было закручено электрической силой, должен быть равен $\theta-\varphi$, и, если M есть момент упругости кручения нити, мы получаем уравнение

$$F a \cos(\theta/2)=M(\theta-\varphi).$$

Таким образом, если известна величина M, мы можем определить F — силу, действующую между двумя шариками, находящимися на расстоянии $2a \sin(\theta/2)$ один от другого.

Чтобы найти момент кручения M, обозначим через I момент инерции коромысла, а через T — время его двойного колебания [4] под действием упругости кручения нити. Тогда $M=4\pi^2 I/T^2$.

Во всех электрометрах знание того, какую силу мы измеряем, является вопросом величайшей важности. Сила, действующая на подвешенный шарик, вызывается отчасти прямым действием закрепленного шарика, но отчасти также и электризацией (если она есть) стенок камеры.

---

[4] Под временем двойного колебания Максвелл понимает период.— *Примеч. ред.*

Если камера сделана из стекла, то определить электризацию его поверхности невозможно иначе, чем посредством очень трудных измерений в каждой точке. Однако в тех случаях, когда камера либо сделана из металла, либо металлическая камера, почти полностью охватывающая прибор, помещена как экран между шариками и стеклянной камерой, электризация на внутренней поверхности металлического экрана будет полностью зависеть от электризации шариков, а электризация стеклянной камеры не будет влиять на шарики. Таким путем мы можем избежать любой неопределенности, вызванной действием камеры.

Чтобы пояснить это на таком примере, в котором мы можем вычислить все эффекты, предположим, что камера представляет собой сферу радиуса b; что радиус коромысла равен a и центр вращения коромысла совпадает с центром сферы; что заряды на двух шариках равны E_1 и E, а угол между их положениями равен θ; что закрепленный шарик находится на расстоянии a_1 от центра и расстояние между двумя этими небольшими шариками равно r.

Если пренебречь пока влиянием индукции на распределение заряда на небольших шариках, то сила между ними будет отталкивающей: E_1E/r^2, а момент этой силы относительно вертикальной оси, проходящей через центр, равен $(EE_1aa_1 \sin\theta)/r^3$.

Изображение заряда E_1, возникающее из-за наличия сферической поверхности камеры, представляет собой точку, расположенную на том же радиусе на расстоянии от центра b^2/a_1 с зарядом $-E_1b/a_1$. Момент силы притяжения между зарядом E и этим изображением относительно оси подвеса равен

$$EE_1\frac{b}{a_1}\frac{a\frac{b^2}{a_1}\sin\theta}{\left\{a^2-2\frac{ab^2}{a_1}\cos\theta+\frac{b^4}{a_1^2}\right\}^{3/2}}=EE_1\frac{aa_1\sin\theta}{b^3\left\{1-2\frac{aa_1}{b^2}\cos\theta+\frac{a^2a_1^2}{b^4}\right\}^{3/2}}.$$

Если радиус сферической камеры b велик по сравнению с расстояниями шариков от центра a и a_1, мы можем пренебречь вторым и третьим слагаемыми множителя в знаменателе. Приравнивая моменты, стремящиеся повернуть коромысло, получаем

$$EE_1aa_1\sin\theta\left\{\frac{1}{r^3}-\frac{1}{b^3}\right\}=M(\theta-\varphi).$$

Электрометры для измерения потенциалов

216. Во всех электрометрах подвижная часть представляет собой заряженное электричеством тело, потенциал которого отличается от потенциала некоторых закрепленных частей, расположенных вокруг него. Если, как в методе Кулона, используется изолированное тело, обладающее некоторым зарядом, то именно этот заряд и является прямым объектом измерения. Мы можем, однако, с помощью тонких проволочек соединить шарики Кулонова электрометра с другими проводниками. Тогда заряды на шариках будут зависеть от величины потенциала этих проводников и от потенциала камеры прибора. Заряд на каждом шарике будет приблизительно равен произведению его радиуса на превышение потенциала шарика над потенциалом камеры прибора при условии, что радиусы шариков малы в сравнении с их расстоянием друг от друга и в сравнении с их расстояниями до стенок и отверстий камеры.

Однако кулоновский вариант прибора не очень хорошо приспособлен для такого рода измерений из-за малости силы между шариками, отстоящими друг от друга на подходящее расстояние, когда разность потенциалов мала. Более удобный вариант представляет собой Электрометр с Притягивающимся Диском. Первые электрометры на этом принципе были созданы сэром У. Сноу Харрисом (W. Snow Harris) [5]. Они были затем доведены до высокого совершенства и в теории и в конструкции сэром У. Томсоном [6].

Если два диска при различных потенциалах приблизить друг к другу поверхность к поверхности до малого расстояния между ними, то на противостоящих поверхностях будет почти однородная электризация, а на задних сторонах дисков электризация будет очень малой, при условии, что поблизости нет других проводников или электризованных тел. Заряд на положительном диске будет приблизительно пропорционален его площади и разности потенциалов дисков и обратно пропорционален расстоянию между ними. Таким образом, если площади дисков сделать большими, а расстояние между ними малым, то малая разность потенциалов может дать измеримую силу притяжения.

Математическая теория распределения электричества на двух дисках, расположенных таким образом, дана в п. 202. Однако невозможно сделать камеру прибора настолько большой, чтобы мы могли считать диски изолированными в бесконечном пространстве. Поэтому показания прибора в такой форме нелегко численно интерпретировать.

217. Одним из главных усовершенствований, которое сэр У. Томсон внес в конструкцию этого прибора, является защитное кольцо.

Вместо подвешивания целиком одного из дисков и определения действующей на него силы центральная часть диска отделяется от остальной части и образует притягивающийся диск, а внешнее кольцо, составляющее остальную часть диска, закрепляется. Таким образом, измеряется сила, действующая на ту часть диска, на которой сила является наиболее регулярной, а недостаточная однородность электризации вблизи от края становится несущественной, поскольку край находится на защитном кольце, а не на подвешенной части диска [рис. 19].

Кроме того, соединяя защитное кольцо с металлической камерой, окружающей заднюю сторону притягивающегося диска и все детали, с помощью которых осуществляется подвешивание, мы тем самым делаем невозможной электризацию задней стороны диска, поскольку это есть часть внутренней поверхности замкнутого пустотелого проводника, все части которого имеют одно и то же значение потенциала.

Таким образом, абсолютный электрометр Томсона состоит по существу из двух параллельных пластин с разными потенциалами, причем одна из них сделана так, что определенная площадь, ни одна из частей которой не находится вблизи края пластины, может быть приведена в движение под действием электрических сил. Для определенности мы можем предположить, что притягивающийся диск и защитное кольцо находятся сверху. Неподвижный диск расположен горизонтально и укреплен на изолирующем стержне, который с помощью микрометри-

[5] *Phil. Trans.*, 1834.

[6] Смотри прекрасную работу об электрометрах сэра У. Томсона, *Report of the British Association*, Dundee, 1867.

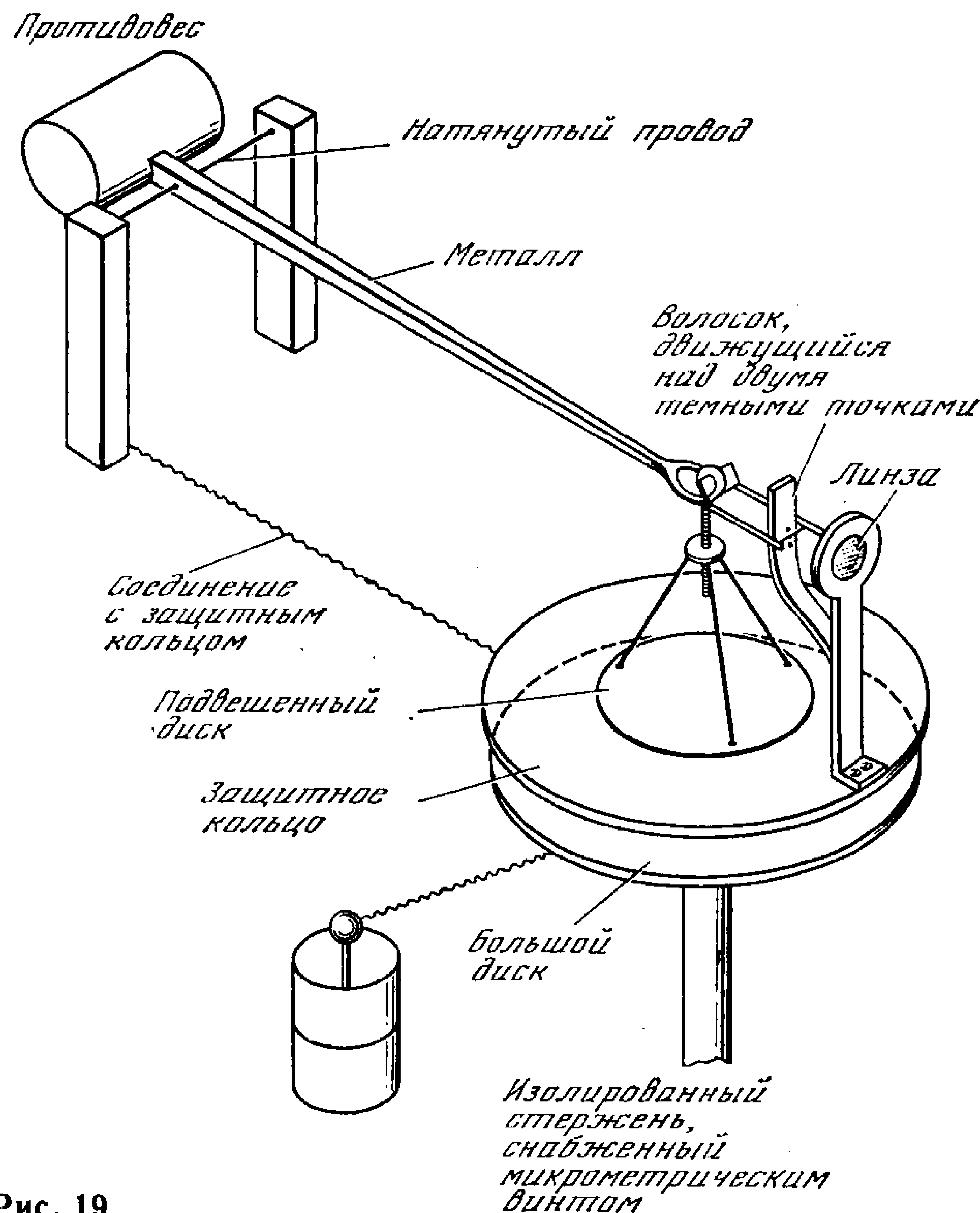


Рис. 19

ческого винта может получать измеримые перемещения по вертикали. Защитное кольцо по меньшей мере столь же велико, как и закрепленный диск; его нижняя поверхность является действительно плоской и параллельной закрепленному диску. Над защитным кольцом помещаются чувствительные весы, к которым подвешен легкий подвижный диск, который почти заполняет круговую апертуру защитного кольца, но не трется о края апертуры. Нижняя поверхность подвижного диска должна быть строго плоской, и мы должны иметь возможность знать, когда эта плоскость совпадает с плоскостью нижней поверхности защитного кольца, так что при этом образуется одна плоскость, прерываемая только узким промежутком между диском и его защитным кольцом.

Для этой цели нижний диск поднимается с помощью винта вверх до тех пор, пока он не коснется защитного кольца, и подвешенному диску дают опуститься на нижний диск, так что его нижняя поверхность оказывается в той же самой плоскости, что и нижняя поверхность защитного кольца. Затем положение подвешенного диска по отношению к защитному кольцу устанавливается с помощью системы контрольных отметок. Сэр У. Томсон обычно использует для этой цели прикрепленный к подвижной части черный волосок. Этот волосок перемещается

вверх или вниз прямо перед двумя черными отметками, сделанными на белом эмалированном фоне, и наблюдается вместе с этими двумя отметками через плоско-выпуклую линзу, обращенную плоской стороной к глазу. Если волосок при наблюдении через линзу выглядит прямым и делит пополам расстояние между черными отметками, то говорят, что он находится в *установленном положении*. Это означает, что подвешенный диск, вместе с которым движется волосок, находится в должном положении по высоте. Горизонтальность подвешенного диска можно проверить, сравнивая отраженное изображение части любого объекта от верхней поверхности диска с отражением остальной части того же самого объекта от верхней поверхности защитного кольца.

Затем весы регулируются так, чтобы они находились в равновесии в установленном положении, если на центр подвешенного диска помещен известный вес. При этом весь прибор освобождается от электризации тем, что все его части приводятся в металлическое соединение. Защитное кольцо накрывается металлической камерой так, чтобы закрыть также весы и подвижный диск, для наблюдения контрольных отметок оставляются достаточные отверстия.

Защитное кольцо, камера и подвешенный диск — все находятся в металлическом соединении друг с другом, но изолированы от остальных частей прибора.

Пусть теперь требуется измерить разность потенциалов двух проводников. С помощью проводов проводники соединяются соответственно с верхним и нижним дисками, с подвешенного диска убирается вес, и нижний диск перемещается вверх с помощью микрометрического винта до тех пор, пока электрическое притяжение не сместит подвешенный диск вниз в установленное положение. Тогда мы знаем, что притяжение между дисками равно весу, который приводил диск в его установленное положение.

Если W есть численное значение веса, а g — сила тяжести, то сила равна Wg, и если A — площадь подвешенного диска, D — расстояние между дисками и V — разность потенциалов дисков, то

$$Wg=\frac{V^2A}{8\pi D^2}, \quad \text{или} \quad V=D\sqrt{\frac{8\pi gW}{A}}.$$

Если подвешенный диск имеет круговую форму и радиус его равен R, а радиус апертуры защитного кольца равен R', то [7]

$$A=\frac{1}{2}\pi(R^2+R'^2) \quad \text{и} \quad V=4D\sqrt{\frac{gW}{R^2+R'^2}}.$$

[7] Обозначим радиус подвешенного диска через R, а радиус апертуры защитного кольца через R', тогда ширина кольцевого промежутка между диском и кольцом будет равна $B=R-R'$.

Если расстояние между подвешенным диском и большим закрепленным диском равно D, а разность потенциалов между этими дисками равна V, то, в согласии с рассмотрением п. 201, количество электричества на подвешенном диске будет

$$Q=\left\{\frac{R^2+R'^2}{8D}-\frac{R'^2-R^2}{8D}\cdot\frac{\alpha}{D+\alpha}\right\},$$

где $\alpha=(1/\pi)\,B\ln 2$, или $\alpha=0{,}220635(R'-R)$.

Если поверхность защитного кольца не совпадает точно с плоскостью поверхности подвешенного диска, предположим, что расстояние между закрепленным диском и защитным

218. Поскольку всегда имеется некоторая неточность в определении микрометрического отсчета, отвечающего $D=0$, и поскольку любая ошибка в положении подвешенного диска наиболее существенна при малых значениях D, сэр У. Томсон предпочитает такие измерения, которые зависят от разностей электродвижущей силы V. Таким образом, если V и V' — два потенциала, а D и D' — соответствующие расстояния, то

$$V-V_1=(D-D')\sqrt{8\pi gW/A}.$$

Например, для того чтобы измерить электродвижущую силу гальванической батареи, используются два электрометра.

С помощью конденсатора, который при необходимости заряжается пополнителем, нижний диск главного электрометра поддерживается при постоянном потенциале. Для контроля нижний диск главного электрометра соединяется с нижним диском вторичного электрометра, у которого подвешенный диск соединен с Землей. Расстояние между дисками вторичного электрометра и сила, требующаяся для приведения подвешенного диска в установленное положение, не меняются. Поэтому, если мы повышаем потенциал конденсатора до тех пор, пока вторичный электрометр не окажется в установленном положении, мы знаем, что потенциал нижнего диска главного электрометра превышает потенциал Земли на постоянную величину, которую мы можем обозначить через V.

Если мы теперь соединим положительный электрод батареи с Землей, а ее отрицательный электрод — с подвешенным диском главного электрометра, разность потенциалов между дисками станет равна $V+v$, если v — электродвижущая сила батареи. Пусть в этом случае отсчет микрометра равен D и пусть D' — отсчет для случая, когда подвешенный диск связан с Землей, тогда

$$v=(D-D')\sqrt{8\pi gW/A}.$$

Таким путем с помощью электрометра, диски которого находятся на удобно измеряемом расстоянии, может быть измерена малая электродвижущая сила v. Если расстояние слишком мало, малое изменение абсолютного расстояния приводит к большим изменениям в величине силы, потому что сила изменяется обрат-

---

кольцом равно не D, а $D+z=D'$. Тогда из рассмотрения в п. 225 следует, что вблизи от края диска появится добавочный электрический заряд, вызванный тем, что диск возвышается на величину z над общей плоскостью защитного кольца. Таким образом, полный заряд в этом случае приблизительно равен

$$Q=V\left\{\frac{R^2+R'^2}{8D}-\frac{R'^2-R^2}{8D}\cdot\frac{\alpha}{D+\alpha}+\frac{R+R'}{D}(D-D')\ln\frac{4\pi(R+R')}{D'-D}\right\},$$

и в выражение для притяжения мы должны вместо площади A диска подставить исправленную величину

$$A=\frac{\pi}{2}\left\{R^2+R'^2-(R'^2-R^2)\frac{\alpha}{D+\alpha}+\frac{R+R'}{D}(D'-D)\ln\frac{4\pi(R+R')}{D'-D}\right\},$$

где R=радиусу подвешенного диска, R'=радиусу апертуры в защитном кольце, D=расстоянию между закрепленным и подвешенным дисками, D'=расстоянию между закрепленным диском и защитным кольцом, $\alpha=0{,}220635\ (R'-R)$.

Если величина α мала по сравнению с D, мы можем пренебречь вторым слагаемым, а если величина $D'-D$ мала, мы можем пренебречь последним слагаемым.

но пропорционально квадрату расстояния, так что любая ошибка в абсолютном расстоянии ведет к большой ошибке в результате, если расстояние не является большим в сравнении с пределами ошибки микрометрического винта.

Влияние малых нерегулярностей в форме поверхностей дисков и в расстоянии между ними уменьшается обратно пропорционально кубу или более высоким степеням расстояния. Какова бы ни была форма волнистой поверхности, возвышения которой поднимаются до некоторой плоской поверхности, электрическое действие на расстоянии, значительно превышающем ширину складок, оказывается таким же, как и у плоскости, находящейся на некотором малом расстоянии позади плоскости, на которой расположены вершины возвышений (см. п. 197, 198).

С помощью добавочной электризации, контролируемой вспомогательным электрометром, обеспечивается подходящий интервал между дисками.

Конструкция вспомогательного электрометра может быть более простой, не предусматривающей возможность определить абсолютную величину силы притяжения, поскольку все, что нужно,— это обеспечить постоянную электризацию. Такой электрометр может быть назван *калибровочным*.

Этот метод использования дополнительной электризации, кроме той, которая подлежит измерению, называется Гетеростатическим методом электризации, в противоположность Идиостатическому методу, в котором все действие производится только подлежащей измерению электризацией.

В некоторых конструкциях электрометра с притягивающимся диском этот диск помещается на конце коромысла, которое укрепляется на платиновой проволоке, проходящей через центр тяжести коромысла и натянутой с помощью пружины. На другом конце коромысла имеется волосок, который изменением расстояния между дисками приводится в установленное положение и таким образом обеспечивает поддержание силы электрического притяжения на постоянном уровне. В этих электрометрах эта сила в общем случае не измеряется по абсолютной величине, но с уверенностью считается постоянной, если у платиновой проволоки не меняется упругость кручения.

Весь прибор помещается в лейденскую банку, внутренняя поверхность которой заряжена и соединена с притягивающимся диском и защитным кольцом. Другой диск управляется микрометрическим винтом и соединяется сначала с Землей, а затем с проводником, потенциал которого подлежит измерению. Искомый потенциал равен разности отсчетов, умноженной на константу, которая должна быть определена для каждого электрометра.

219. Описанные выше приборы не являются самодействующими, они требуют при каждом наблюдении либо регулировки с помощью микрометрического винта, либо некоторых других действий, производимых наблюдателем. Поэтому они не рассчитаны на то, чтобы действовать как саморегистрирующие приборы, которые должны сами по себе двигаться в должное положение. Этим свойством обладает *томсоновский квадрантный электрометр*.

Электрический принцип, на котором основан этот инструмент, может быть объяснен следующим образом:

A и B представляют собой два закрепленных проводника, которые могут иметь одно и то же или разные значения потенциала. C — подвижный проводник с высоким потенциалом, расположенный так, что часть его расположена напротив

поверхности проводника A, а часть — напротив поверхности B. При движении проводника C соотношение между этими частями меняется.

Для этой цели удобнее всего сделать проводник C подвижным относительно некоторой оси, а противолежащие участки поверхностей у проводников A, B и C выполнить как участки поверхностей вращения, имеющих одну и ту же ось.

При этом расстояние между поверхностью C и противолежащими поверхностями A или B остается всегда одним и тем же, и движение проводника C в положительном направлении просто увеличивает площадь, противолежащую проводнику B, и уменьшает площадь, противолежащую проводнику A.

Если потенциалы проводников A и B равны, то не возникает силы, действующей на C в направлении от A к B, но если Потенциал C отличается от потенциала B больше, чем от потенциала A, то проводник C будет стремиться повернуться так, чтобы площадь его поверхности, противолежащая проводнику B, увеличилась.

Можно так устроить прибор, что эта сила будет приблизительно постоянной для различных положений C в некоторых определенных пределах, так что, если тело C подвешено на упруго закручивающейся нити, его отклонения будут приблизительно пропорциональны разности потенциалов A и B, умноженной на разность между потенциалом C и средним значением потенциала тел A и B.

Проводник C поддерживается при высоком потенциале с помощью конденсатора, питаемого пополнителем и контролируемого калибровочным электрометром. A и B присоединяются к двум проводникам, разность потенциалов которых нужно измерить. Чем выше потенциал C, тем прибор более чувствителен. Поскольку электризация C не зависит от измеряемой электризации, этот электрометр относится к классу гетеростатических.

Мы можем применить к этому электрометру общую теорию систем проводников, данную в п. 93, 127.

Пусть A, B, C обозначают соответственно потенциалы этих трех проводников. Обозначим через a, b, c их соответственные емкости, через p — коэффициент индукции между B и C, через q — коэффициент индукции между C и A, а через r — коэффициент индукции между A и B. Все эти коэффициенты, вообще говоря, меняются с изменением положения C. Если проводник C расположен так, что при его движении в определенных пределах края проводников A и B не близки к краям C, мы можем установить вид этих коэффициентов. Если θ есть угол отклонения C от A к B, то часть поверхности A, противолежащая C, будет уменьшаться с ростом θ. Поэтому, если A поддерживается при потенциале 1, а B и C — при потенциале 0, заряд на А будет равен $a=a_0-\alpha\theta$, где a и α — некоторые постоянные, и a есть емкость A.

Если A и B симметричны, то емкость B равна $b=b_0+\alpha\theta$.

Емкость C при движении не меняется, потому что движение приводит только к тому, что различные части C оказываются противолежащими промежутку между A и B. Поэтому $c=c_0$.

Количество электричества, индуцированное на C, когда потенциал B повышен до единицы, равно $p=p_0-\alpha\theta$.

Коэффициент индукции между A и C равен $q=q_0+\alpha\theta$.

Коэффициент индукции между A и B не меняется при движении C и остается постоянным, $r=r_0$.

Таким образом, электрическая энергия системы равна

$$W=\frac{1}{2}A^2a+\frac{1}{2}B^2b+\frac{1}{2}C^2c+BCp+CAq+ABr,$$

и если Θ — момент силы, действующей в сторону увеличения угла θ, то $\Theta=dW/d\theta$, причем величины A, B, C предполагаются постоянными,

$$=\frac{1}{2}A^2\frac{da}{d\theta}+\frac{1}{2}B^2\frac{db}{d\theta}+\frac{1}{2}C^2\frac{dc}{d\theta}+BC\frac{dp}{d\theta}+CA\frac{dq}{d\theta}+AB\frac{dr}{d\theta}=$$
$$=-\frac{1}{2}A^2\alpha+\frac{1}{2}B^2\alpha-BC\alpha+CA\alpha,$$

или

$$\Theta=\alpha\,(A-B)\,\{C-(A+B)/2\}.$$

В современной конструкции Томсоновского Квадрантного Электрометра проводники A и B имеют вид цилиндрической коробки, полностью разделенной на четыре квадранта, каждый из которых изолирован. Квадранты соединены проводами так, что два противоположных квадранта A и A соединены между собой, как и остальные два квадранта B и B' [рис. 20].

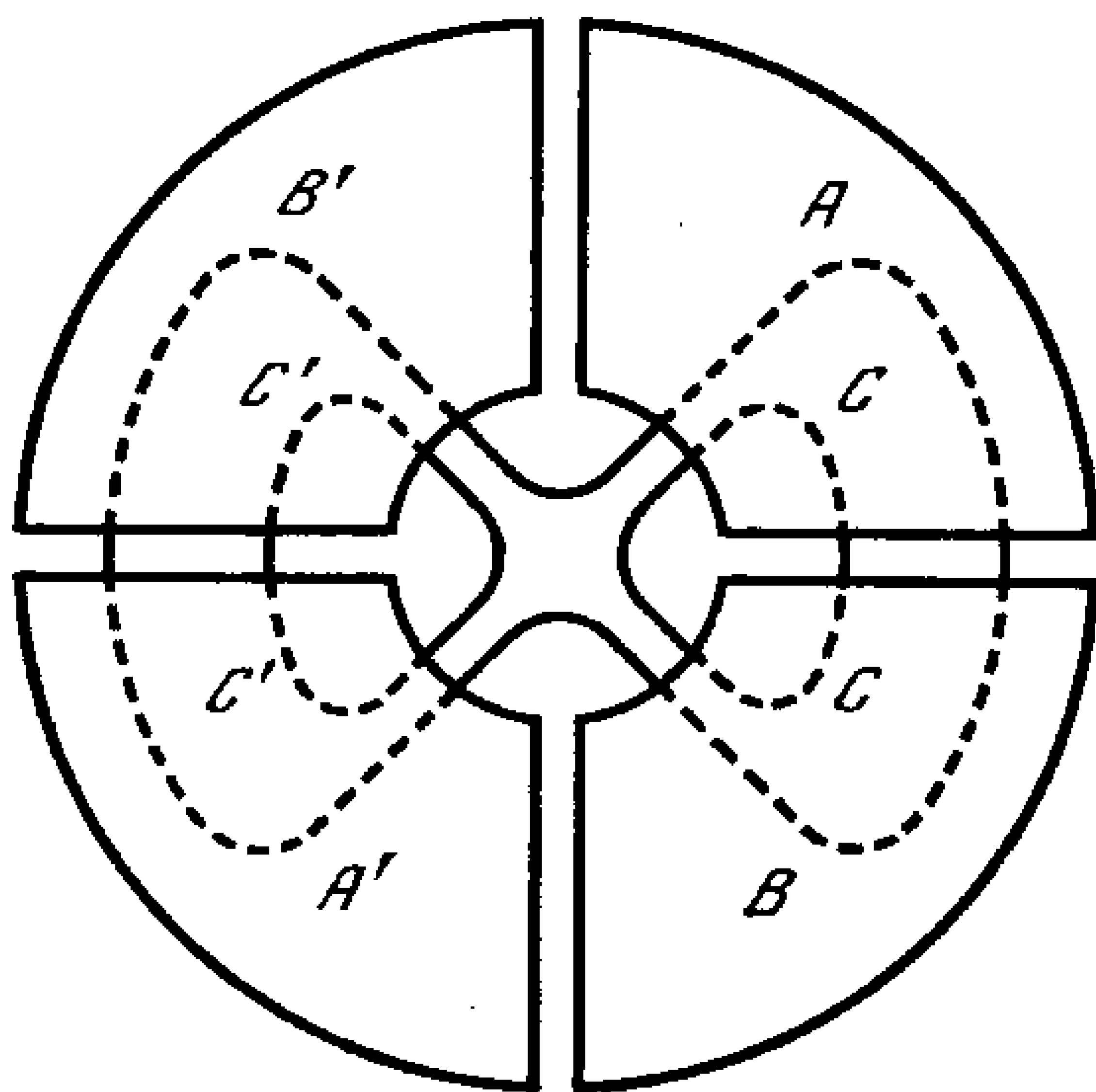


Рис. 20

Проводник C подвешен так, чтобы он мог поворачиваться вокруг вертикальной оси, и может состоять из двух расположенных напротив друг друга плоских дуг в четверть окружности, поддерживаемых по краям радиусами. В положении равновесия эти квадранты должны находиться частично в пределах A, частично в пределах B, а поддерживающие радиусы должны находиться вблизи от середины квадрантов, составляющих пустотелое основание, так что перегородки коробки и края дуг с радиусами на электроде C могут быть настолько далеко друг от друга, насколько это возможно.

Проводник C постоянно поддерживается при высоком значении потенциала будучи соединен с внутренней обкладкой лейденской банки, которая образует камеру прибора. Электроды B и A соединяются первый с Землей, а второй с телом, потенциал. которого нужно измерить.

Если потенциал этого тела равен нулю, и если прибор налажен, то не должно быть никакой силы, приводящей C в движение, но если потенциал A имеет тот же знак, что и потенциал C, тогда C будет стремиться повернуться от A к B с примерно постоянной силой, и подвеска будет закручиваться до тех пор, пока в игру не вступит равная сила и не приведет к равновесию. В определенных пределах отклонение электрода C будет пропорционально произведению

$$(A-B)\{C-(A+B)/2\}.$$

Увеличивая потенциал C, можно увеличить чувствительность прибора, и для малых значений $(A+B)/2$ отклонение будет приблизительно пропорционально $(A-B)C$.

Об измерениях электрического потенциала

220. Для того чтобы определить большие разности потенциалов в абсолютной мере, мы можем использовать электрометр с притягивающимся диском и сравнить притяжение с действием веса. Если мы в то же самое время измеряем разность потенциалов тех же самых проводников с помощью квадрантного электрометра, мы можем установить абсолютное значение определенных отсчетов по шкале квадрантного электрометра, и таким путем мы можем выразить цену делений квадрантного электрометра через потенциал подвешенной части и через момент кручения подвеса.

Чтобы определить потенциал заряженного проводника, имеющего конечные размеры, мы можем присоединить этот проводник к одному из электродов электрометра, в то время как другой электрод соединен с Землей или с телом, имеющим известный потенциал. Отсчет электрометра даст значение потенциала, которое будет иметь проводник, после того как заряд проводника разделится между проводником и той частью электрометра, с которой проводник находится в контакте. Если K обозначает емкость проводника, а K' — емкость этой части электрометра и если V и V' обозначают потенциалы этих тел перед соединением, то их общий потенциал после соединения будет равен

$$\bar{V}=(KV+K'V')/(K+K').$$

Таким образом, первоначальный потенциал проводника был равен

$$V=\bar{V}+(K'/K)\,(\bar{V}-V').$$

Если размеры проводника невелики в сравнении с размерами электрометра, величина K' будет сравнима с K, и до тех пор, пока мы не сможем определить значения K и K', величина второго члена этой формулы будет внушать подозрения. Но если мы можем сделать так, что потенциал электрода в электрометре будет почти точно равен потенциалу тела перед присоединением, неопределенность значений K и K' будет мало существенна.

Если мы приблизительно знаем величину потенциала тела, мы можем зарядить электрод с помощью «пополнителя» или иным путем до этого приблизительного значения потенциала, и последующий эксперимент даст более верное приближение. Таким путем мы можем измерить потенциал проводника, емкость которого мала в сравнении с емкостью электрометра.

Измерение потенциала в данной точке в воздухе

221. *Первый метод.* Возьмем сферу, радиус которой мал по сравнению с расстоянием от электризованных проводников, и поместим ее центр в данной точке. Соединим ее тонкой проволокой с Землей, затем изолируем ее, поднесем к электрометру и определим полный заряд на сфере.

Тогда, если потенциал в данной точке равен V, а радиус сферы равен a, заряд на сфере будет $-Va=Q$, и если потенциал сферы при измерении электрометром, помещенным в комнату с заземленными стенками, равен V', то $Q=V'a$,

причем $V+V'=0$, или потенциал воздуха в точке, где был расположен центр сферы, равен по величине, но противоположен по знаку потенциала сферы, после того как она была заземлена, затем изолирована и внесена в комнату.

Этот метод применялся г-ном Дельманом из Кройцнаха при измерении потенциала на определенной высоте над поверхностью Земли.

Второй метод. Мы предположили, что сфера помещается в данной точке и вначале заземляется, а затем изолируется и переносится в пространство, окруженное проводящим веществом при нулевом потенциале.

Теперь рассмотрим тонкий изолированный провод, идущий от электрода электрометра к тому месту, где нужно измерить потенциал. Пусть сфера вначале будет полностью разряжена. Этого можно достигнуть, поместив ее внутрь сосуда, сделанного из того же металла и почти полностью охватывающего сферу, и приведя ее в соприкосновение с сосудом. Пусть теперь разряженная таким образом сфера переносится к концу провода и прикасается к нему. Поскольку сфера не электризована, она будет иметь потенциал воздуха в данной точке. Если провод, ведущий к электроду, имеет тот же самый потенциал, последний не изменится при контакте, но если потенциал электрода имеет другое значение, то после контакта со сферой он будет ближе к потенциалу воздуха, чем был до этого. Путем повторения таких операций, в которых сфера поочередно разряжается и приводится в контакт с электродом, потенциал этого электрода электрометра будет постепенно приближаться к потенциалу воздуха в данной точке.

222. Чтобы измерить потенциал проводника, не прикасаясь к нему, мы можем измерить потенциал воздуха в любой точке по соседству с проводником и по результатам измерений вычислить потенциал проводника. Если бы существовала полость, почти полностью окруженная проводником, то потенциал воздуха в каждой точке этой полости был бы очень близок к потенциалу проводника.

Таким способом сэр У. Томсон установил, что если два полые проводника, один медный, а другой цинковый, находятся в металлическом контакте, то потенциал воздуха в полости, окруженной цинком, положителен по отношению к потенциалу воздуха в полости, окруженной медью.

Третий метод. Если мы каким-нибудь способом можем сделать так, что последовательность малых тел будет отделяться от конца электрода, потенциал электрода будет приближаться к потенциалу окружающего воздуха. Этого можно добиться, высыпая дробь, металлические опилки, песок или выпуская воду через воронку или трубку, соединенную с электродом. Точка, в которой измеряется потенциал,— это та точка, в которой поток перестает быть непрерывным и разбивается на отдельные частицы или капли.

Другой удобный метод состоит в том, что к электроду прикрепляется медленно горящая спичка. Вблизи от горящего конца потенциал электрода быстро становится равным потенциалу воздуха. Если разность потенциалов велика, то даже тонкое металлическое острие может вызвать разряд посредством частиц воздуха, но если мы хотим уменьшить разность потенциалов до нуля, мы должны использовать один из указанных выше методов.

Если мы хотим установить только знак разности потенциалов в двух точках, а не ее численное значение, мы можем сделать так, что капли или металлические опилки будут выпускаться в одном из этих мест через носик, соединенный с другим местом, и улавливать эти капли или опилки в изолированный сосуд. Каждая

капля, когда она падает, заряжена определенным количеством электричества, а попав в сосуд, полностью разряжается. Поэтому заряд сосуда непрерывно накапливается, и после того как упадет достаточное количество капель, заряд сосуда может быть определен с помощью самых грубых методов. Знак заряда будет положительным, если потенциал того места, которое соединено с носиком, является положительным по отношению к потенциалу другого места.

ИЗМЕРЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ

Теория пробной плоскости

223. Для проверки результатов математической теории, дающей распределение электричества по поверхности проводника, необходимо уметь измерять поверхностную плотность в разных точках проводника. Для этой цели Кулон использовал небольшой диск из позолоченной бумаги, прикрепленный к изолирующему стержню из шеллака. Он прикладывал этот диск к различным точкам проводника, располагая диск таким образом, чтобы он прилегал к поверхности проводника настолько, насколько это возможно. Затем он удалял диск с помощью изолирующего стержня и измерял своим электрометром заряд на диске.

Так как поверхность диска, приложенная к проводнику, почти совпадает с поверхностью проводника, он заключил, что поверхностная плотность на внешней поверхности диска почти равняется поверхностной плотности заряда на поверхности проводника в том же месте и что заряд на диске после удаления был приблизительно равен заряду на такой площади поверхности проводника, которая равна площади одной стороны диска. Диск, применяемый таким путем, называется Кулоновой Пробной Плоскостью.

Поскольку против использования Кулоном пробной плоскости выдвигались возражения, я сделаю несколько замечаний о теории этого опыта.

Этот опыт состоит в том, что мы приводим малое проводящее тело в контакт с поверхностью проводника в той точке, где нужно измерить плотность, а затем удаляем тело и определяем его заряд.

Нам нужно сначала показать, что заряд малого тела, находящегося в контакте с проводником, пропорционален поверхностной плотности, которая была в точке контакта до того, как туда было помещено малое тело.

Мы будем предполагать, что все размеры малого тела, и особенно его размер в направлении нормали к точке контакта, малы в сравнении с любым из радиусов кривизны проводника в точке контакта. Таким образом, можно пренебречь изменением результирующей силы из-за того, что проводник предполагается жестко наэлектризованным внутри области, занятой малым телом, и мы можем рассматривать поверхность проводника вблизи от малого тела как плоскую поверхность.

Далее, заряд, который получит малое тело при контакте с плоской поверхностью, будет пропорционален результирующей силе, нормальной к поверхности, т. е. поверхностной плотности. Мы в дальнейшем определим величину заряда для различных форм тела.

Затем нам следует показать, что, когда малое тело удаляется, между ним и проводником не проскакивает искры, так что оно уносит свой заряд с собой. Это, очевидно, потому, что, когда тела находятся в контакте, их потенциалы одни и

те же, и поэтому плотность на участках, ближайших к точке контакта, крайне мала. Когда малое тело отведено на очень короткое расстояние от проводника, о котором мы будем предполагать, что он наэлектризован положительно, тогда электризация в точке, ближайшей к малому телу, уже не равна нулю, а положительна, но, поскольку заряд малого тела положителен, положительная электризация вблизи от малого тела меньше, чем в других соседних точках поверхности.

Далее, прохождение искры зависит, вообще говоря, от величины результирующей силы, а та — от поверхностной плотности. Таким образом, если мы предполагаем, что проводник не настолько сильно электризован, чтобы разряжаться, теряя электричество с других частей поверхности, то не будет и искрового разряда между малым телом и частью поверхности проводника, так как мы показали, что эта часть имеет меньшую поверхностную плотность.

224. Мы теперь рассмотрим различные формы малого тела.

Предположим, что это — малая полусфера, приложенная к проводнику так, что она соприкасается с проводником в центре своей плоской стороны.

Пусть проводник представляет собой большую сферу. Изменим форму полусферы так, что ее поверхность будет несколько больше, чем полусфера, и будет встречать поверхность сферы под прямыми углами. Тогда мы имеем случай, для которого мы уже получили точное решение (см. п. 168).

Если A и B — центры двух сфер, пересекающих друг друга под прямыми углами, DD' — диаметр круга, по которому они пересекаются, а C — центр этого круга, тогда, если V есть потенциал проводника, внешняя поверхность которого совпадает с поверхностью этих двух сфер, количество электричества на внешней поверхности, принадлежащей сфере A, равно

$$(1/2)V\,(AD+BD+AC-CD-BC),$$

а количество электричества на внешней поверхности, принадлежащей сфере B, равно

$$(1/2)V\,(AD+BD+BC-CD-AC),$$

причем полный заряд равен сумме этих величин, или

$$V\,(AD+BD-CD).$$

Если радиусы сфер равны α и β, тогда, если радиус α велик в сравнении с β, заряд на сфере B относится к заряду на сфере A как

$$\frac{3\beta^2}{4\alpha^2}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{6}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\text{и т. д.}\right) \text{ относится к единице.}$$

Пусть теперь σ обозначает однородную поверхностную плотность на A после удаления B. Тогда заряд на A равен $4\pi\alpha^2\sigma$, и поэтому заряд на B равен

$$3\pi\beta^2\sigma\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{\beta}{\alpha}+\text{ и т. д.}\right),$$

т. е., если радиус β очень мал в сравнении с α, заряд на полусфере B в три раза превышает такой заряд, который при поверхностной плотности заряда σ содержался бы на площади, равной площади кругового основания полусферы.

Из п. 175 следует, что если малая сфера приводится в соприкосновение с электризованным телом, а затем удаляется от него на некоторое расстояние, средняя плотность заряда на сфере относится к плотности заряда на теле в точке соприкосновения как π^2 относится к 6 или как 1,641 к 1.

225. Наиболее удобная форма для пробной плоскости — это форма круглого диска. Поэтому мы покажем, как измерять заряд на таком диске, положенном на электризованную поверхность. Для этой цели мы построим такую потенциальную функцию, у которой одна из эквипотенциальных поверхностей напоминала бы круговую выпуклость с плоской вершиной, схожую по своей общей форме с диском, лежащим на плоскости.

Пусть σ — поверхностная плотность на плоскости; эту плоскость мы примем за плоскость xy.

Потенциал, отвечающий этой электризации, будет $V=-4\pi\sigma z$.

Пусть теперь два диска радиуса a жестко наэлектризованы с плотностями заряда $-\sigma'$ и $+\sigma'$. Пусть первый из них помещен на плоскость центром в начало координат, а второй — параллельно ему на очень малом расстоянии c.

Тогда можно показать, как мы в этом убедимся в теории магнетизма, что потенциал этих двух дисков в любой точке равен $\omega\sigma' c$, где ω есть телесный угол с вершиной в этой точке, опирающейся на края любого из дисков. Таким образом, потенциал всей системы будет $V=-4\pi\sigma z+\sigma' c\omega$.

Формы эквипотенциальных поверхностей и линий индукции даны на левой стороне рис. XX в конце второго тома.

Обратим внимание на форму поверхности, для которой $V=0$. Эта поверхность проведена пунктиром.

Обозначим через r расстояние любой точки от оси z. Тогда для значений r, много меньших, чем a, и для малых z находим $\omega=2\pi-2\pi(z/a)+$ и т. д.

Таким образом, для значений r, много меньших, чем a, уравнение нулевой эквипотенциальной поверхности имеет вид

$$0=-4\pi\sigma z_0+2\pi\sigma' c-2\pi\sigma'\frac{z_0 c}{a}+\text{ и т. д.},$$

или

$$z_0=\frac{\sigma' c}{2\sigma+\sigma'\frac{c}{a}}.$$

Следовательно, эта эквипотенциальная поверхность вблизи оси является почти плоской.

Вне диска, где величина r много больше, чем a, телесный угол ω равен нулю при $z=0$, так что плоскость xy представляет собой часть эквипотенциальной поверхности.

Чтобы выяснить, где встречаются эти две части поверхности, найдем, в какой точке этой плоскости $dV/dz=0$.

Если величина r очень близка к a, телесный угол ω становится приблизительно сферическим двуугольником на сфере единичного радиуса. Угол этого двуугольника равен $\operatorname{arctg}[z/(r-a)]$, и, следовательно, $\omega=2\operatorname{arctg}[z/(r-a)]$. Поэтому при $z=0$ выполняется приблизительное равенство $\frac{dV}{dz}=-4\pi\sigma+\frac{2\sigma' c}{r-a}$.

Таким образом, при $dV/dz=0$

$$r_0 = a + \frac{\sigma' c}{2\pi\sigma} = a + \frac{z_0}{\pi} \quad \text{(приблизительно)}.$$

Поэтому эквипотенциальная поверхность $V=0$ состоит из напоминающей диск фигуры радиуса r_0 и примерно одинаковой толщины z_0 и из той части бесконечной плоскости xy, которая лежит за пределами этой фигуры.

Поверхностный интеграл по всему диску дает находящийся на нем электрический заряд. Можно показать, как это сделано в теории круговых токов, часть IV, п. 704, что заряд на диске равен

$$Q = 4\pi a\sigma' c\left\{\ln\frac{8a}{r_0 - a} - 2\right\} + \pi\sigma r_0^2.$$

Заряд на такой же площади плоской поверхности равен $\pi\sigma r_0^2$, таким образом, заряд на диске превышает заряд на такой же площади плоской поверхности в отношении

$$1 + 8\frac{z_0}{r_0}\ln\frac{8\pi r_0}{z_0} \quad \text{к единице,}$$

где z_0 — толщина, r_0 — радиус диска, и предполагается, что величина z_0 мала в сравнении с r_0.

Об электрических накопителях и об измерении емкости

226. Накопителем или Конденсатором называется прибор, состоящий из двух проводящих поверхностей, разделенных изолирующей диэлектрической средой.

Лейденская банка представляет собой накопитель, в котором внутренняя обкладка из оловянной фольги отделена от внешней обкладки стеклом, из которого сделана банка. Первоначальная лейденская склянка (phial) представляла собой стеклянный сосуд, содержавший воду, которая отделялась стеклом от руки, державшей сосуд.

Внешняя поверхность любого изолированного проводника может рассматриваться как одна из поверхностей накопителя, в то время как другую поверхность образует Земля или стены комнаты, в которой помещается проводник, а находящийся между этими поверхностями воздух образует диэлектрическую среду.

Емкость накопителя измеряется тем количеством электричества, которым нужно зарядить внутреннюю поверхность, для того чтобы разность между потенциалами поверхностей сделать равной единице.

Поскольку каждый электрический потенциал есть сумма некоторого числа частей, отыскиваемых как результат деления каждого элемента заряда на его расстояние до точки наблюдения, отношение количества электричества к потенциалу должно иметь размерность длины. Таким образом, электростатическая емкость есть величина размерности длины, т. е. мы можем измерять ее в футах или метрах, не внося никакой неоднозначности.

В электрических исследованиях накопители используются для двух основных целей: для получения и удержания больших количеств электричества в настолько малых объемах, насколько это возможно, и для измерения определен-

ных количеств электричества по величине потенциала, который они создают в накопителе.

Для удержания электрических зарядов не было создано ничего более совершенного, чем лейденская банка. Основная часть потерь вызывается перетеканием электричества по влажной непокрытой поврхности стекла от одной обкладки к другой. Это может быть в значительной степени предотвращено с помощью искусственного осушения воздуха внутри банки, а также лакировкой поверхности стекла там, где оно соприкасается с атмосферой. В электроскопах сэра У. Томсона потери ото дня ко дню составляют очень малый процент, и я полагаю, что никакая часть этих потерь не вызывается прямым прохождением электричества через воздух или через стекло, если стекло хорошего качества, но что потери происходят главным образом из-за прохождения электричества вне банки вдоль различных изолирующих стержней и стеклянных поверхностей прибора.

Действительно, этот же самый исследователь электричества сообщил заряд серной кислоте, помещенной в большую колбу с длинным горлом, затем герметически закрыл горло, расплавив его, так что заряд был полностью окружен стеклом; по истечении нескольких лет было обнаружено, что заряд еще сохранялся.

Однако стекло обладает этими изолирующими свойствами только тогда, когда оно холодное; заряд утекает сразу, если стекло нагреть до температуры чуть ниже 100 °С.

Если желательно получить большую емкость в малом объеме, удобно использовать накопители, в которых изолятором служит листовой каучук, слюда или бумага, пропитанная парафином.

227. Для накопителей второго класса, предназначенных для измерения количеств электричества, все твердые диэлектрики должны применяться с большой осторожностью из-за свойства, которым они обладают, называемого Электрической Абсорбцией.

Единственным надежным диэлектриком для таких накопителей является воздух, который имеет то неудобство, что если пыль или грязь попадает в узкое пространство между двумя поверхностями, где должен быть воздух, то при этом не только изменяется толщина воздушной прослойки, но и может произойти соединение между противолежащими поверхностями, и тогда накопитель не будет держать заряд.

Чтобы определить емкость накопителя в абсолютной мере, т. е. в футах или метрах, мы должны либо сначала определить его форму и размер, а затем решить задачу о распределении электричества на его противоположных поверхностях, либо должны сравнить его емкость с емкостью другого накопителя, для которого эта задача уже решена.

Поскольку эта задача очень трудна, лучше всего начать с накопителя такой формы, для которой решение известно. Так, известно, что емкость изолированного шара в неограниченном пространстве измеряется радиусом шара.

Действительно, шар, подвешенный в комнате, использовался гг. Кольраушем и Вебером как абсолютный стандарт, с которым они сравнивали емкость других накопителей.

Однако, емкость шара умеренных размеров настолько мала по сравнению с емкостью обычно используемых накопителей, что шар не является подходящей стандартной мерой.

Его емкость может быть значительно повышена, если окружить шар пустотелой концентрической сферической поверхностью несколько большего радиуса. Тогда емкость внутренней поверхности есть четвертый член пропорции, в которую входят толщина воздушного слоя и радиусы обеих поверхностей.

Сэр У. Томсон использовал такое устройство, как стандарт емкости, однако имеются значительные трудности, связанные с изготовлением правильных сферических поверхностей, с приведением их в концентрическое расположение и с достаточно точным измерением их радиусов и расстояния между ними.

Поэтому мы склоняемся к тому, чтобы предпочесть для абсолютного измерения емкости форму, в которой противоположные поверхности представляют собой параллельные плоскости.

Точность изготовления плоской поверхности может быть легко проконтролирована, расстояние между ними может быть измерено микрометрическим винтом и может меняться, принимая непрерывный ряд значений, что является особенно важным качеством измерительного прибора.

Единственная остающаяся трудность вызывается тем обстоятельством, что плоскости с необходимостью должны быть ограничены и что распределение электричества вблизи от границ этих плоскостей не вычислено надежно. Верно, что если мы возьмем плоскости в виде одинаковых круглых дисков, радиус которых велик в сравнении с расстоянием между ними, то мы можем рассматривать края дисков такими, как если бы они были прямолинейными, и вычислить распределение электричества по методу, развитому Гельмгольцем и описанному в п. 202. Однако следует заметить, что в этом случае часть электричества распределена на задней стороне каждого диска и при вычислении предполагалось, что поблизости нет других проводников, а это предположение не выполняется и не может выполняться в случае малого прибора.

228. Мы поэтому предпочитаем следующую установку, созданную сэром У. Томсоном, которую мы можем назвать установкой с защитным кольцом, с помощью которой количество электричества на изолированном диске может быть точно определено по его потенциалу.

Накопитель с защитным кольцом

Bb представляет собой цилиндрической сосуд, сделанный из проводящего материала, внешняя поверхность его верхнего торца есть точная плоскость Эта верхняя поверхность состоит из двух частей: из диска *A* и широкого кольца *BB*, окружающего диск и отделенного от него по всей окружности очень малым интервалом, как раз достаточным для того, чтобы не проскакивала искра. Верхняя поверхность диска находится точно в той же плоскости, что и поверхность защитного кольца. Диск поддерживается стойками *GG* из изолирующего материала. *C* представляет собой металлический диск, нижняя поверхность которого является точной плоскостью и параллельна *BB*. Диск *C* значительно больше, чем *A*. Его расстояние от диска *A* устанавливается и измеряется микрометрическим винтом, который не показан на чертеже [рис. 21].

Этот накопитель используется как измерительный прибор следующим образом.

Предположим, что *C* имеет нулевой потенциал, а диск *A* и сосуд *Bb* оба имеют потенциал *V*. Тогда на обратной стороне диска не будет никакой электри-

зации, потому что сосуд почти замкнут и весь находится под одним и тем же потенциалом. Электризация на кромке диска будет очень мала, так как BB имеет тот же самый потенциал, что и диск. Электризация на лицевой стороне диска будет почти однородной, и поэтому полный заряд на диске почти точно будет представлен произведением площади диска на поверхностную плотность на плоскости, как дано в п. 124.

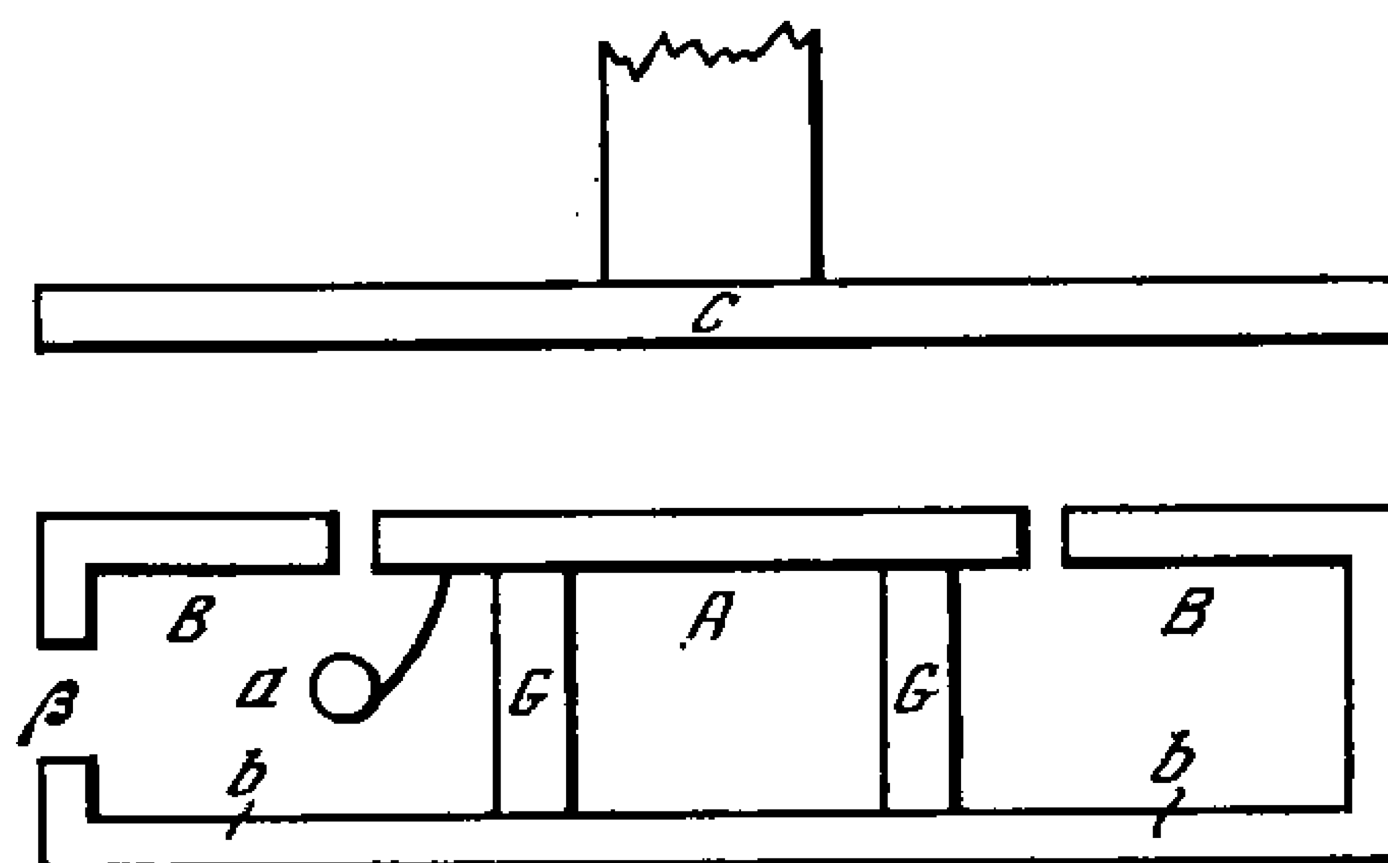


Рис. 21

Действительно, из исследования, проведенного в п. 201, мы нашли, что заряд на диске равен

$$V\left\{\frac{R^2+R'^2}{8A}+\frac{R'^2-R^2}{8A}\frac{\alpha}{A+\alpha}\right\},$$

где R — радиус диска, R' — радиус отверстия в защитном кольце, A — расстояние между A и C, α — величина, которая не может превышать $(R-R')(\ln 2)/\pi$.

Если промежуток между диском и защитным кольцом мал в сравнении с расстоянием между A и C, второй член будет очень малым, и заряд на диске будет приблизительно равен $V(R^2+R'^2)/8A$.

Приведем теперь сосуд Bb в соединение с Землей. Заряд на диске A уже не будет распределен однородно, но останется таким же по величине, и, если мы теперь разрядим A, мы получим количество электричества, которое мы знаем как функцию первоначальной разности потенциалов V и измеримых величин R, R' и A.

О сравнении емкости накопителей

229. Та форма накопителя, которая наиболее подходит для определения его емкости в абсолютной мере, исходя из формы и величины его частей, оказывается обычно не самой удобной для электрических экспериментов. Желательно, чтобы повседневно применяемыми мерами емкости служили накопители, имеющие только две проводящих поверхности, одна из которых настолько полно окружена второй, насколько это возможно. С другой стороны, накопитель с защитным кольцом имеет три независимые проводящие части, которые должны заряжаться и разряжаться в определенном порядке. Поэтому желательно иметь возможность сравнить емкости двух накопителей с помощью некоторого электрического процесса и тем самым испытывать накопители, которые затем могут служить вторичными стандартами.

Сначала я покажу, как определить равенство емкостей у двух накопителей с защитными кольцами.

Пусть A — диск, B — защитное кольцо с остальными частями присоединенного к нему проводящего сосуда и C — большой диск одного из этих накопителей. Соответствующие части второго обозначим через A', B' и C'.

Если один из этих накопителей имеет более простое устройство и состоит только из двух проводников, нам следует только опустить B или B' и предполагать, что A обозначает внутреннюю, а C — внешнюю проводящую поверхности, причем подразумевается, что C окружает A.

Предположим, что производятся следующие соединения.

Пусть B всегда находится в соединении с C', а B' — с C, другими словами, пусть каждое защитное кольцо соединено с большим диском другого конденсатора.

(1) A соединяется с B и C' и с положительно заряженным электродом J лейденской банки, и пусть A' соединяется с B' и C и с Землей. (2) A, B и C' изолируются от J. (3) A изолируется от B и C' и A' — от B' и C. (4) B и C' соединяются с B' и C и с Землей. (5) A соединяется с A'. (6) A и A' соединяются с электроскопом E.

Мы можем изобразить эти соединения следующим образом:

$$
\begin{array}{lllll}
(1) & 0=C=B'=A' & | & A=B=C'=J \\
(2) & 0=C=B'=A' & | & A=B=C' \mid J \\
(3) & 0=C=B' \mid A' & | & A \mid B=C' \\
(4) & 0=C=B' \mid A' & | & A \mid B=C'=0 \\
(5) & 0=C=B' \mid A' & = & A \mid B=C'=0 \\
(6) & 0=C=B' \mid A'=E=A \mid B=C'=0 & &
\end{array}
$$

Здесь знак равенства означает электрическое соединение, а вертикальная черта означает изоляцию.

В положении (1) два накопителя заряжены противоположно в том смысле, что A имеет положительный заряд, а A' — отрицательный, причем заряды на A и A' равномерно распределены по внешней поверхности, лежащей напротив большого диска в каждом накопителе.

В положении (2) банка отключена, а в положении (3) заряды на A и A' изолированы.

В положении (4) защитные кольца соединяются с большими дисками, и заряды на A и A', хотя и не меняются по величине, распределяются теперь по всей поверхности электродов.

В положении (5) A соединяется с A'. Если соответствующие заряды равны по величине и противоположны по знаку, электризация будет полностью уничтожена, и это обстоятельство проверяется в положении (6) с помощью электроскопа E.

Электроскоп E будет показывать положительную или отрицательную электризацию в соответствии с тем, чья емкость больше — A или A'.

С помощью специального переключательного устройства все эти операции могут быть выполнены в нужной последовательности за очень малую долю секунды, и емкости регулируются так, чтобы электроскоп не отмечал никакой электризации. Этим путем емкость накопителя может быть отрегулирована так, что она будет равна емкости любого другого или сумме емкостей нескольких накопителей, и, таким образом, можно получить систему накопителей, емкость каждого из которых определена в абсолютном выражении, т. е. в футах или метрах, а конструкция этих накопителей в то же время является наиболее подходящей для электрических экспериментов.

Этот метод сравнения, по-видимому, окажется полезен при определении удельной индуктивной способности различных диэлектриков, имеющих форму пластин или дисков. Если диск из диэлектрика расположен между A и C и размеры диска значительно больше, чем A, то емкость накопителя изменяется и

становится равной емкости того же самого накопителя с более близкими друг к другу пластинами A и C. Если накопитель с диэлектрической пластиной и с расстоянием x между A и C имеет такую же емкость, как тот же самый накопитель без диэлектрика с расстоянием x' между A и C, тогда, если a — толщина пластины и K — ее удельная индуктивная диэлектрическая способность, отнесенная к этой величине для воздуха, то $K=a/(a+x'-x)$.

Система из трех цилиндров, описанная в п. 127, была использована сэром У. Томсоном в качестве накопителя, емкость которого может быть увеличена или уменьшена на измеримые количества.

Опыты гг. Гибсона и Барклая (Gibson and Barclay) с этим прибором описаны в *Proceedings of the Royal Society*, Feb. 2, 1871 и в *Phil. Trans.*, 1871, p. 573. Они нашли для удельной индуктивной способности парафина значение 1,975, если для воздуха эта величина равна единице.

ЧАСТЬ II
ЭЛЕКТРОКИНЕМАТИКА

ГЛАВА I
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

230. Мы видели в п. 45, что если проводник находится в электрическом равновесии, то потенциал в каждом токе проводника должен быть одним и тем же.

Зарядим два проводника A и B таким образом, чтобы потенциал проводника A был выше, чем потенциал B. Если теперь эти два тела связать посредством металлической проволоки C, касающейся их обоих, то часть заряда, находящегося на теле A, перейдет на B и за короткое время потенциалы A и B уравняются.

231. В это время в проволоке C наблюдаются определенные явления, которые называются явлениями электрического неравновесия (conflict), или электрического тока.

Первое из этих явлений состоит в переходе положительной электризации от A к B и отрицательной электризации от B к A. Этот переход можно осуществить более медленным способом, если взять небольшое изолированное тело и поочередно приводить его в соприкосновение с телами A и B. С помощью этого процесса, который мы можем назвать электрическим переносом, последовательные малые порции заряда с каждого тела переносятся на другое. Каждый раз некоторое количество электричества, или состояния электризации, переходит с одного места на другое по некоторому пути в пространство между этими телами.

Поэтому, каково бы ни было наше мнение о природе электричества, мы должны принять, что описанный нами процесс представляет собой ток электричества. Этот ток может быть описан как ток положительного электричества от A к B, или как ток отрицательного электричества от B к A, или как комбинация этих двух токов.

По теории Фехнера (Fechner) и Вебера (Weber), электрический ток рассматривается как комбинация двух токов: тока положительного электричества и в точности равного ему тока отрицательного электричества, движущихся в противоположном направлении через ту же среду. Это крайне искусственное предположение о структуре тока необходимо иметь в виду для того, чтобы понять формулировку наиболее ценных экспериментальных результатов, полученных Вебером.

Если, как в п. 36, мы будем считать, что за единицу времени от A к B передается P единиц положительного электричества, а от B к A передается N единиц отрицательного электричества, то по теории Вебера $P=N$, т. е. P или N следует принять за численную меру тока.

В противоположность этому мы не будем делать предположений относительно связи между P и N, принимая во внимание лишь результат протекания тока, а

именно перенос $P+N$ единиц положительного электричества от A к B. Мы, таким образом, будем считать истинной мерой тока величину $P+N$. Поэтому ток, величину которого Вебер оценил бы в единицу, мы будем считать равным двум.

О постоянных токах

232. В случае тока между двумя изолированными проводниками, имеющими разные потенциалы, процесс быстро заканчивается выравниванием потенциалов этих двух тел, и поэтому ток является, по существу, Переходным Током.

Однако существуют способы, с помощью которых разность потенциалов между проводниками можно поддерживать постоянной. В этом случае ток будет продолжать идти с однородной силой как некоторый Постоянный Ток.

Вольтова батарея

Наиболее удобный способ получить постоянный ток дает Вольтова батарея. Для определенности мы опишем Элемент Даниэля.

Раствор сульфата цинка наливается в ячейку из пористой глины, а эта ячейка помещается в сосуд, в котором содержится насыщенный раствор сульфата меди. Кусок цинка погружается в сульфат цинка, а кусок меди — в сульфат меди. К цинку и меди над поверхностями жидкостей припаиваются проводники. Это устройство называется ячейкой, или элементом батареи Даниэля (см. п. 272).

233. Если изолировать элемент, поместив его на непроводящую подставку, и если проволоку, соединенную с медным электродом, привести в соприкосновение с каким-нибудь проводником A, а проволоку, соединенную с цинковым электродом, привести в соприкосновение с другим каким-нибудь проводником B, сделанным из того же металла, что и проводник A, то с помощью чувствительного электрометра можно показать, что потенциал проводника A будет превышать потенциал B на определенную величину. Эта разность потенциалов называется Электродвижущей Силой Элемента Даниэля.

Если теперь отъединить проводники A и B от элемента и соединить их между собой с помощью проволоки, то через нее пройдет переходный ток в направлении от A к B и потенциалы проводников A и B уравняются. Проводники A и B можно затем снова зарядить от гальванического элемента и повторять описанную процедуру до тех пор, пока элемент будет действовать. Но если проводники A и B соединены проволокой C и в то же время связаны с батареей, как описано выше, то элемент будет поддерживать постоянный ток в проволоке C и также постоянную разность потенциалов между проводниками A и B. Эта разность потенциалов, как мы увидим, не будет равна полной электродвижущей силе элемента, потому что часть этой силы расходуется на поддержание тока через сам элемент.

Несколько элементов, расположенных последовательно, так что цинк первого элемента соединен металлом с медью второго и т. д., называется Вольтовой батареей. Электродвижущая сила такой батареи равна сумме электродвижущих сил составляющих ее элементов. Если батарею изолировать и сообщить ей как целому электрический заряд, то при этом потенциал медного конца всегда будет превышать потенциал цинкового конца на величину, равную электродвижущей силе батареи, каково бы ни было абсолютное значение этих потенциалов. Эле-

менты, входящие в батарею, могут очень сильно различаться по устройству, содержать различные химические вещества и различные металлы при условии, что химические реакции не идут, пока нет тока.

234. Рассмотрим теперь вольтову батарею, у которой концы изолированы друг от друга. Медный конец будет заряжен положительно или стеклообразно, а цинковый конец будет заряжен отрицательно или смолообразно.

Соединим теперь два конца батареи проволокой. Возникнет электрический ток, который очень скоро достигнет постоянной величины. Его и называют Постоянным Током.

Свойства тока

235. Ток образует замкнутую цепь, протекая по проводам в направлении от меди к цинку, а через растворы внутри элемента — в направлении от цинка к меди.

Если разорвать цепь, разрезав проволоку, соединяющую медь одного из элементов с цинком следующего элемента, ток прекратится, а потенциал того конца проволоки, который соединен с медью, будет превышать на постоянную величину потенциал того конца проволоки, который связан с цинком. Эта постоянная величина равна полной электродвижущей силе в цепи.

Электролитическое действие тока

236. Пока цепь разомкнута, в элементах, составляющих батарею, не происходит никаких химических реакций. Но если цепь замкнута, то в каждом элементе Даниэля цинк уходит в раствор с цинка, а медь из раствора осаждается на меди.

Количество сернокислого цинка увеличивается, а количество медного купороса уменьшается, если его непрерывно не добавлять.

Количество растворенного цинка в каждом из элементов Даниэля, составляющих цепь, одинаково, как и количество осажденной меди, независимо от размера пластин в элементах. Если какой-нибудь из элементов отличается своим устройством, химическое действие в этом элементе находится в постоянном соотношении с химическим действием в элементе Даниэля. Пусть, например, один из элементов состоит из двух платиновых пластин, погруженных в водный раствор серной кислоты. Тогда на поверхности той пластины, через которую ток входит в жидкость (а именно пластины, соединенной с медью элемента Даниэля), будет выделяться кислород, а на поверхности той пластины, через которую ток покидает жидкость (именно пластины, соединенной с цинком элемента Даниэля), будет выделяться водород.

Объем водорода в точности равен удвоенному объему кислорода, выделившегося за то же время, а вес кислорода точно в восемь раз превышает вес водорода.

Вес каждого вещества, растворенного, осажденного или разложенного в любом элементе цепи, равен определенной величине, называемой электрохимическим эквивалентом данного вещества, умноженной на силу тока и на время, в течение которого шел ток.

Эксперименты, в которых был установлен этот принцип, изложены в седьмой и восьмой сериях «*Экспериментальных исследований*» Фарадея. Исследование ка-

жущихся исключений из этого правила см. в книгах Миллера «*Химическая физика*» (Miller's «*Chemical Physics*») и Видеманна «*Гальванизм*» (Wiedemann's «*Galvanismus*»).

237. Вещества, разлагаемые таким путем, называются Электролитами. Самый процесс называется Электролизом. Места, где ток входит в электролит и выходит из него, называются Электродами. Тот из них, через который ток входит, называется Анодом, а тот, через который ток покидает электролит, называется Катодом. Составляющие, на которые разлагается электролит, называются Ионами: ион, приходящий к аноду, называется Анион, а тот, который приходит к катоду, называется Катион.

Из этих названий, которые, как я полагаю, придумал Фарадей с помощью д-ра Уивелла (Whewell), первые три, а именно электрод, электролиз и электролит, являются уже общепринятыми, а тот вид проводимости тока, в котором имеет место описанное разложение и перенос компонент, называется Электролитической Проводимостью.

Если однородный электролит помещен в трубку переменного сечения, а электроды размещены на ее концах, то обнаружено, что при прохождении тока анионы появляются у анода, а катионы — у катода, причем количества этих ионов электрохимически эквивалентны и таковы, что они в сумме эквивалентны определенному количеству электролита. В других частях трубки состав электролита остается неизменным независимо от того, велико или мало сечение трубки, остается оно постоянным или меняется. Таким образом, количество электролиза в любом сечении трубки одинаково. Там, где сечение мало, процесс поэтому должен быть более интенсивным, чем там, где сечение велико; но полное количество ионов каждого сорта, которые проходят через любое поперечное сечение трубки в данный промежуток времени, есть величина неизменная для всех сечений.

Поэтому сила тока может быть измерена по количеству электролиза в данное время. Прибор, с помощью которого определяется количество продуктов электролиза, называется Вольтаметром.

Измеренная таким способом сила тока имеет одно и то же значение для каждой части цепи, а полное количество продуктов электролиза, выделившихся в вольтметре за любой данный промежуток времени, пропорционально количеству электричества, прошедшему за то же самое время через любое сечение цепи.

238. Если ввести вольтаметр в какую-нибудь часть цепи, содержащей вольтову батарею, и разорвать цепь на каком-нибудь другом участке, то мы можем предположить, что процесс измерения тока происходит следующим образом. Концы разорванной цепи обозначим через A и B, и пусть A будет анод, а B — катод. Возьмем теперь изолированный шар и будем попеременно приводить его в соприкосновение то с A, то с B. За каждый переход шар будет переносить от A к B определенное измеримое количество электричества. Это количество электричества может быть измерено электрометром, или оно может быть вычислено как произведение электродвижущей силы в цепи на электростатическую емкость шара. Электричество, таким образом, доставляется от A к B на изолированном шаре с помощью процесса, который можно назвать Переносом. При этом как в вольтаметре, так и в элементах батареи идет электролиз, и количество продуктов электролиза в каждом элементе можно сравнить с количеством электричества, перенесенным с помощью изолированного шара. Количество вещества, выделившегося в

электролизе при прохождении единицы количества электричества, называется Электрохимическим эквивалентом этого вещества.

Если измерения проводить описанным способом, взяв шар обычных размеров и управляемую батарею, то эксперимент был бы крайне утомительным и хлопотливым, потому что для разложения заметного количества электролита нужно совершить огромное число переходов. Поэтому такой эксперимент следует рассматривать скорее как иллюстрацию, имея в виду, что в действительности измерения электрохимических эквивалентов проводятся иначе. И все же описанный эксперимент можно рассматривать как пояснение самого процесса электролиза.

Действительно, мы получим представление о процессе электролиза, если будем рассматривать электролитическую проводимость как вид переноса, при котором электрохимический эквивалент вещества аниона движется вместе с отрицательным электричеством в направлении анода, в то время как электрохимический эквивалент катиона движется вместе с положительным электричеством в направлении катода, причем полное количество переносимого электричества равно единице. Мы будем иметь представление о процессе электролиза, которое, насколько я знаю, не противоречит известным фактам, хотя из-за нашего незнания природы электричества и химических соединений оно может оказаться весьма несовершенным описанием того, что имеет место в действительности.

Магнитное действие тока

239. Эрстед открыл, что магнит, помещенный вблизи от прямолинейного электрического тока, стремится стать под прямым углом к плоскости, проходящей через магнит и через ток (см. п. 475).

Если человек расположит свое тело по линии тока так, чтобы ток через провод, идущий от меди к цинку, тек бы от головы к ногам, и если человек повернется лицом к центру магнита, тогда тот конец магнита, который указывает на север, при наличии тока будет указывать в сторону правой руки человека.

Мы обсудим природу и законы этого электромагнитного воздействия, когда дойдем до четвертой части этого трактата. Здесь же отметим лишь тот факт, что электрический ток обладает магнитным действием, которое проявляется вне тока и по которому может быть установлено существование тока и измерена его величина без прерывания цепи или введения чего бы то ни было в сам ток.

Установлено, что величина магнитного действия строго пропорциональна силе тока, измеренной по продуктам электролиза в вольтаметре, и совсем не зависит от природы проводника, по которому идет ток, будь то металл или электролит.

240. Прибор, определяющий силу электрического тока по ее магнитным действиям, называется Гальванометром.

Как правило, гальванометры состоят из одного или нескольких витков, сделанных из проволоки с шелковой изоляцией. Внутри этих витков подвешен магнит, ось которого горизонтальна. Когда по проволоке проходит ток, магнит стремится принять такое положение, при котором его ось перпендикулярна плоскости катушек.

Если мы предположим, что плоскость катушек параллельна плоскости земного экватора, а ток обтекает катушку с востока на запад, в направлении кажущегося

движения Солнца, то магнит внутри катушки стремится принять такое же положение, что и Земля, рассматриваемая как большой магнит, причем северный полюс Земли подобен тому концу стрелки компаса, который указывает на Юг.

Гальванометр является наиболее удобным прибором для измерения силы электрических токов. Поэтому мы будем предполагать, изучая законы электрического тока, что создание таких приборов возможно, а обсуждение их действия отложим до четвертой части. Таким образом, когда мы говорим, что электрический ток имеет определенную величину, мы подразумеваем, что измерение выполнено с помощью гальванометра.

ГЛАВА II

ПРОВОДИМОСТЬ И СОПРОТИВЛЕНИЕ

241. Если с помощью электрометра мы определим электрический потенциал в различных точках цепи, в которой поддерживается постоянный ток, то мы найдем, что на любом участке цепи, состоящей из одного-единственного металла с однородным распределением температуры по объему, значение потенциала в любой точке превышает его значение в любой другой точке, расположенной дальше по направлению тока, на величину, зависящую от силы тока, а также от природы и размеров входящего участка цепи. Разность потенциалов в крайних точках этого участка цепи называется Внешней электродвижущей силой, действующей на данный участок. Если рассматриваемая часть цепи не является однородной, но содержит переходы от одного вещества к другому, от металлов к электролитам или от более теплых участков к более холодным, то может оказаться, что, кроме внешней электродвижущей силы, существуют еще внутренние силы, которые необходимо учитывать.

Соотношения между Электродвижущей Силой, Током и Сопротивлением были впервые исследованы д-ром Г. С. Омом в работе, которая была опубликована в 1827 году под заглавием *Die Galvanische Kette Mathematisch Bearbeitet*, а затем переведена в Taylor's *Scientific Memoirs*. Результат этих исследований для случая однородных проводников обычно называют «Закон Ома».

Закон Ома

Электродвижущая сила, действующая между крайними точками любого участка цепи, равна произведению силы тока на сопротивление этого участка цепи.

Здесь вводится новое понятие — Сопротивление проводника, которое определяется как отношение электродвижущей силы к вызываемой ею силе тока. Введение этого понятия было бы лишено научной ценности, если бы Ом не показал экспериментально, что оно отвечает реальной физической величине, т. е. имеет вполне определенное численное значение, которое меняется лишь в том случае, когда меняется природа проводника.

При этом, во-первых, сопротивление проводника не зависит от силы проходящего через него тока.

Во-вторых, сопротивление не зависит от электрического потенциала, под которым находится проводник, а также от плотности распределения электричества на поверхности проводника.

Оно зависит исключительно от природы тех материалов, из которых составлен проводник, от агрегатного состояния различных частей проводника и от его температуры.

Сопротивление проводника может быть измерено с точностью до одной десятитысячной или даже одной стотысячной доли его величины, и к настоящему времени исследовано столь много проводников, что наша уверенность в справедливости закона Ома очень высока. В шестой главе мы рассмотрим приложения этого закона и следствия из него.

Образование тепла током

242. Мы видели, что когда электродвижущая сила вызывает ток через проводник, электричество перемещается от места с более высоким к месту с более низким значением потенциала. Если это перемещение осуществляется путем конвекции, т. е. с помощью повторяющихся переносов заряда на изолированном шаре от одного места к другому, то электрические силы совершают над шаром работу, и это обстоятельство может оказаться существенным. Действительно, это оказывается отчасти существенным в случае тех цепей с сухими батареями, где электроды выполнены в виде колокольчиков, а шар, переносящий заряд, колеблется, подобно маятнику, между этими двумя колокольчиками и соударяется с ними по очереди. При этом электрическое действие поддерживает колебание маятника, а также обеспечивает распространение звука колокольчиков на расстоянии.

В случае проводящей проволоки мы имеем дело с тем же перемещением электричества от места с более высоким к месту с более низким потенциалом без совершения при этом какой-либо внешней работы. Поэтому закон Сохранения Энергии ведет нас к поискам работы, производимой внутри проводника. В электролите эта внутренняя работа состоит частично в разделении его компонентов. В других проводниках она целиком переходит в тепло.

В этом случае энергия, перешедшая в тепло, равна произведению электродвижущей силы на количество проходящего электричества. Но электродвижущая сила равна произведению тока на сопротивление, а количество электричества равно произведению тока на время. Поэтому количество тепла, умноженное на механический эквивалент единицы тепла, равно квадрату силы тока, умноженному на сопротивление и время.

Тепло, выделяемое электрическим током при преодолении сопротивления проводника, было определено д-ром Джоулем (Joule). Он сначала установил, что тепло, производимое в заданное время, пропорционально квадрату тока, а затем, проведя тщательные абсолютные измерения всех рассматриваемых величин, подтвердил справедливость уравнения

$$JH=C^2Rt,$$

где J — найденный Джоулем механический эквивалент теплоты, H — число единиц теплоты, C — сила тока, R — сопротивление проводника, t — время прохождения тока.

Эти соотношения между электродвижущей силой, работой и теплом были впервые полностью объяснены сэром У. Томсоном в статье, посвященной приложению принципа механического действия к измерению электродвижущих сил [1].

243. Аналогия между проводимостью электричества и проводимостью тепла на первый взгляд кажется почти полной. Если взять две геометрически подобных системы, таких, что коэффициент теплопроводности в любой части первой системы пропорционален проводимости электричества в соответствующей части второй системы, а также сделать и температуру в каждой части первой системы, пропорциональной электрическому потенциалу в соответствующей точке второй системы, то поток тепла через любую поверхность в первой системе будет пропорционален потоку электричества через соответствующую поверхность во второй системе.

Таким образом, в приведенном нами примере поток электричества соответствует потоку тепла, а электрический потенциал соответствует температуре. Электричество стремится перетекать от мест с высоким к местам с низким потенциалом, в точности так же, как тепло стремится перетекать от мест с высокой к местам с низкой температурой.

244. Таким образом, теория электрического потенциала и теория теплоты могут быть использованы одна для иллюстрации другой. Однако между электрическими и тепловыми явлениями имеется одно замечательное различие.

Внутри замкнутого проводящего сосуда подвесим на шелковой нитке какое-нибудь проводящее тело, затем зарядим сосуд электричеством. Потенциал сосуда и всего его содержимого сразу же возрастет, но как бы долго и как бы сильно ни электризовался сосуд, внутри него не будет замечено никаких признаков электризации, а тело, извлеченное из сосуда, не проявит никаких электрических воздействий, независимо от того, находилось ли оно в контакте с внутренней поверхностью сосуда или нет.

Однако если сосуд нагреть до высокой температуры, то тело внутри тоже нагреется до той же температуры, хотя и через значительное время. Если затем вынуть тело из сосуда, оно окажется горячим и будет таким в течение некоторого времени, продолжая испускать тепло.

Различие между этими явлениями заключается в том, что тела способны поглощать и испускать тепло, в то время как у них нет соответствующего свойства по отношению к электричеству. Нельзя нагреть тела, не передав ему определенного количества тепла, зависящего от массы и теплоемкости тела. Но электрический потенциал тела может быть сделан сколь угодно большим с помощью описанного выше способа, без передачи другому телу какого-нибудь электричества.

245. Предположим снова, что мы нагрели тело, а затем поместили его в замкнутый сосуд. Внешняя часть сосуда будет сначала иметь температуру окружающих тел, но скоро она нагреется и будет оставаться горячей, пока тепло не покинет внутреннее тело.

Невозможно выполнить соответствующий электрический эксперимент. Невозможно так наэлектризовать тело и так поместить его в закрытый сосуд, чтобы внешняя часть сосуда сначала не проявляла никаких признаков электризации, а затем стала бы наэлектризованной. Именно такого рода явление под именем абсолютного электрического заряда безуспешно искал Фарадей.

---

[1] *Phil. Mag.*, Dec., 1851.

Тепло может быть скрыто в глубине тела и не оказывать внешнего воздействия, но невозможно изолировать какое-либо количество электричества так, чтобы предотвратить его от постоянной индуктивной связи с равным количеством электричества противоположного знака.

Поэтому в электрических явлениях нет ничего такого, что соответствовало бы теплоемкости тела. Это непосредственно следует из принятой в настоящем трактате точки зрения, по которой электричество удовлетворяет тому же условию непрерывности, что и несжимаемая жидкость. Поэтому невозможно сообщить какому-либо веществу объемный электрический заряд, загоняя внутрь этого тела добавочное количество электричества (см. п. 61, 111, 329, 334).

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА МЕЖДУ СОПРИКАСАЮЩИМИСЯ ТЕЛАМИ

Потенциалы различных веществ, находящихся в контакте

246. Если мы определим потенциал пустотелого проводящего сосуда как потенциал воздуха внутри этого сосуда, то мы можем найти этот потенциал с помощью электрометра, как было описано в части I, п. 221.

Если взять теперь два полых сосуда, сделанные из различных металлов, скажем медный и цинковый, и привести их в соприкосновение друг с другом, а затем измерить потенциалы воздуха внутри каждого из сосудов, то окажется, что потенциал воздуха внутри цинкового сосуда будет положительным по сравнению с потенциалом воздуха внутри медного сосуда. Разность потенциалов зависит от природы внутренних поверхностей сосудов и принимает наибольшее значение, если цинк имеет яркую поверхность, а медь покрыта окислом.

Отсюда вытекает, что когда два различных металла находятся в контакте, возникает, вообще говоря, электродвижущая сила, действующая от одного из них к другому так, что в результате потенциал одного из металлов превышает потенциал другого на определенную величину. В этом состоит Вольтова теория Контактного Электричества.

Если мы примем определенный металл, скажем медь, за стандарт и если потенциал железа, приведенного в контакт с медью, имеющей нулевой потенциал, равен I, а потенциал цинка, приведенного в контакт с медью, имеющей нулевой потенциал, равен Z, то потенциал цинка в контакте с железом, находящимся под нулевым потенциалом, будет равен $Z—I$, если среда, окружающая металлы, остается той же самой.

Из этого результата, справедливого для любых трех металлов, следует, что разность потенциалов любых двух металлов, находящихся в контакте при равной температуре, равна разности потенциалов тех же металлов, когда они порознь находятся в контакте с третьим металлом. Поэтому если образовать цепь из любого числа металлов, находящихся при одинаковой температуре, то сразу же пос-

ле того, как потенциалы металлов примут должные значения, установится электрическое равновесие, и в цепи не будет тока.

247. Если, однако, цепь состоит из двух металлов и электролита, то, по теории Вольта, электролит стремится уравнять потенциалы металлов, с которыми находится в контакте. Поэтому электродвижущая сила при соединении двух металлов уже не уравновешивается, и существует постоянный ток. Энергия этого тока обеспечивается химическим действием, которое имеет место между электролитом и металлами.

248. Однако электрический ток может быть создан без химического воздействия, если мы можем каким-нибудь другим способом произвести выравнивание потенциалов двух металлов, находящихся в контакте. Так, например, в эксперименте сэра У. Томсона[1] медная воронка находится в контакте с вертикальным цинковым цилиндром, и, когда медные опилки пропускаются через воронку, они отделяются друг от друга и от воронки вблизи от середины цинкового цилиндра, а затем падают в помещенный снизу изолированный приемник. В результате приемник оказывается заряженным отрицательно, и, по мере того как опилки продолжают сыпаться в приемник, величина заряда все возрастает. В то же время цинковый цилиндр с расположенной в нем медной воронкой приобретает все более и более возрастающий положительный заряд.

Если бы теперь цинковый цилиндр был соединен проволокой с приемником, по проволоке пошел бы положительный ток от цилиндра к приемнику. Струя медных опилок, в которой все частицы заряжены по индукции отрицательно, образует отрицательный ток, текущий от воронки к приемнику, или, другими словами, положительный ток, текущий от приемника к воронке. Поэтому положительный ток проходит через воздух (носителями этого тока являются опилки) от цинка к меди, а через металлическое соединение — от меди к цинку точно так же, как в обычных вольтовых устройствах. Но в рассматриваемом случае сила, поддерживающая ток,— это не химическое действие, а тяготение, которое заставляет опилки падать, несмотря на электрическое притяжение между положительно заряженной воронкой и отрицательно заряженными опилками.

249. Замечательное подтверждение теории контактного электричества дает открытие, сделанное Пельтье (Peltier). Он установил, что при прохождении электрического тока через соединение двух металлов это соединение нагревается, если ток течет в одном направлении, и охлаждается, если ток течет в другом направлении. Следует помнить, что прохождение тока через металл всегда сопровождается выделением тепла, поскольку ток испытывает сопротивление. Поэтому эффект охлаждения для проводника в целом должен быть всегда меньше, чем эффект нагревания. Поэтому следует различать образование тепла в каждом металле, вызванное обычным сопротивлением, и образование или поглощение тепла в месте соединения двух металлов. Первое из этих двух явлений мы назовем образованием тепла электрическим током из-за трения, и в этом случае, как мы видели, выделяемое тепло пропорционально квадрату силы тока и не зависит от направления тока. Второе явление мы можем назвать эффектом Пельтье, в этом случае тепло меняет свой знак с изменением направления тока.

---

[1] *North British Review*, p. 353; *Proc. Roy. Soc.*, June 20, 1864.

Полное количество теплоты, выделяемое на некотором участке сложного проводника, составленного из двух металлов, может быть выражено соотношением

$$H=\frac{R}{J}C^2t-\Pi Ct,$$

где H — количество теплоты, J — механический эквивалент единицы количества теплоты, R — сопротивление проводника, C — ток и t — время. Коэффициент Π характеризует эффект Пельтье. Численное значение Π равно количеству тепла, поглощенного в месте соединения при прохождении единичного тока за единицу времени.

Но произведенное тепло эквивалентно механической работе, совершаемой против электрических сил в проводнике, т. е. равно произведению тока на вызывающую его электродвижущую силу. Таким образом, если E — это внешняя электродвижущая сила, заставляющая ток течь по проводнику, то

$$JH=CEt=RC^2t-J\Pi Ct,$$

откуда $E=RC-J\Pi$.

Из этого соотношения вытекает, что внешняя электродвижущая сила, требуемая для того, чтобы провести ток через составной проводник, оказывается меньше на величину $J\Pi$, чем значение электродвижущей силы, полученное при учете только сопротивления. Таким образом, величина $J\Pi$ представляет собой электродвижущую контактную силу в месте соединения, действующую в положительном направлении.

Это приложение механической теории теплоты к определению локальной электродвижущей силы, принадлежащее сэру У. Томсону [2], имеет большое научное значение, потому что обычный способ подключения электродов гальванометра или электроскопа с помощью проволок к двум точкам составного проводника оказался бы бесполезным из-за действия контактных сил в точках соединения проволок с частями составного проводника.

С другой стороны, применяя тепловой метод, мы знаем, что единственным источником энергии является электрический ток, и что в определенном участке цепи током не совершается никакой работы, кроме нагревания этого участка проводника. Поэтому, если мы можем измерить количество тока и количество выделенного или поглощенного им тепла, то мы можем определить и электродвижущую силу, потребную для создания этого тока в данном участке проводника, причем такое измерение совершенно не зависит от действия контактных сил в других участках цепи.

Электродвижущая сила на соединении двух металлов, определенная таким методом, не объясняет Вольтовой электродвижущей силы, описанной в п. 246. Последняя оказывается, вообще говоря, много больше, чем та, о которой идет речь в данном разделе, и иногда имеет противоположный знак. Поэтому предположение, что потенциал металла следует измерять потенциалом воздуха, находящегося в контакте с этим металлом, должно быть ошибочным. Большую часть Вольтовой электродвижущей силы нужно искать не в месте соединения двух ме-

---

[2] *Proc. R. S. Edin.*, Dec. 15, 1851 and *Trans. R. S. Edin.*, 1854.

таллов, а на одной или обеих поверхностях, отделяющих эти металлы от воздуха или от другой среды, которая образует третий элемент цепи.

250. Открытие Зеебеком (Seebeck) термоэлектрических токов в цепях, составленных из различных металлов с разной температурой мест соединения, показывает, что в замкнутой цепи эти контактные силы не всегда уравновешивают друг друга. Ясно, однако, что в замкнутой цепи, составленной из различных металлов при однородной температуре, контактные силы должны уравновешиваться. Если бы это было не так, то существовал бы ток, образовавшийся в цепи, и этот ток можно было бы использовать для приведения в действие какого-нибудь механизма или для выделения тепла в цепи, т. е. для совершения работы. При этом не происходило бы никакого расходования энергии, поскольку температура во всех участках цепи одна и та же и нет ни химических, ни каких-либо других изменений.

Поэтому, если эффект Пельтье на соединении двух металлов a и b определяется постоянной Π_{ab}, если ток течет от a к b, то для цепи, составленной из двух металлов с одной и той же температурой, мы должны иметь $\Pi_{ab}+\Pi_{ba}=0$, а для цепи из трех металлов a, b и c $\Pi_{bc}+\Pi_{ca}+\Pi_{ab}=0$.

Из этого соотношения следует, что эти три эффекта Пельтье не являются независимыми и один из них может быть определен через два других. Например, если мы примем металл c за стандартный и если напишем $P_a=J\Pi_{ac}$ и $P_b=J\Pi_{bc}$, то $J\Pi_{ab}=P_a—P_b$. Величина P_a зависит от температуры и от природы металла a.

251. Магнус (Magnus) показал, что в цепи, составленной из металла одного сорта, не возникает тока, как бы ни менялись сечение проводника и температура в различных участках цепи.

Поскольку в этом случае имеет место теплопроводность и связанная с ней диссипация энергии, мы не можем, в отличие от предыдущего случая, считать этот результат самоочевидным. Например, электродвижущая сила между двумя участками цепи могла бы зависеть от того, идет ли ток из более толстой части проводника в более тонкую или в обратном направлении. Электродвижущая сила могла бы также зависеть от того, быстро или медленно идет ток от горячего участка проводника к холодному или наоборот. При этом было бы возможно существование тока в цепи, составленной из металла одного сорта при различном нагреве разных ее частей.

Следовательно, рассуждая так же, как в случае явления Пельтье, мы найдем, что если при прохождении тока через проводник из металла одного сорта имеет место тепловой эффект, который меняет знак при обращении тока, то это возможно лишь в том случае, когда ток течет от мест с более высокой к местам с более низкой температурой или наоборот. Пусть тепло, выделяемое в проводнике из металла одного сорта при прохождении тока от места, где температура равна x, до места, где она равна y, имеет величину H. Тогда

$$JH=RC^2t—S_{xy}Ct,$$

и электродвижущая сила, стремящаяся поддерживать ток, равна S_{xy}.

Пусть x, y, z — значения температуры в трех точках однородной цепи. Тогда мы должны иметь

$$S_{yz}+S_{zx}+S_{xy}=0$$

в соответствии с результатом Магнуса. Если мы примем температуру z за нулевую и если обозначим $Q_x=S_{xz}$ и $Q_y=S_{yz}$, мы найдем $S_{xy}=Q_x-Q_y$ где Q_x зависит от температуры x. Характер этой зависимости определяется природой металла.

Если мы рассмотрим теперь цепь, составленную из двух металлов a и b, причем то соединение, где ток идет от a к b, находится при температуре x, а соединение, где ток идет от b к a — при температуре y, то электродвижущая сила будет равна

$$F=P_{ax}-P_{bx}+Q_{bx}-Q_{by}+P_{by}-P_{ay}+Q_{ay}-Q_{ax},$$

где P_{ax} — значение величины P для металла a при температуре x. Это соотношение перепишем в виде

$$F=P_{ax}-Q_{ax}-(P_{ay}-Q_{ay})-(P_{bx}-Q_{bx})+P_{by}-Q_{by}.$$

Поскольку в неоднородно нагретых цепях, составленных из различных металлов, вообще говоря, имеются термоэлектрические токи, из последнего соотношения следует, что величины P и Q, относящиеся к одному и тому же металлу и к одной и той же температуре, вообще говоря, различны.

252. Существование величины Q было впервые показано сэром У. Томсоном в его уже цитированном мемуаре как следствие из открытого Каммингом (Cumming)[3] явления термоэлектрической инверсии. Камминг показал, что порядок следования некоторых металлов в термоэлектрической шкале различен при высоких и при низких температурах, так что при определенной температуре два металла могут стать нейтральными друг относительно друга. Так, например, если в цепи, состоящей из меди и железа, одно соединение поддерживается при обычной температуре, а температура другого повышается, возникает ток, который идет от меди к железу через более горячее соединение. При этом электродвижущая сила растет, пока горячее соединение не достигнет температуры T, которая по Томсону примерно равна 284°C. Если температура горячего соединения растет дальше, электродвижущая сила уменьшается, и, наконец, при достаточно высокой температуре направление тока меняется. Обращение тока легче получить, повышая температуру более холодного соединения. Если температура обоих соединений превышает величину T, ток идет в направлении от железа к меди через более нагретое соединение, т. е. в направлении, противоположном тому, которое имело место при температуре обоих соединений ниже T.

Таким образом, если одно из соединений находится при нейтральной температуре T, а второе либо теплее, либо холоднее первого, то в соединении, находящемся при нейтральной температуре, устанавливается ток, текущий от меди к железу.

253. Исходя из этого факта, Томсон рассуждал следующим образом.

Предположим, что второе соединение находится при температуре меньшей, чем T. Возникающий ток может быть использован для работы какой-нибудь машины или для нагревания проволоки. Эта затрата энергии должна сопровождаться превращением тепла в электрическую энергию, т. е. где-то в цепи тепло должно исчезать. Но при температуре T железо и медь нейтральны друг к другу, поэтому на горячем соединении не происходит обратных тепловых эффектов. На

[3] *Cambridge Transactions*, 1823.

холодном же соединении, в согласии с законом Пельтье, происходит выделение или поглощение тепла током.

Таким образом, тепло может исчезать только в медном или в железном участках цепи, так что или ток в железе, текущий от горячего соединения к холодному, должен охлаждать железо, или ток в меди, текущий от холодного соединения к горячему, должен охлаждать медь, или же оба эти явления должны иметь место одновременно. С помощью кропотливой серии искусных экспериментов Томсону удалось обнаружить обратимое тепловое действие тока, текущего между участками с различной температурой, причем он нашел, что действие тока в железе и в меди противоположно [4].

Когда поток материальной жидкости движется через трубу от горячего ее конца к холодному, поток нагревает трубу, а когда поток движется от холодного конца трубы к горячему, он охлаждает трубу. Эти эффекты зависят от величины удельной теплоемкости жидкости. Если бы мы предположили, что электричество, положительное или отрицательное, представляет собой материальную жидкость, мы могли бы измерить ее удельную теплоемкость по тепловым эффектам в неоднородно нагретом проводнике. Но эксперименты Томсона показали, что положительное электричество в меди и отрицательное электричество в железе переносят тепло от горячего участка цепи к холодному.

Таким образом, приняв, что или положительное, или отрицательное электричество представляет собой жидкость, способную нагреваться и охлаждаться и передавать тепло другим телам, мы придем к выводу, что это предположение не выполняется в железе для положительного электричества, а в меди — для отрицательного. Поэтому следует отказаться от обоих этих гипотез.

Это научное предсказание обратимого воздействия, которое оказывает электрический ток на неравномерно нагретый проводник из металла одного сорта, дает еще один поучительный пример применения Закона Сохранения Энергии для указаний новых направлений научного исследования. Томсон также применил Второй Закон Термодинамики для установления связи между величинами, которые мы обозначили через P и Q, и рассмотрел возможные термоэлектрические свойства тел, строение которых различно в различных направлениях. Он также изучил на опыте условия, при которых эти свойства меняются под действием давления, намагничения и т. д.

254. Профессор Тэт [5] недавно исследовал электродвижущую силу в термоэлектрических цепях, составленных из разных металлов, контакты между которыми имеют разную температуру. Он нашел, что электродвижущая сила в контуре с хорошей точностью выражается формулой

$$E=a(t_1-t_2)\ [t_0-(t_1+t_2)/2],$$

где t_1 — абсолютная температура горячего соединения, t_2 — холодного, а t_0 — температура, при которой оба металла нейтральны друг к другу. Коэффициент a зависит от природы двух металлов, составляющих цепь. Справедливость этого закона в широкой области значений температуры была проверена профессором Тэтом и его учениками, и он надеется создать такую термоэлектрическую цепь,

[4] «On the Electrodynamic Qualities of Metals». *Phil. Trans.*, Part III, 1856.
[5] *Proc. Roy. Soc. Edin.* Session 1870—1871, p. 308, также Dec. 18, 1871.

которая будет служить как прибор для измерения температуры в его опытах по исследованию теплопроводности, а также и в других случаях, где ртутный термометр либо неудобен, либо не покрывает достаточного температурного интервала.

По теории Тэта, величина, которую Томсон называет удельной теплоемкостью электричества, пропорциональна абсолютной температуре для каждого чистого металла, хотя ее значение и даже знак различны для разных металлов. Отсюда с помощью законов термодинамики он вывел следующие результаты. Пусть $k_a t$, $k_b t$ и $k_c t$ — удельные теплоемкости электричества в трех металлах a, b и c соответственно. Пусть далее T_{bc}, T_{ca}, T_{ab} — значения температуры, при которой соответствующие пары этих металлов нейтральны друг к другу. Тогда уравнения

$$(k_b - k_c) T_{bc} + (k_c - k_a) T_{ca} + (k_a - k_b) T_{ab} = 0,$$

$$J\Pi_{ab} = (k_a - k_b)\, t\, (T_{ab} - t), \qquad E_{ab} = (k_a - k_b)(t_1 - t_2)\left[T_{ab} - (t_1 + t_2)/2\right]$$

выражают связь между значениями нейтральных температур, коэффициентом Пельтье и электродвижущими силами в термоэлектрической цепи.

ГЛАВА IV
ЭЛЕКТРОЛИЗ

Электролитическая проводимость

255. Я уже отмечал, что когда электрический ток в любой части цепи проходит через некоторые сложные вещества, называемые Электролитами, прохождение тока сопровождается определенным химическим процессом, который называется Электролизом. В этом процессе вещество разлагается на две компоненты, называемые Ионами, из которых одна, называемая Анионом, или электроотрицательной компонентой, появляется на Аноде, т. е. в том месте, где ток входит в электролит, а другая компонента, называемая Катионом, появляется на Катоде, т. е. в том месте, где ток выходит из электролита.

Полное исследование электролиза есть в равной мере задача Химии и науки об Электричестве. Мы проведем его рассмотрение с точки зрения науки об электричестве, не обсуждая приложений к теории строения химических соединений.

Из всех электрических явлений электролиз, по-видимому, в наибольшей степени позволяет нам проникнуть в истинную природу электрического тока, потому что здесь мы находим потоки обычного вещества и токи электричества, составляющие важные стороны одного и того же явления.

По-видимому, именно по этой самой причине при современной неполноте наших представлений об электричестве теории электролиза являются столь неудовлетворительными.

Основной закон электролиза, установленный Фарадеем и подтвержденный к настоящему времени в опытах Бетца (Beetz), Гитторфа (Hittorf) и других, состоит в следующем.

Число электрохимических эквивалентов электролита, разложенных при прохождении электрического тока в течение заданного времени, равно числу единиц электричества, которые перенесены током за то же время.

Электрохимический эквивалент вещества — это такое количество вещества, которое разлагается в процессе электролиза единичным током, проходящим через вещество за единицу времени, или, другими словами, при прохождении единицы электричества. Если единица электричества определена в абсолютной системе, то абсолютное значение электрохимического эквивалента для каждого вещества может быть выражено в гранах или граммах.

Электрохимические эквиваленты различных веществ пропорциональны их обычным химическим эквивалентам. Однако обычные химические эквиваленты представляют собой всего лишь численные соотношения, в которых вещества соединяются, в то время как электрохимические эквиваленты — это определенные количества вещества, зависящие от выбора единицы электричества. Каждый электролит состоит из двух компонентов, которые в процессе электролиза появляются в тех местах, где ток входит в электролит и выходит из него, и нигде больше. Следовательно, если мы представим себе некоторую воображаемую поверхность внутри электролита, то количество электролиза, идущего через эту поверхность, выраженное числом электрохимических эквивалентов каждого из компонентов, которые переносятся через эту поверхность в противоположных направлениях, будет пропорционально полному электрическому току через поверхность.

Таким образом, реальный перенос ионов через вещество электролита в противоположных направлениях — это часть явления проводимости при прохождении электрического тока через электролит. В каждой точке электролита, через который идет электрический ток, существуют два взаимно противоположных потока вещества, состоящие один из анионов, другой из катионов, имеющие те же линии тока, что и электрический ток, и пропорциональные ему по величине.

Поэтому чрезвычайно естественно предположить, что токи ионов — это токи, переносящие электричество, и, в частности, что каждая молекула катиона заряжена определенным фиксированным количеством положительного электричества, и это количество одинаково для молекул всех катионов, а каждая молекула аниона заряжена равным по величине количеством отрицательного электричества.

Тогда движение ионов в противоположных направлениях через электролит дает полное физическое описание электрического тока. Мы можем сравнить это движение ионов с движением жидкостей и газов друг через друга в процессе диффузии. Между этими двумя процессами имеется та разница, что при диффузии различные вещества только перемешиваются и смесь не является однородной, в то время как при электролизе они находятся в химической связи и электролит однороден. При диффузии причиной, определяющей движение вещества в данном направлении, является уменьшение количества этого вещества на единицу объема в этом направлении. При электролизе же движение каждого иона вызывается электродвижущей силой, действующей на заряженные молекулы.

256. Клаузиус [1], который много занимался теорией молекулярных движений

[1] Pogg. *Ann.*, CI, p. 338 (1857).

в твердых телах, полагает, что молекулы всех тел находятся в состоянии постоянного движения, но что в твердых телах каждая молекула никогда не уходит дальше некоторого расстояния от своего начального положения, в то время как молекула жидкости, пройдя некоторое расстояние от своего начального положения, равно может как двинуться еще дальше, так и двинуться назад. Таким образом, молекулы жидкости, кажущейся неподвижной, непрерывно меняют свое положение, переходя нерегулярным образом от одной части жидкости к другой.

В химически сложной жидкости, как полагает Клаузиус, молекулы не только путешествуют указанным образом, но, кроме того, между сложными молекулами происходят соударения, в результате которых составляющие их более простые молекулы часто отделяются и меняют своих партнеров, так что один и тот же отдельный атом может быть в один момент времени связан с одним атомом другого вида, а в другой момент времени — с другим.

Этот процесс, по мнению Клаузиуса, протекает в жидкости все время, но когда на жидкость действует электродвижущая сила, то движение молекул, в котором до этого не было никакого выделенного направления, начинает испытывать влияние этой электродвижущей силы, так что положительно заряженные молекулы больше стремятся двигаться к катоду, чем к аноду, а отрицательно заряженные молекулы больше стремятся двигаться в противоположном направлении. Поэтому молекулы катиона в течение того времени, когда они свободны, пробиваются к катоду, но при этом все время задерживаются в пути, соединяясь на время с молекулами аниона, которые тоже пробиваются сквозь толпу, но в противоположном направлении.

257. Эта теория Клаузиуса позволяет нам понять, как получается, что хотя для реального разложения электролита нужна электродвижущая сила конечной величины, тем не менее прохождение тока через электролит подчиняется закону Ома, так что любая электродвижущая сила в электролите, даже самая малая, вызывает пропорциональный по величине ток.

По теории Клаузиуса, разложение и восстановление электролита происходит непрерывно, даже в отсутствие тока, поэтому самая малая электродвижущая сила оказывается достаточной для того, чтобы придать этому процессу некоторую степень направленности и тем самым вызвать токи ионов, а следовательно, и электрический ток, который составляет часть того же самого явления. Однако внутри электролита ионы никогда не бывают свободны в конечном количестве, и именно для освобождения ионов и нужна конечная электродвижущая сила.

Ионы накапливаются у электрода, так как последовательные порции ионов по мере появления у электродов, вместо того чтобы найти молекулы противоположных ионов, готовые с ними соединиться, вынуждены пребывать в обществе себе подобных молекул, с которыми они соединиться не могут. Для того чтобы могло происходить это явление, электродвижущая сила должна иметь конечную величину. При этом также возникает электродвижущая сила противоположного знака, которая вызывает обратный ток, если убрать другие электродвижущие силы. Когда наблюдается эта обратная электродвижущая сила, вызванная скоплением ионов у электрода, говорят, что электроды Поляризованы.

258. Один из лучших методов определения того, является некоторое тело электролитом или нет, состоит в том, что тело помещается между двумя платиновыми электродами и через него в течение некоторого времени пропускается элек-

трический ток. Затем электроды отъединяются от гальванической батареи и соединяются с гальванометром, для того чтобы наблюдать, идет ли через гальванометр обратный ток, вызванный поляризацией электродов. Такой ток, вызванный накоплением разных веществ на двух электродах, служит доказательством того, что исследуемое вещество было разложено электролитически при прохождении первичного тока от батареи. Этот метод часто можно применять в тех случаях, когда трудно определить наличие продуктов разложения на электродах прямыми химическими методами (см. п. 271).

259. В отношении тех вопросов, которые мы уже рассмотрели, теория электролиза выглядит вполне удовлетворительно. Она объясняет электрический ток, природа которого нам непонятна, связывая его с потоками составляющих электролит материальных компонентов, движение которых, хотя и невидимое глазу, может быть легко продемонстрировано. Как показал Фарадей, теория четко объясняет, почему электролит, который проводит электричество в жидком состоянии, становится непроводящим при затвердевании. Действительно, пока молекулы не могут перемещаться из одной части в другую, электролитическая проводимость не может иметь места, и для того, чтобы быть проводником, вещество должно быть в жидком состоянии — раствором или расплавом.

Но если пойдем дальше и примем, что молекулы ионов в электролите действительно заряжены некоторыми определенными количествами электричества, положительными или отрицательными, так что ток в электролите есть просто ток переноса, мы увидим, что это заманчивое предположение ставит нас на очень скользкую почву.

Прежде всего мы должны принять, что в любом электролите каждая молекула катиона, когда она освобождается у катода, передает катоду заряд положительного электричества, количество которого одно и то же у всех молекул, не только данного катиона, но у всех других катионов. Точно так же каждая молекула аниона при освобождении передает аноду заряд отрицательного электричества, численное значение которого совпадает с численным значением положительного заряда, переносимого молекулой катиона, при противоположном знаке заряда.

Если вместо единственной молекулы мы рассмотрим большое их число, составляющее электрохимический эквивалент иона, то суммарный заряд всех молекул будет равен, как мы уже видели, одной единице электричества, положительной или отрицательной.

260. Мы до сих пор не знаем, сколько молекул содержит электрохимический эквивалент любого вещества, но молекулярная теория, существующая в химии и подкрепляемая многими физическими соображениями, предполагает, что число молекул в электрохимическом эквиваленте есть одна и та же величина для всех веществ. Мы можем поэтому в духе спекуляций молекулярной теории предположить, что число молекул в одном электрохимическом эквиваленте равно неизвестному в настоящее время числу N, способ определения которого мы, возможно, найдем [2].

Тогда каждая молекула, будучи освобождена из соединения, расстается с зарядом, величина которого равна $1/N$ и который положителен для катиона и отрицателен для аниона. Это определенное количество электричества мы будем

---

[2] См. примечание к п. 5.

называть молекулярным зарядом. Если бы величина его была известна, это была бы наиболее естественная единица электричества.

До сих пор мы только уточняли наши исходные предпосылки и упражняли наше воображение, следя за электризацией молекул и за разрядом этой электризации.

Освобождение ионов происходит одновременно с переходом положительного электричества от анода на катод. Ионы, когда они освобождены, не заряжены электричеством, следовательно, когда они находятся в соединении, они обладают молекулярными зарядами, о которых говорилось выше.

Однако, хотя легко говорить об электризации молекулы, не так легко представить себе, что это такое.

Мы знаем, что если два металла соприкасаются в любой точке, вся остальная часть их поверхностей оказывается заряженной. Если металлы имеют форму двух пластин, разделенных узким промежутком воздуха, заряд на каждой пластине может достигать значительной величины. Можно предположить что нечто подобное происходит и тогда, когда два компонента электролита находятся в соединении. Можно предположить, что каждая пара молекул соприкасается в одной точке, а остальная их поверхность заряжена из-за действия контактной электродвижущей силы.

Но для того чтобы объяснить это явление, мы должны ответить на вопрос, почему заряд, созданный таким образом на каждой молекуле, имеет фиксированную величину, и почему при соединении молекулы хлора с молекулой цинка молекулярные заряды оказываются такими же, как и при соединении молекулы хлора с молекулой меди, хотя электродвижущая сила между хлором и цинком много больше, чем между хлором и медью. Если заряд молекул объясняется действием контактной электродвижущей силы, почему тогда разные значения электродвижущей силы дают в точности равные заряды?

Предположим, однако, что мы перескочили через эту трудность, просто провозгласив факт постоянства молекулярного заряда. Для удобства описания мы назовем этот постоянный молекулярный заряд *одной молекулой электричества.*

Эта фраза, хотя она сама по себе и груба и не гармонирует с остальным содержанием этого трактата, позволит нам по крайней мере четко установить то, что известно об электролизе, а также указать на серьезные затруднения.

Каждый электролит должен рассматриваться как бинарная смесь его аниона и катиона. Анион или катион или оба они могут быть сложными телами, так что молекула аниона или катиона сама может быть образована из некоторого числа молекул простых тел. Молекула аниона и молекула катиона вместе образуют одну молекулу электролита.

Чтобы действовать в электролите как анион, молекула должна быть заряжена тем, что мы назвали одной молекулой отрицательного электричества, а для того чтобы действовать как катион, молекула должна быть заряжена одной молекулой положительного электричества.

Эти заряды связаны с молекулами только в том случае, если молекулы объединяются, как катион и анион в электролите.

Когда молекулы подвергаются электролизу, они отдают свой заряд электродам и оказываются незаряженными телами после освобождения из соединения.

Если одна и та же молекула может быть катионом в одном электролите, ани-

оном — в другом, а также входить в состав сложных тел, которые не являются электролитами, то мы должны предположить, что эта молекула получает положительный электрический заряд, когда она действует как катион, получает отрицательный заряд, когда она действует как анион, и что она совсем не имеет заряда, когда она не входит в состав электролита.

Например, иод действует как анион в химических соединениях иода с металлами и в иодисто-водородной кислоте, но, по имеющимся сведениям, действует как катион в соединении с бромом.

Эта теория молекулярных зарядов может рассматриваться как некоторый метод, помогающий нам запомнить множество фактов, относящихся к электролизу. Однако кажется крайне невероятным, что мы сохраним в какой-либо форме теорию молекулярных зарядов после того, как придем к пониманию истинной природы электролиза, ибо тогда у нас будут надежные основания, на которых можно построить верную теорию электрических токов и тем самым избавиться от этих предварительных теорий.

261. Одним из самых важных шагов в нашем познании электролиза явилось обнаружение вторичных химических процессов, возникающих при превращении ионов на электродах.

Во многих случаях вещества, которые обнаруживаются на электродах, не являются настоящими ионами электролиза, а представляют собой результат воздействия этих ионов на электролит.

Так, при электролизе раствора сульфата натрия током, который проходит также и через разбавленную серную кислоту, на анодах выделяются равные количества кислорода как в сульфате натрия, так и в разбавленной кислоте, а на катодах — равные количества водорода.

Но если проводить электролиз в подходящих сосудах, таких, как *U*-образные трубки или же сосуды с пористой перегородкой, так чтобы можно было отдельно исследовать вещество, окружающее каждый электрод, то выясняется, что в растворе сульфата натрия на аноде одновременно с одним эквивалентом кислорода выделяется один эквивалент серной кислоты, а на катоде наряду с одним эквивалентом водорода выделяется один эквивалент щелочи.

На первый взгляд может показаться, что в соответствии со старой теорией строения солей сульфат натрия при электролизе разлагается на свои составные части — серную кислоту и щелочь, и в то же время вода из раствора разлагается на составляющие ее кислород и водород. Но такое объяснение было бы основано на допущении, что тот же самый ток, который, проходя через раствор серной кислоты, электролитически разлагает один эквивалент воды, выделил бы при прохождении через раствор сульфата натрия один эквивалент соли и одновременно один эквивалент воды, что было бы в противоречии с законом электрохимических эквивалентов.

Но если мы предположим, что сульфат натрия состоит не из компонент SO_3 и Na_2O, а из SO_4 и Na_2, т. е. не из серной кислоты и щелочи, а из кислотного остатка и натрия, тогда при электролизе кислотный остаток движется к аноду и там освобождается, но поскольку кислотный остаток не может существовать в свободном состоянии, он разбивается на серную кислоту и кислород в равном числе эквивалентов. В то же время натрий освобождается на катоде и здесь разлагает воду раствора, образуя один эквивалент щелочи и один — водорода.

Газы, которые собираются у электродов в разбавленной серной кислоте, представляют собой составные части воды, а именно один объем кислорода и два объема водорода. У анода также возрастает количество серной кислоты, но оно не равно одному эквиваленту.

Неясно, является чистая вода электролитом или нет. Чем лучше очищена вода, тем больше оказывается ее сопротивление электролитическому прохождению тока. Малейших следов инородного вещества оказывается достаточно, чтобы намного уменьшить электрическое сопротивление воды. Электрическое сопротивление воды, измеренное различными исследователями, имеет настолько различающиеся значения, что мы не можем рассматривать эту величину как определенную. Чем чище вода, тем больше ее сопротивление, и, если бы мы могли получить действительно чистую воду, весьма сомнительно, что она вообще была бы проводником.

Пока вода рассматривалась как электролит, а она действительно считалась построенной по типу электролитов, имелись веские причины предполагать, что вода представляет собой бинарное соединение и что два объема водорода химически эквивалентны одному объему кислорода. Однако, если мы допустим, что вода не является электролитом, мы свободны считать, что равные объемы кислорода и водорода химически эквивалентны.

Динамическая теория газов приводит к предположению, что в идеальных газах равные объемы всегда содержат равное число молекул и что главная часть удельной теплоемкости, а именно та, которая обусловлена движением молекул вследствие теплового возбуждения, одинакова для равного числа молекул любого газа. Поэтому нам приходится предпочесть такую химическую систему, в которой равные объемы кислорода и водорода рассматриваются как эквивалентные, а вода считается смесью двух эквивалентов водорода и одного эквивалента кислорода, и поэтому, вероятно, вода не поддается прямому электролизу.

Электролиз полностью устанавливает тесную связь между электрическими явлениями и явлениями химического соединения. Однако не каждое химическое соединение является электролитом, и это обстоятельство показывает, что химическая связь представляет собой явление более высокого порядка сложности, чем любое чисто электрическое явление. Так, соединения металлов друг с другом, хотя и являются хорошими проводниками, а входящие в эти соединения компоненты занимают разные места на шкале контактной электродвижущей силы, они даже в жидком виде не разлагаются электрическим током. Большая часть соединений, составленных из таких веществ, которые действуют как анионы, не являются проводниками и потому не является электролитами. Кроме того, имеется много составных веществ, содержащих те же компоненты, что и электролиты, но не в тех же пропорциях, и эти вещества также являются непроводниками а следовательно, и неэлектролитами.

О сохранении энергии в электролизе

262. Рассмотрим произвольную вольтову цепь, составленную частично из батареи, частично — из провода и частично — из электролитической ячейки.

При прохождении единицы электричества через любое сечение цепи электролизу подвергается один электрохимический эквивалент каждого из веществ как в батарее, так и в электролитической ячейке.

Количество механической энергии, эквивалентное любому данному химическому процессу, можно определить, обратив в тепло всю энергию, выделившуюся в этом процессе, а затем выразить тепло в динамической мере, умножив количество единиц теплоты на Джоулев механический эквивалент тепла.

Там, где этот прямой метод неприменим, если мы можем оценить количества теплоты, выделенные веществами, взятыми одно в состоянии, предшествующем процессу, а другое — в состоянии после процесса, при переходе этих веществ в окончательное состояние, одинаковое в обоих случаях, то тепловой эквивалент этого процесса будет равен разности этих двух количеств теплоты.

В случае, когда химическое действие поддерживает ток в вольтовой цепи, Джоуль показал, что тепло, выделяемое в вольтовом элементе, меньше, чем то тепло, которое выделяется при химическом процессе, идущем внутри этого элемента. Избыток тепла выделяется в проводах или, если в цепи имеется электромагнитная машина, часть тепла может расходоваться на совершаемую этой машиной механическую работу.

Если, например, электроды вольтова элемента в одном случае соединены толстой и короткой проволокой, а в другом случае — тонкой и длинной, то в первом случае тепло, которое выделяется внутри элемента на каждый гран растворенного цинка оказывается больше, чем во втором случае, но тепло, выделенное в проволоке, оказывается больше во втором случае, чем в первом. Суммарное тепло, выделенное в элементе и в проволоке на каждый гран растворенного цинка, оказывается одним и тем же в обоих случаях. Это было установлено Джоулем в прямом эксперименте.

Отношение теплоты, выделенной в элементе, к теплоте, произведенной в проводе, равно отношению сопротивлений элемента и провода. Если бы у провода было достаточно большое сопротивление, то почти все тепло выделилось бы в проводе, если же провод имеет достаточно большую проводимость, то почти все тепло выделяется в элементе.

Пусть провод сделан так, что его сопротивление велико. Тогда теплота, выделенная в проводе, равна в динамических единицах произведению количества прошедшего электричества на электродвижущую силу, под действием которой электричество шло по проводу.

263. Далее, в течение времени, за которое в химическом процессе, идущем в батарее для поддержания тока, расходуется один электрохимический эквивалент вещества, по проволоке проходит единица электричества. Следовательно, тепло, выделенное при прохождении одной единицы электричества, измеряется в этом случае электродвижущей силой. Но это как раз и есть то количество тепла, которое производит (в элементе или в проводе) один электрохимический эквивалент вещества, израсходованный в данном химическом процессе.

Отсюда вытекает важная теорема, впервые доказанная Томсоном (*Phil. Mag.*, Dec., 1851):

«Электродвижущая сила электрохимического устройства равна в абсолютной мере (численно) механическому эквиваленту химического процесса на один электрохимический эквивалент вещества».

Тепловые эквиваленты многих химических процессов были определены в работах Эндрюса (Andrews), Гесса (Hess), Фавра (Favre) и Зильбермана (Silbermann), Томсена (Thomsen) и других. Умножив полученные значения на механический

эквивалент теплоты, можно получить соответствующие значения механических эквивалентов.

Эта теорема не только дает нам возможность вычислить по чисто тепловым измерениям электродвижущую силу различных вольтовых устройств, а также электродвижущую силу, необходимую для осуществления электролиза в различных случаях, она еще дает способ фактического измерения химического сродства.

Давно известно, что химическое сродство, или склонность по отношению к определенным химическим изменениям, в некоторых случаях оказывается сильнее, чем в других, но никакой подходящей меры для этой склонности не могли создать до тех пор, пока не было показано, что эта склонность в ряде случаев в точности эквивалентна некоторой электродвижущей силе и поэтому может быть измерена на основе тех самых принципов, которые используются при измерении электродвижущих сил.

Таким образом, в определенных случаях понятие химического сродства сводится к измеримой величине. Тем самым вся теория химических процессов, скоростей, с которыми они протекают, замещение одного вещества другим и т. д. становится гораздо более доступной пониманию, чем тогда, когда химическое сродство рассматривалось как свойство *особого рода*, *sui generis*, несводимое к численному измерению.

Если объем продуктов электролиза превышает объем электролита, то в процессе электролиза совершается работа против сил давления. Если электролиз идет под давлением p и объем одного электрохимического эквивалента в электролите увеличивается на величину v, то при прохождении единицы электричества совершается работа против сил давления, равная vp, а электродвижущая сила, необходимая для электролиза, должна включать часть, равную vp, которая расходуется на совершение этой механической работы.

Если продуктами электролиза являются газы, которые, подобно кислороду и водороду, намного более разряжены, чем электролит, и с очень хорошей точностью подчиняются закону Бойля, величина vp при одной и той же температуре очень близка к постоянной, и электродвижущая сила, необходимая для электролиза, не будет сколько-нибудь заметным образом зависеть от давления. Поэтому оказалось невозможным контролировать электролитическое разложение разведенной серной кислоты, удерживая выделенные газы в малом объеме.

Если продукты электролиза являются жидкими или твердыми, величина vp растет с ростом давления, и при положительном значении v увеличение давления ведет к увеличению электродвижущей силы, требующейся для электролиза.

Точно так же любой другой вид работы, совершаемой во время электролиза, влияет на величину электродвижущей силы. Например, при прохождении вертикального тока между двумя цинковыми электродами в растворе сернокислого цинка в случае, когда ток в растворе идет вверх, требуемая электродвижущая сила больше, чем тогда, когда ток идет вниз. Объясняется это тем, что в первом случае ток переносит цинк с нижнего электрода на верхний, а во втором — с верхнего на нижний. Электродвижущая сила, необходимая для этой цели, составляет на каждый фут высоты менее одной миллионной части от электродвижущей силы элемента Даниэля.

ГЛАВА V
ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

264. Когда электрический ток проходит через электролит, ограниченный металлическими электродами, накопление ионов у электродов приводит к явлению, называемому Поляризацией. Поляризация заключается в том, что появляется электродвижущая сила, направленная против тока и заметно увеличивающая сопротивление.

Если используется непрерывный ток, это сопротивление оказывается быстро нарастающим после включения тока, а затем оно достигает почти постоянной величины. Если изменить форму сосуда, содержащего электролит, сопротивление меняется таким же образом, как у металлического проводника при подобном изменении формы. Но при этом к истинному сопротивлению электролита всегда следует добавлять некоторое кажущееся сопротивление, зависящее от природы электродов.

265. Эти явления привели кое-кого к предположению о существовании конечной электродвижущей силы, необходимой для того, чтобы ток мог пройти через электролит. Однако, как показали в своих исследованиях Ленц (Lenz), Нейманн (Neumann), Бетц, Видеман [1], Паальцов (Paalzow) [2], а недавно также господа Ф. Кольрауш и В. А. Ниппольд (Nippoldt)[3], Фитцжеральд и Трутон (Trouton) [4], проводимость самого электролита подчиняется закону Ома с той же точностью, что и проводимость металлических проводников, а кажущееся сопротивление на границе между электродом и электролитом целиком обусловлено поляризацией.

266. В случае непрерывного тока явление, называемое поляризацией, проявляется в уменьшении тока, что указывает на силу, противодействующую току. Сопротивление также ведет себя как сила, противодействующая току, но мы можем различать эти два явления с помощью быстрого выключения или изменения знака электродвижущей силы.

Сила сопротивления всегда противоположна направлению тока, и внешняя электродвижущая сила, необходимая для того, чтобы преодолеть это сопротивление, пропорциональна силе тока и меняет свое направление, когда меняется направление тока. Если эта внешняя электродвижущая сила обращается в нуль, ток просто прекращается.

С другой стороны, электродвижущая сила, обусловленная поляризацией, направлена определенным образом, а именно противоположно току, который вызывает поляризацию. Если убрать электродвижущую силу, производящую ток, то поляризация создаст ток в противоположном направлении.

Различие между этими двумя явлениями можно сравнить с разницей между пропусканием воды через длинную капиллярную трубку и подачей воды вверх в цистерну по трубе умеренного сечения. В первом случае, если мы снимем давле-

---

[1] Elektrizität, S. 568, Bd. I.
[2] *Berlin. Monatsbericht*, July, 1868.
[3] Pogg. *Ann.*, Bd. C XXXVIII, S. 286 (October, 1869).
[4] B. A. Report, 1887.

ние, которое обеспечивает течение, вода просто остановится. Во втором случае, если мы снимем давление, вода потечет обратно, вниз из цистерны.

Чтобы сделать эту механическую иллюстрацию более полной, мы должны еще предположить, что глубина цистерны не очень велика и, после того как в нее войдет некоторое количество воды, она начнет переливаться. Это иллюстрирует то обстоятельство, что полная электродвижущая сила, вызванная поляризацией, ограничена сверху.

267. Причиной поляризации, по-видимому, является наличие на электродах продуктов электролитического разложения жидкости, находящейся между электродами. Таким образом, электроды находятся в различном по своим электрическим свойствам окружении и между ними возникает некоторая электродвижущая сила, направление которой противоположно направлению тока, вызывающего поляризацию.

Ионы, присутствие которых на электродах вызывает явления поляризации, находятся не в совершенно свободном состоянии, а в таких условиях, когда они притянуты к поверхности электродов со значительной силой.

Электродвижущая сила, обусловленная поляризацией, зависит от плотности, с которой электрод покрыт ионом, но электродвижущая сила не пропорциональна этой плотности, ибо возрастает не столь быстро, как эта плотность.

Это отложение иона постоянно стремится к тому, чтобы освободиться и либо диффундировать в жидкость, либо выделиться в виде газа, либо выпасть в осадок как твердое тело.

Эта диссипация поляризации идет крайне медленно, если степень поляризации мала, и очень быстро, если поляризация близка к своему предельному значению.

268. Мы видели в п. 262, что электродвижущая сила, действующая в любом электролитическом процессе, численно равна механическому эквиваленту результата этого процесса над одним электрохимическим эквивалентом вещества. Если этот процесс приводит к уменьшению внутренней энергии участвующих в нем веществ, как это имеет место в вольтовой батарее, то электродвижущая сила действует в направлении тока. Если же происходит увеличение внутренней энергии веществ, как в случае электролитической ячейки, то электродвижущая сила направлена противоположно току, и в этом случае она называется электродвижущей силой поляризации.

В случае установившегося тока, когда электролиз идет непрерывно, а ионы в свободном состоянии выделяются на электродах, нам достаточно с помощью подходящего процесса измерить внутреннюю энергию разделенных ионов и сравнить ее с внутренней энергией электролита, для того чтобы определить требуемую для электролиза электродвижущую силу. Это даст максимальную поляризацию.

Но в первые моменты после начала электролиза ионы, осевшие на электродах, не находятся в свободном состоянии, и их внутренняя энергия меньше, чем их энергия в свободном состоянии, хотя и больше их энергии, отвечающей объединению ионов в электролите. Действительно, пока слой осажденного на электроде вещества является еще очень тонким, состояние иона, попавшего на электрод, подобно состоянию химической связи с веществом электрода. Но, по мере того как плотность отложения растет, последующие порции ионов уже не так тесно связаны с электродом, а просто находятся на нем, и в конце концов отложения на

электродах выделяются в виде пузырьков — если это газы, диффундируют в электролит — если это жидкость или же выпадают в осадок — если это твердые вещества.

Поэтому при рассмотрении поляризации нам следует учитывать:

(1). Поверхностную плотность отложения, которую мы назовем σ. Эта величина σ представляет число электрохимических эквивалентов иона, осевших на единицу площади. Поскольку каждый осажденный электрохимический эквивалент соответствует одной единице электричества, перенесенной током, мы можем рассматривать σ либо как поверхностную плотность вещества, либо как поверхностную плотность электричества.

(2). Электродвижущую силу поляризации, которую мы можем назвать p. Эта величина p равна разности электрических потенциалов двух электродов, если ток через электролит настолько мал, что собственное сопротивление электролита не дает заметного вклада в эту разность потенциалов.

Электродвижущая сила p в любой момент времени численно равна механическому эквиваленту электролитического процесса, идущего в данный момент времени, который соответствует одному электрохимическому эквиваленту электролита. Следует помнить, что этот электролитический процесс заключается в отложении ионов на электродах, а состояние, в котором ионы отлагаются, зависит от действительного состояния электродных поверхностей, которое может меняться предыдущими отложениями.

Таким образом, электродвижущая сила в любой момент времени зависит от предыдущей истории электродов. Очень грубо говоря, она является функцией от плотности осажденных ионов σ, причем $p=0$ при $\sigma=0$, но p приближается к своему предельному значению гораздо быстрее, чем σ. Однако утверждение, что p зависит от σ, нельзя считать точным. Было бы правильнее сказать, что p определяется химическим состоянием осажденного поверхностного слоя, а это химическое состояние зависит от плотности слоя по некоторому закону, содержащему время.

269. (3). Третье, что мы должны принять во внимание, это диссипация поляризации. Поляризация, предоставленная самой себе, уменьшается. Скорость этого уменьшения частично зависит от величины поляризации или от плотности осажденного слоя, и частично от природы окружающей среды, а также от химического, механического или теплового воздействия, которому подвергается поверхность электрода.

Если определить T как такой промежуток времени, что при скорости, с которой происходит диссипация отложения, оно будет удалено целиком за это время T, то величину T мы можем назвать мерой (modulus) времени диссипации. Если плотность отложений очень мала, T имеет очень большие значения и исчисляется днями или месяцами. По мере того как плотность отложений приближается к предельному значению, величина T очень быстро спадает и составляет, вероятно, малые доли секунды. Действительно, скорость диссипации настолько возрастает, что если поддерживать постоянную силу тока, выделенный газ уже не дает вклад в увеличение плотности отложения на электроде, а по мере образования тут же выделяется в виде пузырьков.

270. Поэтому случай, когда поляризация электродов в электролитической ячейке мала, сильно отличается от случая, когда поляризация близка к своему

максимальному значению. Например, если последовательно соединить некоторое число электролитических ячеек, имеющих платиновые электроды и наполненных разведенной серной кислотой, и подключить к ним источник малой электродвижущей силы, например один элемент Даниэля, эта электродвижущая сила вызовет крайне непродолжительный ток, потому что через очень короткое время электродвижущая сила, происходящая от поляризации, уравняет ту, которую дает элемент Даниэля.

В случае столь слабого состояния поляризации диссипация будет очень мала. Она происходит путем очень медленного поглощения газов и диффузии сквозь жидкость. Ход этой диссипации определяется по необычайно слабому току, который продолжает течь без какого-либо видимого разделения газов.

Если мы пренебрежем этой диссипацией в течение того короткого времени, за которое устанавливается состояние поляризации, и если Q — полное количество электричества, перенесенное током в течение этого времени, тогда, если A — площадь одного из электродов и σ — поверхностная плотность отложенного вещества, которая, по нашему предположению, однородна, $Q=A\sigma$.

Если мы теперь отъединим электроды электролитического устройства от элемента Даниэля и присоединим их к гальванометру, способному измерять проходящий через него полный заряд, то за время исчезновения поляризации через электрометр пройдет заряд, примерно равный Q.

271. Мы, таким образом, можем сравнить действие этого устройства, представляющего собой вариант Вторичной Батареи Риттера (Ritter), с действием Лейденской банки.

И вторичная батарея, и лейденская банка могут быть заряжены некоторым количеством электричества, а после этого могут быть разряжены. Количество электричества при разрядке почти равно заряду, прошедшему в противоположном направлении. Разница между этими двумя величинами частично объясняется диссипацией. Этот процесс при малых значениях заряда идет очень медленно, но если заряд превышает некоторую предельную величину, диссипация становится очень быстрой. Еще одно различие между процессами заряда и разряда возникает из-за того, что после замыкания электродов на время, достаточное для получения кажущегося полного разряда (до полного исчезновения тока), если мы разомкнем электроды на некоторое время, а потом снова замкнем, мы получим второй разряд, идущий в том же самом направлении, что и первоначальный. Это явление называется остаточным разрядом, и оно характерно в равной степени и для лейденской банки, и для вторичной батареи.

Поэтому вторичная батарея в ряде отношений может быть уподоблена лейденской банке. Однако имеются и важные различия. Заряд лейденской банки очень точно пропорционален электродвижущей силе, т. е. разности потенциалов двух поверхностей. Отношение заряда к электродвижущей силе, называемое емкостью банки, есть величина постоянная. Соответствующее отношение, которое может быть названо емкостью вторичной батареи, растет с ростом электродвижущей силы.

Емкость лейденской банки зависит от площади противоположных обкладок, от расстояния между ними и от природы вещества, разделяющего обкладки, но не зависит от природы самих металлических поверхностей. Емкость вторичной батареи зависит от площади поверхности электродов, но не от расстояния между

ними, а также зависит от природы поверхностей электродов и от природы находящейся между ними жидкости. Максимальная разность потенциалов между электродами в каждом элементе вторичной батареи очень мала по сравнению с максимальной разностью потенциалов между электродами лейденской банки, и, для того чтобы получить большую электродвижущую силу, нужно использовать батарею, составленную из многих таких элементов.

С другой стороны, поверхностная плотность заряда во вторичной батарее в огромное число раз превышает максимально достижимую поверхностную плотность заряда, которая может быть накоплена на обкладках лейденской банки, настолько, что мистер Варлей [5], описывая устройство конденсатора большой емкости, рекомендует ряд золотых или платиновых пластин, помещенных в разведенную кислоту, предпочитая это с точки зрения стоимости конденсатору из оловянных фольг, разделенных изолирующим материалом.

Форма, в которой запасается энергия в лейденской банке, представляет собой энергию натяжения диэлектрика, заключенного между проводящими поверхностями. Это состояние натяжения я описал выше под названием электрической поляризации, указав на известные в настоящее время явления, связанные с этим состоянием, и отметив неполноту наших знаний о том, что в действительности происходит (см. п. 62, 111).

Форма, в которой запасается энергия во вторичной батарее, есть химическое состояние слоя вещества у поверхности электродов, образованного ионами электролита и веществом электродов; характер связи между этими компонентами меняется от химического соединения до поверхностной конденсации, механического соединения или простого соседства.

Эта энергия сосредоточена вблизи от поверхности электродов, а не во всем объеме электролита. Форма, в которой существует эта энергия, может быть названа электролитической поляризацией.

После сравнительного изучения вторичной батареи и лейденской банки изучающему полезно было бы вернуться к сравнению вольтовой батареи с каким-нибудь видом электрической машины, наподобие той, которая описана в п. 211.

Мистер Варлей недавно [6] нашел, что для платиновой пластинки, помещенной в разведенной серной кислоте, емкость одного квадратного дюйма заключена в пределах от 175 до 542 микрофарад и выше и что с ростом электродвижущей силы емкость возрастает, имея значение 175 при 0,02 от электродвижущей силы элемента Даниэля и 542 при 1,6 от электродвижущей силы элемента Даниэля.

Но сравнение лейденской банки со вторичной батареей можно провести еще дальше, как это было сделано в следующем эксперименте, который провел Буфф (Buff) [7]. Стекло лейденской банки может удерживать заряд только тогда, когда оно холодное. При некоторой температуре ниже 100°С стекло становится проводником. Если поместить в сосуд со ртутью пробирку, содержащую ртуть, и соединить один электрод со ртутью внутри, а другой — со ртутью вне пробирки, то полученное устройство представляет собой лейденскую банку, которая будет дер-

---

[5] Руководство C. F. Varley, «Electric Telegraphs &c.», Jan. 1860.

[6] *Proc. R. S.*, Jan. 12, 1871. Описание других исследований на эту тему см. в Wiedemanns Elektrizität, Bd. II, p. 744—771.

[7] *Annalen der Chemie und Pharmacie*, Bd. XC, S. 257 (1854).

жать заряд при комнатных температурах. Если подсоединить электроды к выводам вольтовой батареи, то, пока стекло холодное, тока не появится. Но если это устройство медленно нагревать, то появится ток, который будет быстро возрастать по мере роста температуры, хотя стекло остается на вид столь же твердым, как всегда.

Этот ток явно имеет электролитическую природу, ибо если электроды отъединить от батареи и подключить к гальванометру, то идет заметный обратный ток, вызванный поляризацией на поверхности стекла.

Если это устройство при подключенной батарее охладить, ток при холодном стекле прекращается, как и раньше, но поляризация поверхности остается. Можно удалить ртуть, промыть поверхности азотной кислотой и водой, после чего налить свежую ртуть. Если затем нагреть это устройство, то появится ток поляризации, как только стекло станет достаточно теплым для того, чтобы проводить этот ток.

Поэтому, хотя стекло при 100°C является, по-видимому, твердым телом, мы можем рассматривать его как электролит. Имеются значительные основания полагать, что в большинстве случаев, в которых диэлектрик имеет незначительную проводимость, прохождение тока является электролитическим. Наличие поляризации можно рассматривать как решающее доказательство электролиза, и, если проводимость вещества растет с ростом температуры, у нас есть веские основания подозревать, что проводимость является электролитической.

О постоянных вольтовых элементах

272. В опытах с использованием вольтовой батареи, в которой имеет место поляризация, эта поляризация уменьшается в то время, когда ток не протекает, так что ток, который начинает течь снова, оказывается больше, чем ток, уже текущий некоторое время. Если, с другой стороны, уменьшить сопротивление цепи, допустив протекание тока по закорачивающему шунту, то после того как ток снова начинает течь по обычной цепи, его сила сначала будет меньше нормальной за счет большой поляризации, возникающей из-за использования закороченной цепи.

Чтобы избавиться от этих нерегулярностей тока, которые доставляют очень много забот в экспериментах, связанных с точными измерениями, необходимо избавиться от поляризации или, по крайней мере, уменьшить ее настолько, насколько это возможно.

У поверхности цинковой пластинки, помещенной в раствор сульфата цинка или в разведенную серную кислоту, не наблюдается большой поляризации. Основным местом нахождения поляризации является поверхность отрицательного металла. Если жидкость, в которую помещен отрицательный металл, является разбавленной серной кислотой, можно видеть, как металл начинает покрываться пузырьками водорода, возникающими при электролитическом разложении жидкости. Ясно, что эти пузырьки не дают жидкости соприкасаться с металлом и тем уменьшают площадь контакта и увеличивают сопротивление цепи. Но, кроме видимых пузырьков, определенно существует также тонкий слой водорода, по-видимому, не в свободном состоянии, прилегающий к металлу. Мы видели, что это покрытие может создавать электродвижущую силу, действующую

в противоположном направлении. Поэтому такое покрытие обязательно должно уменьшать электродвижущую силу батареи.

Для того чтобы избавиться от этого водородного покрытия, прибегают к различным способам. Покрытие может быть до некоторой степени уменьшено при помощи механических средств, таких, как перемешивание жидкости или протирание поверхности отрицательной пластины. В батарее Сми (Smee) отрицательные пластины расположены вертикально и покрыты тонкими волокнами платины, с которых пузырьки водорода легко срываются и, всплывая вверх, создают ток жидкости, который помогает счищать другие пузырьки по мере их образования.

Однако гораздо более эффективным является применение химических средств. Существует два вида таких средств. В батареях Гроува (Grove) и Бунзена (Bunsen) отрицательная пластина помещается в жидкость, богатую кислородом, и водород, вместо того чтобы создавать покрытие на поверхности пластины, вступает в соединение с этим веществом. В батарее Гроува платиновая пластина помещается в неразведенную азотную кислоту. В первой батарее Бунзена используется угольная пластина, помещенная в ту же кислоту. Для тех же самых целей используется также хромовая кислота. Она имеет то преимущество перед азотной кислотой, что не выделяет паров при протекающих в ней реакциях.

Другой способ избавления от водорода — это использование в качестве отрицательного металла меди, поверхность которой покрыта слоем окисла. Этот слой, однако, быстро исчезает при использовании в качестве отрицательного электрода. Джоуль предложил для восстановления слоя изготовлять медные пластины в форме дисков, наполовину погруженных в жидкость, и медленно их вращать, так, чтобы воздух мог воздействовать на поочередно открытые части диска.

При другом способе в качества электролита используется жидкость, катионом в которой является металл, в высокой степени отрицательный по отношению к цинку.

В батарее Даниэля медная пластина помещается в насыщенный раствор медного купороса. Когда ток идет через раствор от цинка к меди, на медной пластине осаждается медь, но водород не выделяется. Пока раствор является насыщенным, а ток не слишком большим, медь ведет себя как настоящий катион, в то время как анион SO_4 движется по направлению к цинку.

Если эти условия не выполняются, на катоде появляется водород, который тут же действует на раствор, замещая медь, и соединяется с ионом SO_4, образуя серную кислоту. Когда это происходит, сульфат меди вблизи от медной пластины заменяется на серную кислоту, раствор становится бесцветным и снова возникает поляризация, связанная с выделением водорода. Медь, осажденная при этих условиях, оказывается по структуре более рыхлой и более хрупкой, чем медь, осажденная при истинном электролизе.

Для того чтобы жидкость вблизи от медного электрода постоянно была насыщена медным купоросом, нужно поместить кристаллы этого вещества в жидкость по соседству с электродом, так, чтобы при ослаблении раствора из-за осаждения меди могло растворяться больше кристаллов.

Мы уже убедились в необходимости того, чтобы жидкость вблизи от меди была насыщена сульфатом меди. Еще более необходимо, чтобы та жидкость, в которую погружен цинк, была свободна от сульфата меди. Если сколько-нибудь этой соли

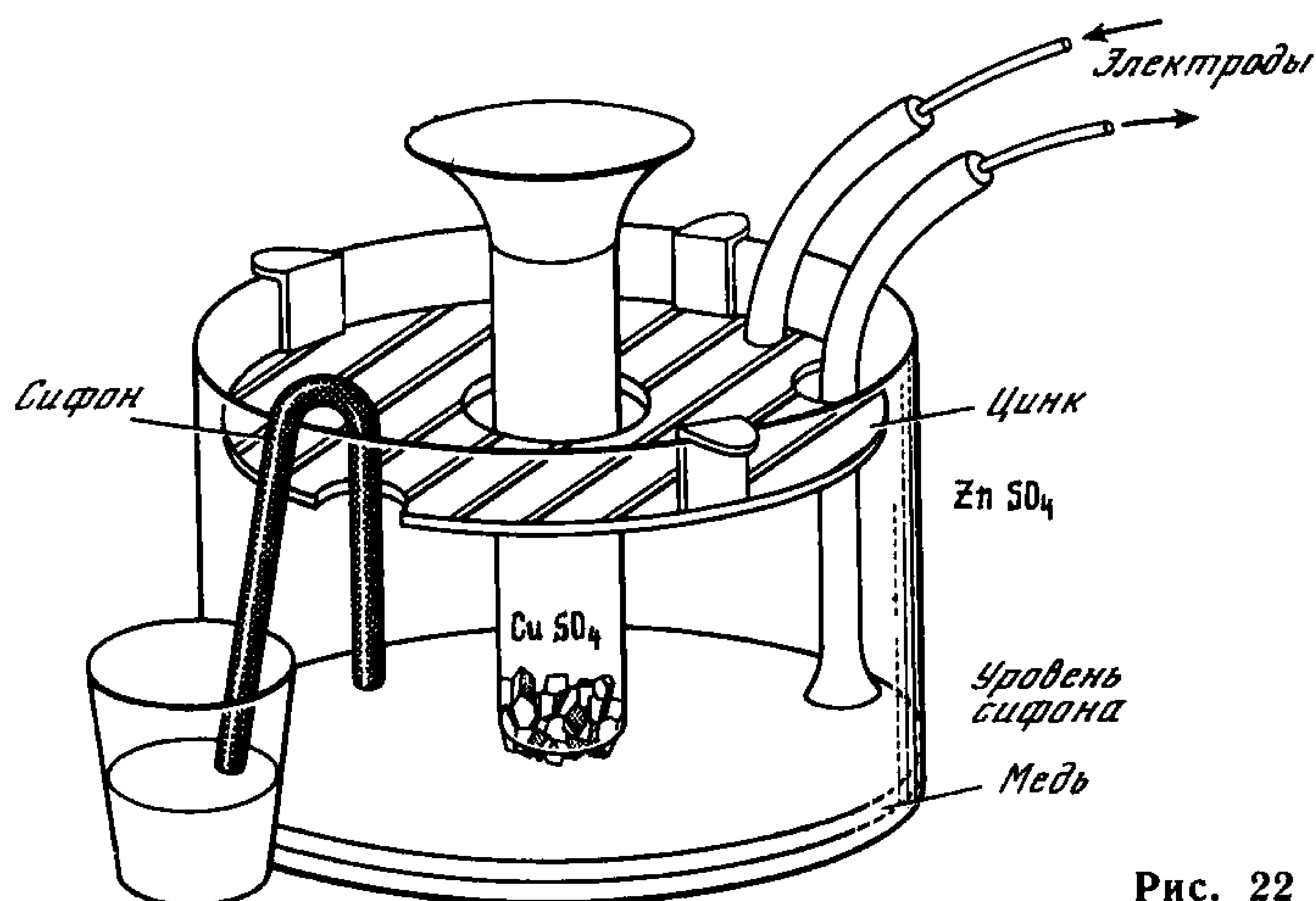


Рис. 22

доберется до поверхности цинка, то соль восстановится и медь осядет на цинк. В этом случае цинк, медь и жидкость составляют небольшую цепь, и в этой цепи идет быстрый электролитический процесс: цинк выедается за счет процесса, который не вносит никакого вклада в полезное действие батареи.

Чтобы этого не случилось, цинк погружают либо в разведенную серную кислоту, либо в раствор сульфата цинка, а для того чтобы раствор сульфата меди не мог смешаться с этой жидкостью, обе жидкости отделяются друг от друга перегородкой либо из пузыря (пленки), либо из пористой глины. Эти перегородки не препятствуют электролизу, но в то же время эффективно предотвращают видимые течения, ведущие к смешиванию жидкости.

В некоторых батареях для предотвращения течений используются опилки. Однако эксперименты Грэхэма (Graham) показали, что если две жидкости разделены перегородкой такого типа, то процесс диффузии идет столь же быстро, как и в случае непосредственного соприкосновения жидкостей, при условии, что видимые течения отсутствуют. По-видимому, если использовать пленку животного происхождения, которая уменьшает диффузию, то она точно в том же отношении увеличит сопротивление элемента, потому что электролитическая проводимость представляет собой процесс, математические законы которого имеют ту же форму, что и законы диффузии, и то, что мешает одному процессу, должно в равной мере мешать другому. Единственное различие заключается в том, что диффузия имеет место всегда, в то время как ток идет только тогда, когда батарея находится в действии.

Во всех вариантах батареи Даниэля сульфат меди в конце концов находит дорогу к цинку и портит батарею. Для того чтобы отсрочить этот исход на неопределенное время, сэр У. Томсон [8] осуществил следующую конструкцию батареи Даниэля [рис. 22].

Proc. R. S., Jan. 19, 1871.

В каждом элементе медная пластина положена горизонтально на дно. Сверху наливается насыщенный раствор сульфата цинка. Цинковый электрод имеет форму решетки и расположен горизонтально вблизи от поверхности раствора. Стеклянная трубка погружена в раствор вертикально, так что ее нижний конец находится чуть выше медной пластины. В эту трубку насыпаются кристаллы медного купороса. Растворяясь в жидкости, они образуют раствор большей плотности, чем раствор только сульфата цинка, так что этот раствор большей плотности может дойти до цинкового электрода лишь путем диффузии. Эта диффузия замедляется с помощью сифона, состоящего из стеклянной трубки, заполненной хлопчатобумажным фитилем. Один конец трубки находится на полпути между цинком и медью, а другой конец опущен в сосуд, находящийся вне элемента, так что жидкость очень медленно вытягивается из элемента примерно с середины его глубины. Для поддержания уровня сверху при необходимости доливается вода или слабый раствор сульфата цинка.

Таким образом, большая часть медного купороса, который в процессе диффузии движется вверх через жидкость до цинка, вытягивается сифоном, не успев дойти до цинка, и цинковый электрод окружен жидкостью, почти свободной от медного купороса и, вдобавок, очень медленно движущейся вниз, что еще больше замедляет подъем медного купороса. Во время работы батареи медь оседает на медной пластине, а ионы медленно движутся через жидкость к цинку, с которым и вступают в соединение, образуя сульфат цинка. При этом плотность жидкости у дна падает из-за отложения меди, а плотность жидкости сверху растет за счет добавления цинка.

Чтобы эти процессы не изменили соотношение плотности в слоях и не вызвали тем самым появление видимых течений в сосуде, нужно следить за тем, чтобы в трубку подавалось достаточное количество кристаллов сульфата меди и пополнять элемент сверху достаточно слабым раствором сульфата цинка, чтобы этот раствор был легче любого другого слоя жидкости, заполняющей элемент.

Батарея Даниэля далеко не является самой мощной из ныне используемых. Электродвижущая сила элемента Гроува равна[9] 192.000.000, Даниэля — 107.900.000 и элемента Бунзена — 188.000.000.

Сопротивление элемента Даниэля, вообще говоря, превышает сопротивление элементов Гроува или Бунзена, имеющих те же размеры.

Эти недостатки, однако, более чем перекрываются во всех случаях, когда нужны точные измерения, потому что элемент Даниэля превосходит любое другое известное устройство в стабильности электродвижущей силы. Еще одним преимуществом является способность работать в течение долгого времени, а также то обстоятельство, что элемент Даниэля при работе не выделяет никаких газов.

---

[9] Все ЭДС в ед. CGSM, см. п. 358.— *Примеч. ред.*

ГЛАВА VI
ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ

О системах линейных проводников

273. Любой проводник может рассматриваться как линейный, если он устроен так, что ток всегда должен проходить одинаковым образом между двумя участками поверхности этого проводника, которые называются электродами. Например, массивный кусок металла любой формы, поверхность которого целиком покрыта изолирующим материалом, за исключением двух мест, где обнаженная поверхность находится в металлическом контакте с электродами, сделанными из хорошо проводящего вещества, можно считать линейным проводником. Действительно, если сделать так, что ток входит через один из электродов и выходит через другой, то линии тока определены и соотношение между электродвижущей силой, током и сопротивлением будет выражаться законом Ома, поскольку ток в любой части проводника будет линейной функцией E. Но если число электродов больше, чем два, то через проводник может проходить больше одного независимого тока и эти токи могут быть и не сопряжены друг с другом (см. п. 282а и 282б).

Закон Ома

274. Пусть E — электродвижущая сила в линейном проводнике, действующая от электрода A_1 к электроду A_2 (см. п. 69). Пусть далее C — сила электрического тока в проводнике, иначе говоря, пусть за единицу времени через любое поперечное сечение проводника проходит C единиц электричества в направлении A_1A_2, и пусть сопротивление проводника равно R, тогда Закон Ома выражается следующим образом:

$$E=CR. \tag{1}$$

Линейные проводники, соединенные последовательно

275. Пусть A_1 и A_2 — электроды первого проводника, и пусть один из электродов второго проводника находится в контакте с A_2, так что второй проводник имеет в качестве электродов A_2, A_3. Электроды третьего проводника можно обозначить через A_3 и A_4.

Обозначим электродвижущие силы, действующие вдоль этих проводников, через E_{12}, E_{23}, E_{34} и т. д. для следующих проводников.

Пусть сопротивления соответствующих проводников равны R_{12}, R_{23}, R_{34} и т. д. Тогда, поскольку проводники соединены последовательно, так что через каждый из них протекает один и тот же ток C, мы имеем по закону Ома

$$E_{12}=CR_{12},\ E_{23}=CR_{23},\ E_{34}=CR_{34} \text{ и т. д.} \tag{2}$$

Если E — полная электродвижущая сила, а R — полное сопротивление всей системы, мы должны иметь по закону Ома

$$E=CR. \tag{3}$$

Но

$$E=E_{12}+E_{23}+E_{34}+ \text{ и т. д.} \tag{4}$$

— сумма отдельных электродвижущих сил, равная $C(R_{12}+R_{23}+R_{34}+$ и т. д.), согласно уравнениям (2). Сравнивая этот результат с (3), находим

$$R=R_{12}+R_{23}+R_{34}+ \text{ и т. д.} \tag{5}$$

Или: *сопротивление последовательно соединенных проводников равно сумме сопротивлений этих проводников, взятых в отдельности.*

Потенциал в любой точке последовательного соединения

Пусть A и C — электроды последовательного соединения, B — точка между ними, a, c и b — потенциалы этих точек соответственно. Обозначим, далее, через R_1 сопротивление той части цепи, которая заключена между точками A и B, через R_2 — сопротивление цепи между точками B и C, через R — сопротивление всей цепи от A до C. Тогда, поскольку $a-b=R_1C$, $b-c=R_2C$ и $a-c=RC$, потенциал в точке B равен

$$b=(R_2a+R_1c)/R, \tag{6}$$

что и определяет потенциал в точке B, если потенциалы в точках A и C заданы.

Сопротивление многократного проводника

276. Пусть некоторое число проводников ABZ, ACZ, ADZ и т. д. расположены рядом друг с другом и их концы находятся в контакте в одних и тех же двух точках A и Z. Тогда говорят, что они образуют многократное (параллельное) соединение (multiple arc).

Пусть сопротивления этих проводников равны соответственно R_1, R_2, R_3, а токи — C_1, C_2, C_3, и пусть сопротивление многократного проводника равно R, а полный ток через него равен C. Поскольку потенциалы в точках A и Z имеют одно и то же значение для всех проводников, они имеют одинаковую разность потенциалов, которую мы обозначим через E. Тогда

$E=C_1R_1=C_2R_2=C_3R_3=CR$; но $C=C_1+C_2+C_3$, откуда

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}. \tag{7}$$

Или: *обратное сопротивление многократного проводника есть сумма обратных сопротивлений составляющих его проводников.*

Если величину, обратную сопротивлению проводника, назвать проводимостью проводника, то можно сказать, что *проводимость многократного проводника есть сумма проводимостей составляющих его проводников.*

Ток в любой ветви многократного проводника

Из уравнений предыдущего параграфа следует, что если ток в какой-нибудь ветви многократного проводника равен C_1, а сопротивление этой ветви равно R_1, то

$$C_1=CR/R_1, \tag{8}$$

где C — полный ток, а R — определенное выше сопротивление многократного проводника

Продольное сопротивление проводников постоянного сечения

277. Пусть ρ — сопротивление куба единичной длины, сделанного из данного материала, по отношению к току, текущему параллельно одному из ребер. Тогда ρ называется удельным сопротивлением данного материала на единицу объема.

Рассмотрим теперь проводник, сделанный из того же материала и имеющий форму призмы, длина которой равна l, а площадь поперечного сечения равна единице. Такой проводник эквивалентен l кубам, расположенным последовательно. Его сопротивление поэтому равно $l\rho$.

Наконец, рассмотрим проводник длины l, имеющий постоянное поперечное сечение s. Он эквивалентен s проводникам, подобным рассмотренному ранее и образующих многократное (параллельное) соединение. Поэтому сопротивление такого проводника равно $R=l\rho/s$. Если мы знаем сопротивление однородного провода, мы можем определить удельное сопротивление материала, из которого он изготовлен, если мы можем измерить его длину и сечение.

Площадь поперечного сечения тонких проволочек точнее всего определяется путем вычисления по длине, весу и удельному весу образца. Определение удельного веса иногда оказывается неудобным, и в таких случаях используется сопротивление проволоки единичной длины и единичной массы, называемое удельным сопротивлением на единицу веса.

Если r — удельное сопротивление на единицу веса, l — длина и m — масса проволоки, то $R=l^2r/m$.

О размерностях величин, входящих в эти уравнения

278. Сопротивление проводника равно отношению действующей на проводник электродвижущей силы к производимому ею току. Проводимость проводника есть величина, обратная сопротивлению, или, другими словами, отношение тока к создающей этот ток электродвижущей силе.

Мы знаем, что в электростатической системе единиц отношение количества электричества, распределенного на некотором проводнике, к потенциалу этого проводника есть емкость проводника, измеряемая длиной. Если проводник представляет собой сферу, помещенную в безграничное поле, эта длина равна радиусу сферы. Поэтому отношение количества электричества к электродвижущей силе является длиной. Отношение же количества электричества к току есть время, в течение которого течет ток, переносящий это количество электричества. Поэтому отношение тока к электродвижущей силе есть отношение длины к времени, иными словами, скорость.

В том, что проводимость в электростатической системе единиц имеет размерность скорости, можно убедиться, предположив, что сфера радиуса r заряжена до потенциала V, а затем соединена с Землей при помощи данного проводника. Пусть сфера сжимается, так что электричество уходит по проводнику, а потенциал сферы остается постоянным и равным V. Тогда заряд на сфере в любой момент времени равен rV, а ток равен $-\frac{d}{dt}(rV)$. Поскольку значение V поддерживается постоянным, ток равен $-\frac{dr}{dt}V$, причем электродвижущая сила, вызывающая ток, равна V.

Проводимость проводника равна отношению тока к электродвижущей силе, или $-dr/dt$, т. е. скорости, с которой должен уменьшаться радиус сферы для того, чтобы потенциал ее сохранял постоянное значение, по мере того как заряд уходит в Землю по проводнику.

Таким образом, в электростатической системе проводимость проводника есть скорость, и, следовательно, имеет размерность $[L^{-1}T]$.

Стало быть, сопротивление проводника имеет размерность $[L^{-1}T]$. Удельное сопротивление на единицу объема имеет размерность $[T]$, а удельная проводимость на единицу объема имеет размерность $[T^{-1}]$.

Численное значение этих коэффициентов зависит только от выбора единицы времени, которая в разных странах одна и та же.

Удельное сопротивление на единицу веса имеет размерность $[L^{-3}MT]$.

279. В дальнейшем мы увидим, что в электромагнитной системе единиц сопротивление проводника выражается скоростью, так что в этой системе сопротивление проводника имеет размерность $[LT^{-1}]$.

Проводимость проводника, разумеется, равна обратной величине.

Удельное сопротивление на единицу объема имеет в этой системе единиц размерность $[L^2T^{-1}]$, а удельное сопротивление на единицу веса имеет размерность $[L^{-1}T^{-1}M]$.

Линейная система проводников в общем случае

280. Наиболее общий случай линейной системы представляет собой n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, соединенных между собой попарно с помощью $n(n-1)/2$ линейных проводников. Пусть проводимость (или величина, обратная сопротивлению) проводника, который соединяет любую пару точек, скажем точки A_p и A_q, обозначена через K_{pq}. Ток от точки A_p к точке A_q обозначим через C_{pq}. Пусть электрические потенциалы в точках A_p и A_q равны P_p и P_q соответственно, а внутренняя электродвижущая сила (если она есть), которая действует вдоль проводника от точки A_p к точке A_q, равна E_{pq}.

Ток от A_p к A_q по закону Ома равен

$$C_{pq}=K_{pq}(P_p-P_q+E_{pq}). \tag{1}$$

Для этих величин мы имеем следующий набор соотношений.

Проводимость какого-либо проводника та же самая в любом направлении, или

$$K_{pq}=K_{qp}. \tag{2}$$

Электродвижущая сила и ток является направленными величинами, т. е.

$$E_{pq}=-E_{qp} \text{ и } C_{pq}=-C_{qp}. \tag{3}$$

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — значения потенциалов в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно, а $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — соответственные количества электричества, которые поступают в систему за единицу времени через эти точки. Эти величины с необходимостью подчиняются условию «непрерывности»

$$Q_1+Q_2+\ldots+Q_n=0, \tag{4}$$

поскольку электричество не может неограниченно нарастать, а равно и производиться внутри системы.

Условие «непрерывности» в любой точке A_p есть

$$Q_p = C_{p1} + C_{p2} + \ldots + \text{и т. д.} + C_{pn}. \tag{5}$$

Подставляя значение токов из соотношения (1), получим

$$Q_p = (K_{p1} + K_{p2} + \text{и т. д.} + K_{pn}) P_p - (K_{p1}P_1 + K_{p2}P_2 + \text{и т. д.} + K_{pn}P_n) + \\ + (K_{p1}E_{p1} + \text{и т. д.} + K_{pn}E_{pn}). \tag{6}$$

Символ K_{pp} в это уравнение не входит. Поэтому мы можем принять

$$K_{pp} = -(K_{p1} + K_{p2} + \text{и т. д.} + K_{pn}), \tag{7}$$

т. е. считать, что величина K_{pp} равна, а знак противоположен сумме проводимостей всех проводников, сходящихся к точке A_p. Тогда можем написать соотношение непрерывности для точки A_p в виде

$$K_{p1}P_1 + K_{p2}P_2 + \text{и т. д.} + K_{pp}P_p + \text{и т. д.} + K_{pn}P_n = \\ = K_{p1}E_1 + \text{и т. д.} + K_{pn}E_n - Q_p. \tag{8}$$

Полагая в этом уравнении индекс p равным поочередно 1, 2 и т. д. n, мы получим n уравнений одного и того же вида для определения n потенциалов P_1, $P_2, \ldots, P_n$.

Однако если мы сложим все уравнения системы (8), мы получим тождественный нуль в соответствии с соотношениями (3), (4) и (7). Поэтому число независимых уравнений в системе (8) равно $n-1$. Этого будет достаточно для того, чтобы определить разности потенциалов между любой парой точек, но не абсолютные значения потенциалов в каждой точке. Однако этого и не требуется для определения токов в системе.

Если мы обозначим через D определитель

$$\begin{vmatrix} K_{11}, & K_{12}, & \ldots & K_{1\,(n-1)}, \\ K_{21}, & K_{22}, & \ldots & K_{2\,(n-1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{(n-1)\,1}, & K_{(n-1)\,2}, & \ldots & K_{(n-1)\,(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

а через D_{pq} — минор элемента K_{pq}, мы получим для величины $P_p - P_n$ выражение

$$(P_p - P_n) D = (K_{12}E_{12} + \text{и т. д.} - Q_1) D_{p1} + (K_{21}E_{21} + \text{и т. д.} - Q_2) D_{p2} + \\ + \text{и т. д.} + (K_{q1}E_{q1} + \text{и т. д.} + K_{qn}E_{jn} - Q_q) D_{pq} + \text{и т. д.} \tag{10}$$

Тем же путем можно определить превышение потенциала любой другой точки, скажем A_q, над потенциалом точки A_n. После этого мы можем определить ток между точками A_p и A_q из уравнения (1) и тем самым полностью решить задачу.

281. Теперь мы продемонстрируем свойство взаимности любых двух проводников, входящих в систему, что соответствует уже рассмотренному в п. 86 свойству взаимности для статического электричества.

В выражении для потенциала P_p коэффициент при Q_q равен $-D_{pq}/D$. В выражении для P_q коэффициент при Q_p равен $-D_{qp}/D$.

Но величина D_{pq} отличается от D_{qp} только заменой символов, при которой все K_{qp} переходят в K_{pq}. Как следует из соотношения (2), эти две последние ве-

личины равны друг другу, поскольку проводимость проводника одна и та же для обоих направлений. Поэтому $D_{pq}=D_{qp}$. (11)

Отсюда следует, что та часть потенциала в точке A_p, которая обусловлена введением единичного тока в точку A_q, равна той части потенциала в точке A_q, которая обусловлена введением одиночного тока в точку A_p.

Отсюда можно вывести некоторое предложение более практического вида.

Пусть A, B, C, D — любые четыре точки системы, и пусть ток Q входит в систему через точку A и выходит через точку B, создавая превышение потенциала в точке C над потенциалом в точке D на величину P. Тогда, если сделать так, что такой же по величине ток Q будет входить в систему через точку C и выходить через точку D, то потенциал в точке A будет превышать потенциал в точке B на ту же самую величину P.

Если ввести электродвижущую силу E, действующую на проводник от A к B, и если эта электродвижущая сила вызывает ток C от X к Y, то та же самая электродвижущая сила E, введенная в проводник в направлении от X к Y, вызовет точно такой же ток C от A к B.

Источником электродвижущей силы E может быть вольтова батарея, введенная между названными точками, следует только позаботиться о том, чтобы после подключения батареи сопротивление проводника не изменилось.

282 а. Если электродвижущая сила E_{pq} действует вдоль проводника A_pA_q, легко найти ток, возникающий при этом в другом проводнике системы A_rA_s:

$$K_{rs}K_{pq}E_{pq}(D_{rp}+D_{sq}-D_{rq}-D_{sp})/D.$$

Ток равен нулю, если

$$D_{rp}+D_{sq}-D_{rq}-D_{sp}=0. \qquad (12)$$

Но в силу (11) то же самое уравнение справедливо и в том случае, когда при наличии электродвижущей силы вдоль A_rA_s ток в проводнике A_pA_q равен нулю. Вследствие такого свойства взаимности два проводника, к которым оно относится, называются *сопряженными*.

Теория сопряженных проводников была исследована Кирхгофом. Он сформулировал законы для линейной системы следующим образом, обходя рассмотрение потенциала.

1. (Условие «непрерывности»). В любой точке системы сумма всех токов, текущих к этой точке, равна нулю.

2. В любом замкнутом контуре, образованном проводниками, сумма электродвижущих сил, действующих в контуре, равна сумме произведений тока в каждом проводнике на его сопротивление.

Мы получаем этот результат, складывая уравнения вида (1) для замкнутого контура, когда потенциалы с необходимостью исчезают.

282 б[1]. Если проводники образуют простую сеть и мы предполагаем, что в каждой ее ячейке циркулирует некоторый ток, тогда в том проводнике, который является общим для двух соседних ячеек, ток будет равен разности токов, цир-

[1] Извлечено из записей лекций профессора Максвелла мистером Дж. А. Флемингом, бакалавром искусств (Сент Джонс Колледж). См. также статью м-ра Флеминга. *Phil. Mag.*, XX, p. 221, 1885 (примечание Нивена).

кулирующих в этих двух ячейках, причем токи считаются положительными, если они циркулируют в направлении против часовой стрелки. Для этого случая легко доказать следующее утверждение. Пусть x — величина тока, E — электродвижущая сила и R — полное сопротивление в любой ячейке. Пусть, далее, y, z, ... — токи, циркулирующие в соседних ячейках, имеющих общие проводники с той, в которой течет ток x. Сопротивление этих общих проводников обозначим соответственно через s, t, ... Тогда

$$Rx - sy - tz - \text{и т. д.} = E.$$

Для того чтобы проиллюстрировать, как используется это правило, мы возьмем устройство, известное под названием мостика Уитстона, и будем исходить из чертежа и обозначений, принятых в п. 347. Применяя это правило к случаю трех контуров OBC, OCA и OAB, в которых циркулируют токи x, y, z соответственно, мы получим три уравнения, а именно

$$\begin{aligned} (a+\beta+\gamma)x \quad & -\gamma y & -\beta z = E, \\ -\gamma x + (b+\gamma+\alpha) & y & -\alpha z = 0, \\ -\beta x \quad & -\alpha y + (c+\alpha+\beta) & z = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений мы можем определить величину $z - y$, ток, текущий через гальванометр в ответвлении OA. Мы, однако, отсылаем читателя к п. 347 и последующим, где обсуждается этот и другие вопросы, связанные с мостиком Уитстона.

Тепло, производимое в системе

283. Механический эквивалент количества тепла, производимого в единицу времени в проводнике с сопротивлением R при протекании тока C определяется в согласии с п. 242 формулой

$$JH = RC^2. \tag{13}$$

Нам, следовательно, нужно определить сумму величин RC^2 для всех проводников системы.

Проводник, соединяющий точки A_p и A_q, имеет проводимость K_{pq} и сопротивление R_{pq}, причем

$$K_{pq}R_{pq} = 1. \tag{14}$$

Ток в этом проводнике по закону Ома равен

$$C_{pq} = K_{pq}(P_p - P_q). \tag{15}$$

Мы, однако, предположим, что значение тока не определяется законом Ома, а равно X_{pq}, где

$$X_{pq} = C_{pq} + Y_{pq}. \tag{16}$$

Чтобы определить тепло, производимое в системе, нам следует найти сумму всех величин вида $R_{pq}X_{pq}^2$ или

$$JH = \sum \{R_{pq}C_{pq}^2 + 2R_{pq}C_{pq}Y_{pq} + R_{pq}Y_{pq}^2\}. \tag{17}$$

Внося значения C_{pq} и помня соотношение между K_{pq} и R_{pq}, получаем

$$\sum[(P_p - P_q)(C_{pq} + 2Y_{pq}) + R_{pq}Y_{pq}^2]. \quad (18)$$

Теперь, поскольку и величины C и величины Y должны удовлетворять условию непрерывности в точке A_p, мы имеем

$$Q_p = C_{p1} + C_{p2} + \text{ и т. д.} + C_{pn}, \quad (19)$$

$$Q_p = X_{p1} + X_{p2} + \text{ и т. д.} + X_{pn}, \quad (20)$$

и, следовательно,

$$0 = Y_{p1} + Y_{p2} + \text{ и т. д.} + Y_{pn}. \quad (21)$$

Поэтому, складывая все члены в (18), мы находим

$$\sum(R_{pq}X_{pq}^2) = \sum P_pQ_p + \sum R_{pq}Y_{pq}^2. \quad (22)$$

Поскольку величины R всегда положительны и величины Y^2 существенно положительны, последний член этого равенства должен быть существенно положителен. Следовательно, первый член правой части дает минимальное значение всего выражения, соответствующее тому случаю, когда величина Y в каждом проводнике обращается в нуль и ток в каждом проводнике определяется законом Ома.

Отсюда вытекает следующая теорема:

284. В любой системе проводников, не содержащей внутренних электродвижущих сил, тепло, производимое токами, распределенными по закону Ома, оказывается, меньше, чем если бы токи были распределены любым другим способом, совместным с реальными условиями втекания и вытекания тока.

Тепло, которое действительно производится в цепи при выполнении закона Ома, эквивалентно в механическом отношении величине $\sum P_pQ_p$, т. е. сумме произведений количеств электричества, подводимых к разным внешним электродам, на потенциалы соответствующих электродов.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ VI

Изучаемые в п. 280 законы распределения токов могут быть выражены с помощью следующих легко запоминаемых правил.

Пусть потенциал одной из точек, скажем точки A_n, принят за нуль. Тогда, как показано в тексте, если в точку A_s притекает количество электричества Q_s, потенциал в точке A_p равен $-(D_{ps}/D)Q_s$.

Величины D и D_{ps} могут быть определены с помощью следующих правил. Величина $-D$ равна сумме произведений проводимостей, причем каждое произведение содержит $(n-1)$ сомножитель и не принимаются во внимание такие произведения, которые содержат проводимости ветвей, образующих замкнутые контуры. Величина D_{ps} равна сумме произведений, составленных каждое из $(n-2)$ сомножителей, причем не учитываются такие произведения, которые содержат проводимости ветвей A_pA_n или A_sA_n, а также такие, в которые входят проводимости ветвей, образующих либо сами по себе, либо с помощью ветвей A_pA_n или A_sA_n замкнутые контуры.

Из уравнения (10) видно, что электродвижущая сила E_{qr}, действующая в разветвлении A_qA_r действует так же, как и источник тока величины $K_{qr}E_{qr}$, расположенный в точке R, и сток той же величины, расположенный в точке Q, так что предыдущее правило применимо и к этому случаю. Однако результат приложения этого правила можно сформулировать проще следующим образом. Если электродвижущая сила E_{pq} действует вдоль проводника A_pA_q, то величина тока, возникающего при этом в другом проводнике A_rA_s, равна

$$K_{rs}K_{pq}(\Delta/D)E_{pq},$$

где D вычисляется по указанному выше правилу, а $\Delta=\Delta_1-\Delta_2$.

Тогда Δ_1 вычисляется следующим образом: составим из проводимостей всевозможные произведения, содержащие (n—2) сомножителей. Выберем из этих произведений такие, которые содержат как проводимость ветви A_pA_r (или произведение проводимостей тех ветвей, которые вместе с A_pA_r образуют замкнутый контур), так и проводимость ветви A_qA_s (или произведение проводимостей тех ветвей, которые вместе с A_sA_q образуют замкнутый контур). Из выбранных таким образом произведений отбросим те, которые содержат проводимости ветвей A_rA_s или A_pA_q, или же произведения проводимостей тех ветвей, которые образуют замкнутые контуры либо сами по себе, либо с помощью A_rA_s или A_pA_q. Сумма оставшихся членов даст выражение для Δ_1. Величина Δ_2 получается по тому же способу, только вместо ветвей A_pA_r и A_sA_q следует брать ветви A_pA_s и A_qA_r соответственно.

Если ток входит через точку P и выходит через точку Q, отношение этого тока к разности потенциалов между A_p и A_q равно D/Δ'.

Здесь Δ' представляет собой сумму произведений проводимостей, причем в каждое произведение входит (n—2) сомножителей, и отбрасываются все те произведения, которые содержат проводимость ветви A_pA_q, или содержат произведения проводимостей тех ветвей, которые вместе с ветвью A_pA_q образуют замкнутый контур.

В этих выражениях опускаются все члены, которые содержат произведение проводимостей, если соответствующие ветви образуют замкнутый контур.

Мы можем пояснить эти правила, применив их к очень важному случаю 4 точек, соединенных 6 проводниками. Обозначим точки номерами 1, 2, 3, 4.

Тогда D равно сумме произведений проводимостей, причем каждое произведение состоит из трех сомножителей, однако в сумму не включаются следующие 4 произведения: $K_{12}K_{23}K_{31}$, $K_{12}K_{24}K_{41}$, $K_{13}K_{34}K_{41}$ и $K_{23}K_{34}K_{42}$, поскольку они соответствуют четырем замкнутым контурам (123), (124), (134) и (234).

Таким образом,

$$D=(K_{14}+K_{24}+K_{34})(K_{12}K_{13}+K_{12}K_{23}+K_{13}K_{23})+K_{14}K_{24}(K_{13}+K_{23})+$$
$$+K_{14}K_{34}(K_{12}+K_{23})+K_{34}K_{24}(K_{12}+K_{13})+K_{14}K_{24}K_{34}.$$

Предположим, что электродвижущая сила E действует вдоль проводника (23), тогда ток в ветви (14) определяется соотношением

$$(\Delta_1-\Delta_2)\,EK_{14}K_{23}/D,$$

где $\Delta_1=K_{13}K_{24}$ (по определению), $\Delta_2=K_{12}K_{43}$.

Таким образом, если по проводнику (14) не идет ток, $K_{13}K_{24}-K_{12}K_{43}=0$; это равенство есть условие того, что проводники (23) и (14) являются сопряженными.

Ток через проводник (13) равен

$$[(K_{12}(K_{14}+K_{24}+K_{34})+K_{14}K_{24})/D]EK_{14}K_{23}.$$

Проводимость всего соединения для случая, когда ток входит через точку (2) и выходит через точку (3), равна

$$=\frac{D}{(K_{14}+K_{24}+K_{34})(K_{12}+K_{13})+K_{14}(K_{24}+K_{34})}.$$

Если соединение содержит 5 точек, то условие сопряженности проводников (23) и (14) имеет вид

$$K_{12}K_{34}(K_{15}+K_{25}+K_{35}+K_{45})+K_{12}K_{35}K_{45}+K_{34}K_{51}K_{52}=$$
$$=K_{13}K_{24}(K_{15}+K_{25}+K_{35}+K_{45})+K_{13}K_{52}K_{54}+K_{24}K_{51}K_{53}.$$

ГЛАВА VII

ПРОХОЖДЕНИЕ ТОКА В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Запись электрических токов

285. Выберем в некоторой точке элемент площади dS, ориентированный перпендикулярно к оси x. Пусть через эту площадку от отрицательной ее стороны к положительной проходит Q единиц электричества за единицу времени. Тогда, если отношение Q/dS при безграничном уменьшении dQ принимает предельное значение u, то эту величину u называют Составляющей электрического тока в направлении оси x в данной точке.

Точно так же мы можем определить v и w — составляющие электрического тока в направлениях соответственно y и z.

286. Для того чтобы определить составляющую тока, проходящего через точку O, в любом другом направлении OR, введем направляющие косинусы l, m, n отрезка OR. Тогда, если мы отсечем по осям x, y, z от начала координат, помещенного в точку O, отрезки, равные r/l, r/m и r/n, а концы отрезков обозначим соответственно A, B и C, то треугольник ABC будет перпендикулярен направлению OR [рис. 23].

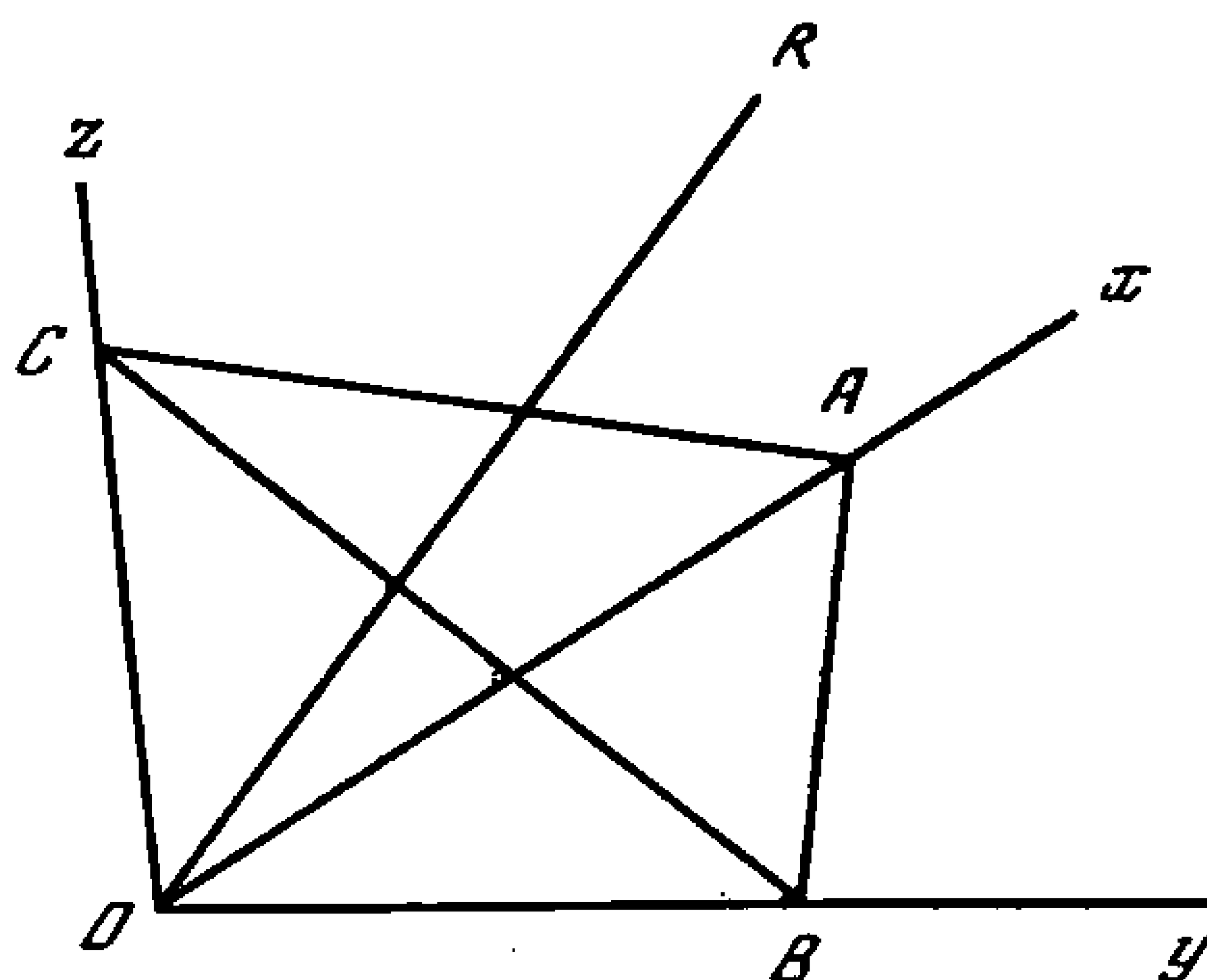


Рис. 23

Площадь этого треугольника ABC равна

$$dS=\frac{1}{2}\frac{r^2}{lmn},$$

и при уменьшении r эта площадь безгранично уменьшается.

Количество электричества, которое выходит из тетраэдра $ABCO$ через треугольную грань ABC, должно быть равно тому количеству электричества, которое втекает через остальные грани OBC, OCA и OAB.

Площадь треугольника OBC равна $r^2/(2\,mn)$, а составляющая тока, нормальная к плоскости этого треугольника, равна u, следовательно, количество электричества, входящее через этот треугольник в единицу времени, равно $(r^2u)/(2mn)$.

Количества электричества, которые входят через грани OCA и OAB за единицу времени, равны соответственно $(r^2v)/(2nl)$ и $(r^2w/(2lm)$.

Если составляющую тока в направлении OR обозначить через γ, то количество электричества, выходящее за единицу времени из тетраэдра через грань ABC, равно $(r^2\gamma)/(2lmn)$. Поскольку эта величина равна тому количеству электричества, которое входит через три остальные грани, мы получаем выражение

$$\frac{1}{2}\frac{r^2\gamma}{lmn}=\frac{1}{2}r^2\left\{\frac{u}{mn}+\frac{v}{nl}+\frac{w}{lm}\right\}.$$

Умножив его $(2lmn)/r^2$, получаем

$$\gamma=lu+mv+nw. \qquad (1)$$

Если мы положим

$$u^2+v^2+w^2=\Gamma^2$$

и введем три величины l', m' и n', такие, что

$$u=l'\Gamma,\quad v=m'\Gamma \text{ и } w=n'\Gamma, \text{ то}$$

$$\gamma=\Gamma\,(ll'+mm'+nn'). \qquad (2)$$

Таким образом, если мы определим результирующий ток как вектор, величина которого равна Γ, а направляющие косинусы равны l', m', n', и если γ обозначает проекцию тока на направление, составляющее с направлением результирующего тока угол θ, то

$$\gamma=\Gamma\cos\theta. \qquad (3)$$

Это показывает, что законы разложения тока являются такими же, как и законы разложения скоростей, сил и всех других векторов.

287. Выведем условие того, что некоторая данная поверхность является поверхностью тока. Пусть уравнение

$$F(x,\ y,\ z)=\lambda \qquad (4)$$

определяет семейство поверхностей, любая из которых может быть получена заданием определенного значения постоянной λ. Тогда, если положить

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2=\frac{1}{N^2}, \qquad (5)$$

то направляющие косинусы нормали, отсчитываемой в направлении роста λ, равны

$$l=N\frac{d\lambda}{dx},\qquad m=N\frac{d\lambda}{dy},\qquad n=N\frac{d\lambda}{dz}. \qquad (6)$$

Следовательно, если γ есть компонента тока, нормальная к поверхности, то

$$\gamma=N\left\{u\frac{d\lambda}{dx}+v\frac{d\lambda}{dy}+w\frac{d\lambda}{dz}\right\}. \qquad (7)$$

При $\gamma=0$ ток через поверхность отсутствует. В этом случае поверхность можно назвать Поверхностью Потока, потому что линии потока лежат на этой поверхности.

288. Поэтому уравнение поверхности потока имеет вид

$$u\frac{d\lambda}{dx}+v\frac{d\lambda}{dy}+w\frac{d\lambda}{dz}=0. \tag{8}$$

Если это уравнение соблюдается для всех значений λ, то все поверхности семейства являются поверхностями потока.

289. Предположим, что имеется другое семейство поверхностей с параметром λ'. Тогда, если поверхности этого семейства также являются поверхностями потока, мы получим

$$u\frac{d\lambda'}{dx}+v\frac{d\lambda'}{dy}+w\frac{d\lambda'}{dz}=0. \tag{9}$$

Если имеется еще и третье семейство поверхностей потока, отвечающее параметру λ'', то

$$u\frac{d\lambda''}{dx}+v\frac{d\lambda''}{dy}+w\frac{d\lambda''}{dz}=0. \tag{10}$$

Исключая из этих трех уравнений u, v и w, мы получим

$$\begin{vmatrix} \frac{d\lambda}{dx}, & \frac{d\lambda}{dy}, & \frac{d\lambda}{dz} \\ \frac{d\lambda'}{dx}, & \frac{d\lambda'}{dy}, & \frac{d\lambda'}{dz} \\ \frac{d\lambda''}{dx}, & \frac{d\lambda''}{dy}, & \frac{d\lambda''}{dz} \end{vmatrix}=0, \tag{11}$$

или

$$\lambda''=\varphi(\lambda, \lambda'), \tag{12}$$

т. е. λ'' есть некоторая функция от λ и λ'.

290. Рассмотрим теперь четыре поверхности, параметры которых равны λ, $\lambda+\delta\lambda$, λ' и $\lambda'+\delta\lambda'$. Эти четыре поверхности ограничивают некоторую четырехстороннюю трубку, которую мы можем назвать трубкой $\delta\lambda\cdot\delta\lambda'$. Поскольку эта трубка ограничена поверхностями, через которые нет потока, мы можем назвать ее Трубкой Тока. Если мы возьмем любые два поперечных сечения этой трубки, то количество потока, входящее в трубку через одно сечение, должно равняться количеству потока, которое выходит из трубки через другое сечение, и, поскольку это количество будет, таким образом, одно и то же для любого сечения трубки, обозначим его через $L\delta\lambda\cdot\delta\lambda'$, где L является функцией параметров λ и λ', определяющих рассматриваемую трубку.

291. Если δS обозначает площадь сечения трубки потока плоскостью, нормальной к оси x, то теория замены независимых переменных дает

$$\delta\lambda\cdot\delta\lambda'=\delta S\left(\frac{d\lambda}{dy}\cdot\frac{d\lambda'}{dz}-\frac{d\lambda}{dz}\cdot\frac{d\lambda'}{dy}\right), \tag{13}$$

и, по определению составляющих тока, имеем

$$u\,dS=L\delta\lambda\delta\lambda'. \tag{14}$$

Отсюда

$$u=L\left(\frac{d\lambda}{dy}\cdot\frac{d\lambda'}{dz}-\frac{d\lambda}{dz}\cdot\frac{d\lambda'}{dy}\right).$$

Аналогично

$$v=L\left(\frac{d\lambda}{dz}\frac{d\lambda'}{dx}-\frac{d\lambda}{dx}\frac{d\lambda'}{dz}\right),$$

$$w=L\left(\frac{d\lambda}{dx}\frac{d\lambda'}{dy}-\frac{d\lambda}{dy}\frac{d\lambda'}{dx}\right). \qquad (15)$$

292. Если известна одна из функций λ или λ', то всегда возможно определить другую таким образом, чтобы величина L равнялась единице. Например, возьмем плоскость yz и проведем на ней ряд равноотстоящих линий, параллельных оси y. Пусть эти линии представляют собой линии пересечения плоскости yz с семейством поверхностей λ'. Другими словами, пусть функция λ' определяется условием, что $\lambda'=z$ при $x=0$. Если положить теперь $L=1$ и, следовательно (при $x=0$), $\lambda=\int u dy$, то количество электричества, проходящее через любую часть плоскости $x=0$, будет равно

$$\iint u dy dz=\iint d\lambda d\lambda'. \qquad (16)$$

Коль скоро задан характер пересечения поверхностей тока с плоскостью yz, форма этих поверхностей в пространстве всюду определяется условиями (8) и (9). Определенные так две функции λ и λ' достаточны для определения тока в любой точке с помощью соотношений (15), где величину L следует положить равной единице.

О линиях потока

293. Выберем последовательности значений λ и λ' так, что в обеих этих последовательностях соседние значения отстоят друг от друга на единицу. Две системы поверхностей, отвечающие этим наборам значений λ и λ', разделят пространство на систему трубок с четырехсторонним сечением, по каждой из которых будет протекать единичный ток. Считая эту единицу достаточно малой, можно определить все детали распределения тока с любой желаемой степенью точности. Тогда, если провести любую поверхность, пересекающую систему трубок, величина тока, проходящего через эту поверхность, будет выражаться *числом* трубок, пересекающих поверхность, поскольку по каждой трубке идет единичный ток.

Пересечения поверхностей тока могут быть названы линиями потока. Если единица выбрана достаточно малой, число линий потока, пересекающих некоторую поверхность, примерно равно числу пересекающих ее потоковых трубок, и мы, таким образом, можем рассматривать линии потока как определяющие не только *направление* тока, но также и его *силу*, поскольку каждая линия потока, пересекающая данную поверхность, соответствует единичному току.

О токовых листах и токовых функциях

294. Слой проводника, заключенного между двумя соседними поверхностями тока некоторой системы, скажем системы λ', называется токовым листом. Трубки тока внутри этого слоя определяются функцией λ. Если значения λ в точках A и P

обозначить соответственно через λ_A и λ_P, тогда ток, текущий справа налево через любую линию, проведенную на листе от A к P, равен $\lambda_P—\lambda_A$. Если AP есть некоторый элемент ds кривой, проведенной на листе, ток, пересекающий этот элемент справа налево, равен $(d\lambda/ds)ds$. Эта функция λ, которая позволяет полностью определить распределение тока в слое, называется Токовой функцией.

Любой тонкий лист металла или проводящего вещества, ограниченный с двух сторон воздухом или некоторой другой непроводящей средой, может рассматриваться как токовый лист, в котором распределение тока может быть выражено с помощью токовой функции (см. п. 647).

Уравнение непрерывности

295. Если продифференцировать каждое из трех уравнений (15) соответственно по x, y, z, имея при этом в виду, что L является функцией от λ и λ', найдем

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0. \tag{17}$$

Соответствующее уравнение в гидродинамике называется Уравнением «Непрерывности». Та непрерывность, которую оно выражает, есть непрерывность существования, т. е. это означает, что материальное вещество не может покинуть одну часть пространства и появиться в другой, не проходя через пространство между ними. Оно не может просто исчезнуть в одном месте и появиться в другом, а должно пройти по некоторому непрерывному пути, так что, если провести замкнутую поверхность, включающую одно местоположение и исключающую другое, материальное вещество, переходя из этого одного положения в другое, должно пройти через эту замкнутую поверхность. Наиболее общей формой этого уравнения в гидродинамике является уравнение

$$\frac{d(\rho u)}{dx}+\frac{d(\rho v)}{dy}+\frac{d(\rho w)}{dz}+\frac{d\rho}{dt}=0, \tag{18}$$

где ρ обозначает отношение количества вещества к занимаемому объему (в данном случае рассматривается дифференциальный элемент объема), а величины (ρu), (ρv), (ρw) — отношения количества вещества, пересекающего в единицу времени элемент поверхности, к площади этого элемента, при этом элемент площади выбирается перпендикулярно к осям x, y и z соответственно. Имея это в виду, уравнение можно применять к любой материальной среде, твердой или жидкой, для непрерывного или разрывного движения при условии, что существование отдельных частей этой среды является непрерывным. Если что бы то ни было, пускай и не вещество, подчиняется условию непрерывного существования во времени и пространстве, указанное уравнение будет выражать это условие.

Уравнения подобного вида возникают в других разделах Физического Учения, например в теории электрических и магнитных величин. Мы будем называть такие уравнения «уравнениями непрерывности», указывая на их форму, хотя мы можем и не придавать входящим в эти уравнения величинам свойства вещества, или даже непрерывное существование во времени и пространстве.

Уравнение (17), к которому мы пришли в случае электрических токов, тождественно с (18), если мы положим $\rho=1$, т. е. если мы предположим, что соот-

ветствующее вещество является однородным и несжимаемым. Для случая жидкости это уравнение также может быть установлено любым из способов, приводимых в трактатах по гидродинамике. В одном случае мы следим за движением и деформацией некоторого выбранного элемента жидкости по мере его перемещения. В другом случае мы фиксируем наше внимание на некотором элементе пространства и учитываем все, что втекает в этот элемент и вытекает из него.

Первый из этих двух методов не может быть применен к электрическим токам, потому что мы не знаем, с какой скоростью электричество проходит через тело, и даже не знаем, движется оно в положительном или отрицательном направлении тока. Все, что мы знаем — это алгебраическое значение величины количества электричества, которое пересекает единицу площади за единицу времени,— величины, соответствующей (ρu) в уравнении (18). Мы не можем приписать определенного значения какому-либо из множителей ρ или u, и поэтому мы не можем следовать за какой-либо отдельной порцией электричества на ее пути через тело. Другой метод исследования, где мы рассматриваем то, что проходит через стенки некоторого элемента объема, применим к электрическим токам и, по-видимому, является формально предпочтительным по сравнению с тем, который приведен нами, но нам нет нужды его здесь повторять, поскольку он излагается в любом трактате по гидродинамике.

Количество электричества, которое проходит через данную поверхность

296. Пусть результирующий ток в любой точке данной поверхности равен Γ. Элемент поверхности обозначим через dS, а угол между током Γ и внешней нормалью к поверхности обозначим через ε. Тогда полный ток через поверхность будет равен

$$\iint \Gamma \cos\varepsilon \, dS,$$

где интегрирование проводится по поверхности.

В случае произвольной замкнутой поверхности мы можем, как и в п. 21, преобразовать этот интеграл к виду

$$\iint \Gamma \cos\varepsilon \, dS = \iiint \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) dx\, dy\, dz, \tag{19}$$

причем тройное интегрирование проводится по объему, ограниченному этой поверхностью. Эта формула дает выражение для полного потока, вытекающего из замкнутой поверхности. Поскольку во всех случаях стационарных токов эта величина должна быть равна нулю при любых пределах интегрирования, величина под знаком интеграла должна обратиться в нуль, и мы получаем таким путем уравнение непрерывности (17).

ГЛАВА VIII
СОПРОТИВЛЕНИЕ И ПРОВОДИМОСТЬ В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

О наиболее общих соотношениях между током и электродвижущей силой

297. Обозначим составляющие тока в любой точке через u, v, w. Составляющие электродвижущей напряженности обозначим через X, Y, Z.

Электродвижущая напряженность в любой точке есть результирующая сила, действующая на единицу положительного электричества, помещенную в этой точке. Электродвижущая напряженность может возникать: (1) от действия электростатических сил. В этом случае, если V — потенциал, то

$$X = -\frac{dV}{dx}, \qquad Y = -\frac{dV}{dy}, \qquad Z = -\frac{dV}{dz}; \tag{1}$$

или (2) из-за электромагнитной индукции, законы которой мы рассмотрим позднее; или (3) из-за термоэлектрического или электрохимического действия в рассматриваемой точке, вызывающих ток в данном направлении.

Мы будем, как правило, предполагать, что величины X, Y, Z являются составляющими электродвижущей напряженности, действующей в данной точке, каково бы ни было происхождение этой силы, однако иногда мы будем рассматривать следствия из предположения, по которому электродвижущая напряженность целиком обусловлена изменением потенциала.

По Закону Ома ток пропорционален электродвижущей напряженности. Следовательно, X, Y, Z должны быть линейными функциями от u, v, w. Мы, таким образом, можем принять в качестве Уравнений Сопротивления

$$\begin{aligned} X &= R_1u + Q_3v + P_2w, \\ Y &= P_3u + R_2v + Q_1w, \\ Z &= Q_2u + P_1v + R_3w. \end{aligned} \tag{2}$$

Мы можем назвать коэффициенты R коэффициентами продольного сопротивления в направлениях координатных осей.

Коэффициенты P и Q могут быть названы коэффициентами поперечного сопротивления. Они определяют электродвижущую напряженность, действующую в одном каком-нибудь направлении, необходимую для того, чтобы создать ток, текущий в другом направлении.

Если бы мы были свободны предположить, что твердое тело может рассматриваться как совокупность линейных проводников, то, используя свойство взаимности двух любых проводников в линейной системе (п. 281), мы могли бы показать, что электродвижущая сила, направленная вдоль оси z и создающая единичный ток, направленный вдоль оси y, должна равняться электродвижущей силе, действующей вдоль оси y и создающей единичный ток вдоль оси z. Это означало бы, что $P_1 = Q_1$. Подобным же образом мы получили бы $P_2 = Q_2$ и $P_3 = Q_3$. Если эти условия выполняются, то говорят, что система коэффициентов является Симметричной. Если они не выполняются, система называется Косой (Skew).

Имеется серьезная причина полагать, что в любом реальном случае система коэффициентов является симметричной, но мы в дальнейшем рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из предположения о возможной несимметричности коэффициентов.

298. Величины u, v, w могут быть выражены как линейные функции составляющих X, Y, Z с помощью системы уравнений, которую мы можем назвать Уравнениями Проводимости:

$$\begin{aligned} u &= r_1X + p_3Y + q_2Z, \\ v &= q_3X + r_2Y + p_1Z, \\ w &= p_2X + q_1Y + r_3Z. \end{aligned} \qquad (3)$$

Коэффициенты r можно назвать коэффициентами Продольной проводимости, а коэффициенты p и q — коэффициентами Поперечной проводимости.

Коэффициенты сопротивления обратны коэффициентам проводимости. Эту связь можно определить следующим образом.

Обозначим определитель, составленный из коэффициентов сопротивления, через $[PQR]$, а определитель, составленный из коэффициентов проводимости,— через $[pqr]$. Тогда

$$[PQR]=P_1P_2P_3+Q_1Q_2Q_3+R_1R_2R_3-R_1Q_1R_1-P_2Q_2R_2-P_3Q_3R_3, \qquad (4)$$

$$[pqr]=p_1p_2p_3+q_1q_2q_3+r_1r_2r_3-p_1q_1r_1-p_2q_2r_2-p_3q_3r_3, \qquad (5)$$

$$[PQR]\,[pqr]=1, \qquad (6)$$

$$[PQR]p_1=(P_2P_3-Q_1R_1), \qquad [pqr]P_1=(p_2p_3-q_1r_1), \qquad (7)$$

и т. д. и т. д.

Другие уравнения могут быть получены циклической перестановкой символов P, Q, R, p, q, r и индексов 1, 2, 3.

Скорость образования тепла

299. Для того чтобы найти работу, совершаемую током в единицу времени на преодоление сопротивления и тем самым на образование тепла, умножим составляющие тока на соответствующие составляющие электродвижущей напряженности. Мы получим следующее выражение для работы W, совершаемой за единицу времени:

$$W=Xu+Yv+Zw; \qquad (8)$$

$$=R_1u^2+R_2v^2+R_3w^2+(P_1+Q_1)vw+(P_2+Q_2)wu+(P_3+Q_3)uv; \qquad (9)$$

$$=r_1X^2+r_2Y^2+r_3Z^2+(p_1+q_1)YZ+(p_2+q_2)ZX+(p_3+q_3)XY. \qquad (10)$$

С помощью подходящего выбора осей из выражения (9) можно убрать произведения составляющих u, v, w или же произведения компонент X, Y, Z. Однако система осей, в которой выражение для W приводится к виду $R_1u^2+R_2v^2+R_3w^2$, вообще говоря, не совпадает с системой осей, в которой оно приводится к виду $r_1X^2+r_2Y^2+r_3Z^2$.

Эти две системы осей совпадают только в том случае, когда коэффициенты P_1, P_2, P_3 равны соответственно коэффициентам Q_1, Q_2, Q_3.

Если, следуя Томсону [1], мы положим

$$P=S+T,\ Q=S-T \text{ и } p=s+t,\ q=s-t, \tag{11}$$

тогда мы получим

$$[PQR]=R_1R_2R_3+2S_1S_2S_3-S_1^2R_1-S_2^2R_2-S_3^2R_3+$$
$$+2(S_1T_2T_3+S_2T_3T_1+S_3T_1T_2)+R_1T_1^2+R_2T_2^2+R_3T_3^2 \tag{12}$$

и

$$\left.\begin{aligned}[PQR]\,r_1&=R_2R_3-S_1^2+T_1^2,\\ [PQR]\,s_1&=T_2T_3+S_2S_3-R_1S_1,\\ [PQR]\,t_1&=R_1T_1+S_2T_3+S_3T_2.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Поэтому, если мы обратим S_1, S_2, S_3 в нуль, коэффициенты s не исчезают, если коэффициенты T не равны нулю.

Условие устойчивости

300. Поскольку равновесие электричества является устойчивым, работа, затраченная на поддержание тока, должна всегда быть положительной. Условия, при выполнении которых величина W всегда является положительной, заключаются в том, что три коэффициента R_1, R_2, R_3, а также три выражения

$$\left.\begin{aligned}&4R_2R_3-(P_1+Q_1)^2,\\ &4R_3R_1-(P_2+Q_2)^2,\\ &4R_1R_2-(P_3+Q_3)^2\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

должны все быть положительны.

Сходные соотношения имеют место и для коэффициентов проводимости.

Уравнения непрерывности в однородной среде

301. Если мы запишем составляющие электродвижущей силы в виде производных от потенциала V, уравнение непрерывности

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0 \tag{15}$$

в однородной среде примет форму

$$r_1\frac{d^2V}{dx^2}+r_2\frac{d^2V}{dy^2}+r_3\frac{d^2V}{dz^2}+2s_1\frac{d^2V}{dy\,dz}+2s_2\frac{d^2V}{dz\,dx}+2s_3\frac{d^2V}{dx\,dy}=0. \tag{16}$$

Если среда не является однородной, в уравнение войдут члены, обусловленные изменением коэффициентов проводимости при переходе от одной точки к другой.

Это уравнение соответствует уравнению Лапласа в анизотропной среде.

302. Если положить

$$[rs]=r_1r_2r_3+2s_1s_2s_3-r_1s_1^2-r_2s_2^2-r_3s_3^2 \tag{17}$$

[1] *Trans. R. S. Edin.*, 1853—4, p. 165.

и

$$[AB]=A_1A_2A_3+2B_1B_2B_3-A_1B_1^2-A_2B_2^2-A_3B_3^2, \tag{18}$$

где

$$[rs]\,A_1=r_2r_3-s_1^2, \qquad [rs]\,B_1=s_2s_3-r_1s_1, \quad \ldots\ldots\ldots \tag{19}$$

и т. д., то система A, B будет обратна системе r, s, и, если обозначим

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+2B_1yz+2B_2zx+2B_3xy=[AB]\rho^2, \tag{20}$$

мы найдем, что выражение

$$V=\frac{C}{4\pi}\cdot\frac{1}{\rho} \tag{21}$$

является решением этого уравнения.

В случае, когда коэффициенты T равны нулю, коэффициенты A и B совпадают с коэффициентами R и S из п. 299. При наличии T этого не происходит.

Таким образом, в случае, когда электричество вытекает из некоторого центра, помещенного в бесконечной, однородной, но не изотропной среде, эквипотенциальные поверхности являются эллипсоидами, для каждого из которых ρ имеет постоянное значение. Оси этих эллипсоидов направлены по главным осям проводимости, и если система не является симметричной, то они не совпадают с главными осями сопротивления.

Преобразовав уравнение (16), мы можем принять за оси x, y, z главные оси проводимости. Тогда коэффициенты форм s и B обратятся в нуль, а каждый коэффициент формы A будет обратен соответствующему коэффициенту формы r. Выражение для ρ будет

$$\frac{x^2}{r_1}+\frac{y^2}{r_2}+\frac{z^2}{r_3}=\frac{\rho^2}{r_1r_2r_3}. \tag{22}$$

303. Теория полной системы уравнений сопротивления и проводимости есть теория линейных функций от трех переменных, которая применяется, например, в теории Упругости и в других областях физики [2]. Наиболее подходящим методом рассмотрения является тот, с помощью которого Гамильтон и Тэт рассматривают линейную и векторную функцию вектора. Мы, однако, не будем вводить явно Кватернионные обозначения.

Коэффициенты T_1, T_2, T_3 могут рассматриваться как прямоугольные составляющие вектора T, абсолютная величина и направление которого фиксированы в теле и не зависят от направления осей отсчета. То же самое верно и для величин t_1, t_2, t_3, которые являются составляющими другого вектора t.

Векторы T и t, вообще говоря, не совпадают по направлению.

Выберем теперь ось z так, чтобы она совпадала с вектором T, и в соответствии с этим преобразуем уравнения сопротивления. Они тогда примут форму

$$\left.\begin{aligned} X&=R_1u+S_3v+S_2w-Tv,\\ Y&=S_3u+R_2v+S_1w+Tu,\\ Z&=S_2u+S_1v+R_3w. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

[2] См. Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, § 154.

Из этих уравнений следует, что мы можем рассматривать электродвижущую напряженность как равнодействующую двух сил, из которых одна зависит только от коэффициентов R и S, а вторая — только от T. Часть, зависящая от R и S, связана с током таким же образом, как перпендикуляр к плоскости, касающейся эллипсоида, связан с радиус-вектором, проведенным в точку касания. Другая часть, зависящая от T, равна по величине произведению T на слагающую тока, перпендикулярную к оси T, и направлена перпендикулярно к T и к направлению этого тока, совпадая по направлению с тем, в котором лежала бы перпендикулярная слагающая тока, если ее повернуть на 90° в положительном направлении вокруг оси T.

Если мы рассматриваем ток и T как векторы, то часть электродвижущей напряженности, обусловленная T, есть векторная часть произведения $T \times$ток.

Коэффициент T может быть назван Вращательным коэффициентом. У нас есть основания полагать, что этот коэффициент не существует ни в одном из известных веществ. Если где-либо этот коэффициент и мог бы быть обнаружен, то в магнитах, имеющих поляризацию в одном направлении, вероятно, вызванную явлением вращения в этом веществе.

304. Предполагая теперь, что вращательный коэффициент отсутствует, мы покажем, как можно распространить теорему Томсона, изложенную в п. 100 а—100 д, чтобы доказать, что тепло, производимое токами в рассматриваемой системе за данное время, есть единственный минимум.

Для упрощения алгебраических расчетов выберем оси координат так, чтобы свести выражение (9), а следовательно, и выражение (10) к трем слагаемым. Рассмотрим теперь общее характеристическое уравнение (16), которое тогда сводится к виду

$$r_1 \frac{d^2V}{dx^2} + r_2 \frac{d^2V}{dy^2} + r_3 \frac{d^2V}{dz^2} = 0. \tag{24}$$

Обозначим также через a, b, c три функции от x, y, z, удовлетворяющих условию

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0, \tag{25}$$

и положим

$$a = -r_1 \frac{dV}{dx} + u, \qquad b = -r_2 \frac{dV}{dy} + v, \qquad c = -r_3 \frac{dV}{dz} + w. \tag{26}$$

Наконец, пусть тройной интеграл

$$W = \iiint (R_1 a^2 + R_2 b^2 + R_3 c^2)\, dx\, dy\, dz \tag{27}$$

распространен по объему, ограниченному, как это было сделано в п. 100 а, а именно на некоторых участках границы величина V является постоянной или же задана нормальная составляющая вектора a, b, c, причем предыдущее условие сопровождается дополнительным ограничением, что интеграл от этой составляющей по граничной поверхности должен обращаться в нуль. Тогда интеграл W принимает минимальное значение, если $u=0$, $v=0$, $w=0$.

Действительно, в этом случае $r_1R_1=1$, $r_2R_2=1$, $r_3R_3=1$, и поэтому с учетом (26)

$$W=\iiint\left[r_1\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+r_2\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+r_3\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz+$$
$$+\iiint(R_1u^2+R_2v^2+R_3w^2)\,dx\,dy\,dz-2\iiint\left(u\frac{dV}{dx}+v\frac{dV}{dy}+w\frac{dV}{dz}\right)dx\,dy\,dz. \quad (28)$$

Но, поскольку

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0, \quad (29)$$

третье слагаемое исчезает в силу условий на границах.

Таким образом, первое слагаемое в сумме (28) представляет собой единственное минимальное значение величины W.

305. Поскольку это предположение очень важно для теории электричества, может оказаться полезным следующее доказательство самого общего случая в форме, свободной от аналитических операций.

Рассмотрим распространение электричества через проводник любой формы, однородный или неоднородный.

Тогда мы знаем, что:

(1) Если мы проведем линию вдоль пути и в направлении электрического тока, эта линия должна проходить от мест с высоким потенциалом к местам с низким потенциалом.

(2) Если потенциал в каждой точке системы изменится в заданном постоянном отношении, ток изменится в том же самом отношении в соответствии с Законом Ома.

(3) Если определенное распределение потенциала вызывает определенное распределение токов, а другое распределение потенциала вызывает другое распределение токов, то третье распределение, в котором потенциал есть сумма или разность потенциалов, отвечающих первому и второму распределениям, вызовет третье распределение токов, такое, что полный ток, проходящий через данную конечную поверхность, в третьем случае равен сумме или разности токов, проходящих через нее в первом и втором случаях. Ибо по Закону Ома добавочный ток, вызванный изменением потенциалов, не зависит от начального тока, вызванного начальным распределением потенциалов.

(4) Если потенциал имеет одно и то же значение на всей замкнутой поверхности и если внутри нее нет электродов или внутренних электродвижущих сил, то внутри замкнутой поверхности не будет токов и потенциал в любой точке внутри нее будет равен потенциалу на поверхности.

Если внутри замкнутой поверхности имеются токи, они либо должны образовывать замкнутые кривые, либо должны начинаться и оканчиваться внутри замкнутой поверхности или на самой поверхности.

Но поскольку ток должен проходить от мест с высоким к местам с низким потенциалом, он не может течь по замкнутой кривой.

Поскольку внутри поверхности нет электродов, ток не может начинаться или заканчиваться внутри замкнутой поверхности, а поскольку потенциал во всех точках поверхности один и тот же, не может существовать ток вдоль линий, проходящих от одной точки поверхности к другой.

Таким образом, внутри поверхности нет токов и поэтому не может быть разности потенциалов, потому что такая разность вызвала бы ток, и, следовательно, потенциал внутри замкнутой поверхности всюду такой же, как на поверхности.

(5) Если через любую часть замкнутой поверхности не проходит электрического тока и если внутри поверхности нет электродов или внутренних электродвижущих сил, то внутри поверхности не будет токов и потенциал будет однороден.

Мы убедились в том, что токи не могут образовывать замкнутых кривых, а также начинаться или заканчиваться внутри поверхности, и поскольку, по предположению, токи не проходят через поверхность, они не могут существовать и потенциал есть постоянная величина.

(6) Если потенциал не меняется на некоторой части замкнутой поверхности, а через остальную часть этой поверхности не текут токи, то потенциал внутри поверхности будет постоянным по тем же причинам.

(7) Если на одной части поверхности тела известен потенциал в каждой точке, а на остальной части поверхности известен ток, протекающий через поверхность в каждой точке, то для точек внутри тела может существовать только одно распределение потенциала.

Действительно, если бы в каждой точке внутри тела существовали два различных значения потенциала, пускай они равнялись бы V_1 в первом случае и V_2 во втором случае, и представим себе третий случай, в котором потенциал каждой точки тела равен превышению потенциала в первом случае над потенциалом во втором случае.

Тогда на той части поверхности, для которой потенциал известен, в третьем случае он будет равен нулю, и для той части поверхности, где известны токи, в третьем случае они также будут равны нулю, так что, по (6), потенциал всюду внутри поверхности будет равен нулю, т. е. нет превышения ни V_1 над V_2, ни наоборот. Таким образом, имеется только одно возможное распределение потенциалов. Это предложение верно в случаях, когда тело ограничено как одной, так и несколькими замкнутыми поверхностями.

О приближенном вычислении сопротивления проводника заданной формы

306. У рассматриваемого здесь проводника поверхность разделена на три части На одной из этих частей потенциал имеет некоторое постоянное значение. На второй части потенциал имеет постоянное значение, отличное от первого. Вся остальная поверхность непроницаема для электричества. Мы можем предположить, что условия, налагаемые на первую и вторую части поверхности, будут выполнены, если приложить к проводнику два электрода из совершенно проводящего материала, а условие, налагаемое на остальную часть поверхности, можно выполнить, покрыв ее совершенно непроводящим материалом.

При этих условиях ток в каждой части проводника просто пропорционален разности между потенциалами электродов. Если назвать эту разность электродвижущей силой, то полный ток от одного электрода к другому равен произведению электродвижущей силы на проводимость проводника как целого, а сопротивление проводника есть величина, обратная проводимости.

Только когда проводник находится примерно в таких условиях, которые определены выше, можно говорить, что он, как целое, обладает сопротивлением или

проводимостью. Катушка сопротивления, состоящая из тонкой проволоки, концы которой выведены на большие медные массы, приблизительно удовлетворяет этим условиям, потому что потенциал внутри массивного электрода является почти постоянным, и любые разности потенциалов в разных точках одного и того же электрода могут считаться пренебрежимо малыми в сравнении с разностью потенциалов двух электродов.

Очень полезный метод для вычисления сопротивления таких проводников был предложен, насколько я знаю, впервые лордом Рэлеем в работе «О теории резонанса» [3].

Он основан на следующих соображениях.

Если изменить удельное сопротивление любой части проводника, не меняя удельное сопротивление остальных частей, то сопротивление всего проводника увеличится, если сопротивление этой части возросло, и уменьшится, если сопротивление этой части уменьшилось.

Этот принцип может рассматриваться как само собой разумеющийся, но легко можно показать, что величина выражения для сопротивления системы проводников между двумя точками, выбранными за электроды, возрастает, по мере того как возрастает сопротивление каждого члена системы.

Отсюда следует, что если в веществе проводника проведена поверхность любой формы и если мы затем предположим, что эта поверхность представляет собой бесконечно тонкий слой идеально проводящего вещества, то сопротивление проводника как целого уменьшится, если только эта поверхность не является одной из эквипотенциальных поверхностей в естественном состоянии проводника, а в этом случае ничего не изменится от превращения этой поверхности в идеальный проводник, потому что эта поверхность и так уже находится в электрическом равновесии.

Следовательно, если мы проведем внутри проводника ряд поверхностей, из которых первая совпадает с первым электродом, а последняя — со вторым, а промежуточные поверхности ограничены непроводящей поверхностью и не пересекают одна другую, и если мы предположим, что каждая из этих поверхностей представляет собой бесконечно тонкий слой идеально проводящего вещества, мы получим систему, сопротивление которой во всяком случае не превышает сопротивление первоначального проводника, причем равенство имеет место только тогда, когда выбранные нами поверхности являются естественными эквипотенциальными поверхностями.

Вычисление сопротивления такой искусственной системы представляет собой дело гораздо менее сложное, чем первоначальная задача. Действительно, сопротивление целого есть сумма сопротивлений всех слоев, заключенных между последовательными поверхностями, и сопротивление каждого слоя может быть найдено так:

Пусть dS — элемент поверхности слоя, ν — толщина слоя в направлении, перпендикулярном к этому элементу, ρ — удельное сопротивление, E — разность потенциалов между двумя идеально проводящими поверхностями, dC — ток через dS, тогда

$$dC = E\frac{1}{\rho\nu}dS, \qquad (1)$$

[3] *Phil. Trans.*, 1871, p. 77. См. п. 102а.

а полный ток через слой равен

$$C = E \iint \frac{1}{\rho\nu}\, dS; \tag{2}$$

интегрирование распространяется на весь слой, ограниченный непроводящей поверхностью проводника.

Отсюда проводимость слоя равна

$$\frac{C}{E} = \iint \frac{1}{\rho\nu}\, dS, \tag{3}$$

а сопротивление слоя есть величина, обратная этой.

Если слой ограничен двумя поверхностями, на которых значения функции F равны соответственно F и $F+dF$, то

$$\frac{dF}{\nu} = \nabla F = \left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{4}$$

и сопротивление слоя равно

$$\frac{dF}{\iint \frac{1}{\rho}\, \nabla F\, dS}. \tag{5}$$

Для того чтобы найти сопротивление всего искусственного проводника, нам нужно только проинтегрировать по F, и мы найдем

$$R_1 = \int \frac{dF}{\iint \frac{1}{\rho}\, \nabla F\, dS}. \tag{6}$$

Сопротивление R проводника в его естественном состоянии будет больше, чем полученное таким способом значение, если только все поверхности, которые мы выбрали, не являются естественными эквипотенциальными поверхностями. Кроме того, поскольку истинное значение R есть абсолютный максимум значений R_1, который может быть таким способом получен, небольшие отклонения выбранных поверхностей от истинных эквипотенциальных поверхностей приведут к ошибке в значении R, которая является относительно малой.

Очевидно, что этот метод, определяющий нижнюю границу величины сопротивления, является совершенно общим и может быть применен к проводникам любой формы даже в том случае, если удельное сопротивление ρ произвольным образом меняется внутри проводника.

Наиболее знакомый пример — обычный метод определения сопротивления прямого провода переменного сечения. В этом случае выбранные поверхности являются плоскостями, перпендикулярными к оси проволоки, торцы слоев параллельны и сопротивление слоя, имеющего сечение S и толщину ds, равно

$$dR_1 = \frac{\rho\, ds}{S}, \tag{7}$$

а сопротивление всего провода длиной s равно

$$R_1 = \int \frac{\rho\, ds}{S}, \tag{8}$$

где S есть поперечное сечение, зависящее от s.

Этот метод дает результаты, очень близкие к истине, для проводов с медленно меняющимся по длине сечением. Но в действительности он дает только нижнюю границу, потому что истинное сопротивление всегда больше, за исключением случаев, когда сечение совершенно однородно.

307. Чтобы найти верхнюю границу сопротивления, предположим, что в проводнике проведена некоторая поверхность, которая сделана непроницаемой для электричества. Это должно увеличить сопротивление проводника, если только эта поверхность не является одной из естественных поверхностей тока. С помощью двух систем поверхностей мы можем создать набор трубок, которые будут полностью регулировать ток, и это приведет к тому (если это вообще к чему-нибудь приведет), что эта система непроницаемых поверхностей должна будет сделать сопротивление больше его естественного значения.

Сопротивление каждой из трубок может быть вычислено с помощью метода, уже приведенного для тонких проводов, и сопротивление всего проводника равно обратной величине от суммы обратных сопротивлений всех трубок. Найденное таким образом сопротивление больше, чем естественное сопротивление, за исключением того случая, когда трубки следуют естественным линиям тока.

В уже рассмотренном случае, когда проводник представляет собой вытянутое тело вращения, будем измерять x вдоль оси и обозначим через b радиус сечения в каждой точке. Пусть один набор непроницаемых поверхностей состоит из плоскостей, проходящих через ось, для каждой из которых значение φ опостоянно, и пусть другой набор состоит из поверхностей вращения, для которых

$$y^2=\psi b^2, \tag{9}$$

где ψ есть число в промежутке между 0 и 1.

Рассмотрим часть одной из трубок, ограниченную поверхностями φ и $\varphi+d\varphi$, ψ и $\psi+d\psi$, x и $x+dx$.

Сечение трубки, выбранное перпендикулярно оси, равно

$$y\,dy\,d\varphi=(b^2/2)d\psi\,d\varphi. \tag{10}$$

Если обозначить через θ угол, который трубка составляет с осью, то

$$\operatorname{tg}\theta=\psi^{1/2}(db/dx). \tag{11}$$

Истинная длина элемента трубки равна $dx\sec\theta$, а истинное сечение равно $(b^2/2)d\psi\,d\varphi\cos\theta$, так что сопротивление этого элемента равно

$$2\rho\frac{dx}{b^2\,d\psi\,d\varphi}\sec^2\theta=2\rho\frac{dx}{b^2\,d\psi\,d\varphi}\left[1+\psi\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Пусть

$$A=\int\frac{\rho}{b^2}\,dx, \qquad B=\int\frac{\rho}{b^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2dx, \tag{13}$$

где интегрирование распространяется на всю длину x проводника. Тогда сопротивление трубки $d\psi\;d\varphi$ равно $\frac{2}{d\psi d\varphi}(A+\psi B)$, а ее проводимость есть $\frac{d\psi\,d\varphi}{2(A+\psi B)}$.

Чтобы найти проводимость всего проводника, которая равна сумме проводимостей отдельных трубок, мы должны проинтегрировать это выражение в пределах

от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$ и от $\psi=0$ до $\psi=1$. В результате

$$\frac{1}{R'}=\frac{\pi}{B}\ln\left(1+\frac{B}{A}\right). \tag{14}$$

Эта величина может быть меньше, но не может быть больше, чем истинная проводимость проводника.

В случае, когда db/dx всегда является малой величиной, отношение B/A также будет малым, и мы можем разложить выражение для проводимости таким образом:

$$\frac{1}{R'}=\frac{\pi}{A}\left(1-\frac{1}{2}\frac{B}{A}+\frac{1}{3}\frac{B^2}{A^2}-\frac{1}{4}\frac{B^3}{A^3}+\text{ и т. д.}\right). \tag{15}$$

Первый член этого разложения π/A есть та величина, которую мы получили бы предыдущим методом как верхнюю границу проводимости. Таким образом, истинная проводимость оказывается меньше первого члена, но больше всего ряда. Верхнее значение сопротивления есть величина, обратная этой, т. е.

$$R'=\frac{A}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\frac{B}{A}-\frac{1}{12}\frac{B^2}{A^2}+\frac{1}{24}\frac{B^3}{A^3}-\text{ и т. д.}\right). \tag{16}$$

Если, кроме предположения о том, что ток направляется поверхностями φ и ψ, мы бы предположили, что ток через каждую трубку пропорционален $d\psi\, d\varphi$, мы бы получили следующее выражение для величины сопротивления при этом добавочном ограничении:

$$R''=\frac{1}{\pi}\left(A+\frac{1}{2}B\right), \tag{17}$$

что очевидно превышает предыдущее значение, как это и должно быть ввиду наложенного добавочного предположения. В работе лорда Рэлея [4] сделано именно такое предположение, и приведенная там верхняя граница для сопротивления имеет значение (17), что несколько превышает величину, полученную нами в (16).

308. Мы теперь применим тот же метод, для того чтобы найти поправку, которую следует внести на длину цилиндрического проводника радиуса a, когда его конец находится в металлическом контакте с массивным электродом, который можно предполагать сделанным из другого металла.

Для нижней границы сопротивления мы предположим, что между концом цилиндра и массивным электродом помещен бесконечно тонкий диск из идеально проводящего вещества, так что конец цилиндра всюду имеет один и тот же потенциал. Тогда потенциал внутри цилиндра будет зависеть только от его длины, и если мы предполагаем, что поверхность электрода там, где она встречается с цилиндром, является приблизительно плоской и что все размеры электрода велики в сравнении с диаметром цилиндра, то распределение потенциала будет таким, как у проводника, имеющего форму диска и помещенного в бесконечную среду (см. п. 151, 177).

Если E — разность между потенциалом диска и потенциалом удаленных частей электрода, C — ток, выходящий с поверхности диска в электрод, и ρ' — удельное сопротивление электрода и если Q — количество электричества на диске, которое мы предполагаем распределенным как в п. 151, то легко видеть, что интег-

[4] Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, vol. II, p. 171.

рал от электродвижущей напряженности по диску равен

$$\rho' C = \frac{1}{2} 4\pi Q = 2\pi \frac{aE}{(\pi/2)}, \text{ в силу п. 151},$$
$$= 4aE. \tag{18}$$

Таким образом, если длина провода от заданной точки до электрода равна L и его удельное сопротивление равно ρ, то сопротивление от этой точки до любой точки электрода, не близкой к месту соединения, выражается формулой $R = \rho \frac{L}{\pi a^2} + \frac{\rho'}{4a}$, и это можно записать так:

$$R = \frac{\rho}{\pi a^2} \left(L + \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{\pi a}{4} \right), \tag{19}$$

где второй член в скобках дает величину, которую нужно добавить к длине цилиндра при вычислении его сопротивления, и это, конечно, слишком малая поправка.

Чтобы понять природу допускаемой, возможно, ошибки, мы можем заметить, что в то время как мы считали ток в проводе по направлению к диску однородным по сечению, ток от диска к электроду не является однородным, но в любой точке обратно пропорционален (п. 151) минимальной хорде, проведенной через эту точку. В действительности ток через диск не будет однородным, но он и не будет так сильно меняться от точки к точке, как в этом предполагаемом случае. Потенциал диска в действительности не будет однородным, но будет падать от середины к краям.

309. Мы теперь определим величину, превышающую истинное сопротивление, наложив требование, чтобы ток через диск был однороден в каждой точке. Мы можем предполагать, что электродвижущие силы, вводимые для этого, действуют перпендикулярно поверхности диска.

Сопротивление самой проволоки будет таким же, как и раньше, но в электроде скорость выделения тепла будет равна поверхностному интегралу от произведения тока на потенциал. Значение тока в любой точке равно $C/(\pi a^2)$, а потенциал будет такой же, как у наэлектризованной поверхности с плотностью заряда σ, где

$$2\pi\sigma = C\rho'/(\pi a^2), \tag{20}$$

а ρ' — удельное сопротивление.

Следовательно, нам нужно определить потенциальную энергию электризации диска с однородной поверхностной плотностью σ.

Потенциал [5] на краю диска с однородной плотностью σ легко определяется и равен $4a\sigma$. Работа, совершаемая при добавлении полоски шириной da вдоль окружности диска, равна $2\pi a\sigma da \cdot 4a\sigma$, а полная потенциальная энергия диска есть интеграл от этой величины,

$$\text{или } P = (8\pi/3) a^3 \sigma^2. \tag{21}$$

При прохождении электрического тока скорость, с которой совершается работа в электроде с сопротивлением R', равна $C^2 R'$. Но, согласно общему уравне-

[5] См. работу профессора Кэйли (Cayley), *London, Math. Soc. Proc.*, VI, p. 38.

нию, определяющему процесс прохождения тока, величина тока через диск на единицу площади записывается в виде $-(1/\rho')(dV/d\nu)$ или $(2\pi/\rho')\sigma$.

Если V — потенциал на диске, а ds — элемент его поверхности, то скорость совершения работы равна $[C/(\pi a^2)]\int V ds$,

$$= \frac{2C}{\pi a^2}\frac{P}{\sigma}, \text{ поскольку } P = \frac{1}{2}\int V\sigma\, ds,$$

$$= \frac{4\pi}{\rho'} P \quad \text{(по формуле (20))}.$$

Таким образом, мы получаем

$$C^2R' = (4\pi/\rho')P, \tag{22}$$

откуда с учетом (20) и (21)

$$R' = 8\rho'/(3\pi^2 a),$$

и поправка, которую нужно добавить к длине цилиндра, равна

$$(\rho'/\rho)(8/3\pi)a,$$

причем это значение поправки превышает истинное значение. Таким образом, истинная поправка, которую нужно добавить к длине, равна $(\rho'/\rho)an$, где n — число, лежащее между $\pi/4$ и $8/3\pi$, или между 0,785 и 0,849.

Лорд Рэлей[6] во втором приближении уменьшил верхний предел для n до 0,8282.

ГЛАВА IX

ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ

Об условиях, которые должны выполняться на поверхности раздела между двумя проводящими средами

310. Имеются два условия, которым всегда должно удовлетворять распределение токов: условие, что потенциал должен быть непрерывен, и условие «непрерывности» электрических токов.

На поверхности раздела между двумя средами первое из этих условий требует, чтобы потенциалы в двух точках, расположенных по разные стороны поверхности, но бесконечно близко друг от друга, были равны. Подразумевается, что потенциалы должны измеряться электрометром, приведенным в соединение с данной точкой посредством электрода, который изготовлен из данного металла. Если

[6] *Phil. Mag.*, *Nov.*, 1872, p. 344. В дальнейшем лорд Рэлей получил для верхнего предела значение 0,8242. См. *London Math. Soc. Proc.*, VII, p. 74; также *Theory of Sound*, vol. II, Appendix A, p. 291 (имеется перевод на русский язык: Рэлей «Теория звука». М.: ГИТТЛ, 1955. Т. II. С. 468.— *Примеч. пер.*).

потенциалы измеряются по методу, описанному в п. 222, 246, в котором конец электрода помещается внутри заполненной воздухом полости в проводнике, то измеренные таким путем потенциалы в прилегающих точках различных металлов будут отличаться на величину, зависящую от температуры и от природы этих двух металлов.

Другое условие на поверхности состоит в том, что ток через любой элемент поверхности имеет одно и то же значение при измерении в любой из сред.

Таким образом, если V_1 и V_2 обозначают потенциалы в двух средах, то в любой точке поверхности раздела

$$V_1=V_2, \tag{1}$$

и если u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 — составляющие токов в этих двух средах, а l, m, n— направляющие косинусы нормали к поверхности раздела, то

$$u_1l+v_1m+w_1n=u_2l+v_2m+w_2n. \tag{2}$$

В самом общем случае составляющие u, v, w являются линейными функциями производных потенциала V; вид этих линейных функций определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} u&=r_1X+p_3Y+q_2Z,\\ v&=q_3X+r_2Y+p_1Z,\\ w&=p_2X+q_1Y+r_3Z, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где X, Y, Z — производные функции V соответственно по x, y, z.

Возьмем случай поверхности, которая отделяет среду с такими коэффициентами проводимости от изотропной среды, имеющей коэффициент проводимости, равный r.

Обозначим значения X, Y, Z в изотропной среде через X', Y', Z', тогда на поверхности имеем

$$V=V', \tag{4}$$

или

$$Xdx+Ydy+Zdz=X'dx+Y'dy+Z'dz, \tag{5}$$

если

$$ldx+mdy+ndz=0. \tag{6}$$

Это условие приводит к

$$X'=X+4\pi\sigma l, \qquad Y'=Y+4\pi\sigma m, \qquad Z'=Z+4\pi\sigma n, \tag{7}$$

где σ — поверхностная плотность.

В изотропной среде имеем также

$$u'=rX', \qquad v'=rY', \qquad w'=rZ', \tag{8}$$

и условие на границе для тока таково:

$$u'l+v'm+w'n=ul+vm+wn, \tag{9}$$

или

$$r\,(lX+mY+nZ+4\pi\sigma)=l(r_1X+p_3Y+q_2Z)+m\,(q_3X+r_2Y+p_1Z)+n\,(p_2X+ +q_1Y+r_3Z), \tag{10}$$

откуда

$$4\pi\sigma r=\{l(r_1-r)+mq_3+np_2\}X+\{lp_3+m(r_2-r)+nq_1\}Y+\{lq_2+mp_1+ +n(r_3-r)\}Z. \qquad (11)$$

Величина σ представляет собой поверхностную плотность заряда на поверхности раздела. В кристаллизованных и упорядоченных веществах эта величина зависит от направления поверхности, а также и от перпендикулярной к ней силы. В изотропных веществах коэффициенты p и q равны нулю, а все коэффициенты r равны между собой, и, таким образом,

$$4\pi\sigma=\left(\frac{r_1}{r}-1\right)(lX+mY+nZ), \qquad (12)$$

где r_1 — проводимость рассматриваемого вещества, r — проводимость внешней среды, а l, m, n — направляющие косинусы нормали, проведенной в ту среду, проводимость которой равна r.

В случае, когда обе среды изотропны, эти условия можно значительно упростить, ибо если k есть удельное сопротивление единицы объема, то

$$u=-\frac{1}{k}\frac{dV}{dx}, \qquad v=-\frac{1}{k}\frac{dV}{dy}, \qquad w=-\frac{1}{k}\frac{dV}{dz}, \qquad (13)$$

и если ν есть нормаль, проведенная из первой среды во вторую в любой точке поверхности раздела, то условие непрерывности есть

$$\frac{1}{k_1}\frac{dV_1}{d\nu}=\frac{1}{k_2}\frac{dV_2}{d\nu}. \qquad (14)$$

Если углы, которые линии тока в первой и во второй средах составляют с нормалью к поверхности раздела, равны соответственно θ_1 и θ_2, то касательные к этим линиям тока лежат по обе стороны от границы раздела в одной плоскости с нормалью и

$$k_1 \operatorname{tg}\theta_1=k_2 \operatorname{tg}\theta_2 \qquad (15)$$

Это соотношение можно назвать законом преломления линий тока.

311. В качестве примера условий, которые должны быть выполнены, когда электричество пересекает границу раздела двух сред, рассмотрим сферическую поверхность радиуса a, при этом внутри сферы удельное сопротивление равно k_1, а снаружи k_2.

Разложим потенциал как внутри, так и вне поверхности по пространственным гармоникам и пусть слагаемые, которые зависят от поверхностной гармоники S_i, равны

$$V_1=(A_1r^i+B_1r^{-(i+1)})S_i, \qquad (1)$$

$$V_2=(A_2r^i+B_2r^{-(i+1)})S_i \qquad (2)$$

соответственно внутри и вне сферы.

На поверхности раздела, где $r=a$, мы должны иметь

$$V_1=V_2 \text{ и } \frac{1}{k_1}\frac{dV_1}{dr}=\frac{1}{k_2}\frac{dV_2}{dr}. \qquad (3)$$

Из этих условий мы получаем уравнения

$$\left.\begin{aligned}&(A_1-A_2)\,a^{2i+1}+B_1-B_2=0,\\&\left(\frac{1}{k_1}A_1-\frac{1}{k_2}A_2\right)ia^{2i+1}-\left(\frac{1}{k_1}B_1-\frac{1}{k_2}B_2\right)(i+1)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Эти уравнения, если мы знаем две из четырех величин A_1, A_2, B_1, B_2, достаточны для определения двух других величин.

Предположим, что A_1 и B_1 известны, тогда для A_2 и B_2 мы получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}A_2&=\frac{\{k_1(i+1)+k_2 i\}\,A_1+(k_1-k_2)(i+1)\,B_1 a^{-(2i+1)}}{k_1(2i+1)},\\B_2&=\frac{(k_1-k_2)\,iA_1a^{2i+1}+\{k_1 i+k_2(i+1)\}\,B_1}{k_1(2i+1)}.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Таким путем мы можем найти условия, которым должен удовлетворять каждый член разложения потенциала по гармоникам для случая любого числа слоев, ограниченных концентрическими сферическими поверхностями.

312. Пусть радиус первой сферической поверхности равен a_1, и пусть имеется вторая сферическая поверхность большего радиуса a_2, вне которой удельное сопротивление равно k_3. Если внутри этих сфер отсутствуют источники или стоки электричества, потенциал V не принимает бесконечных значений, и мы имеем $B_1=0$.

Тогда для A_3 и B_3, коэффициентов во внешней среде, мы находим

$$\left.\begin{aligned}A_3k_1k_2(2i+1)^2&=\Big[\{k_1(i+1)+k_2 i\}\,\{k_2(i+1)+k_3 i\}+\\&\quad+i(i+1)(k_1-k_2)(k_2-k_3)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\Big]A_1,\\B_3k_1k_2(2i+1)^2&=[i(k_2-k_3)\,\{k_1(i+1)+k_2 i\}\,a_2^{2i+1}+\\&\quad+i(k_1-k_2)\,\{k_2 i+k_3(i+1)\}\,a_1^{2i+1}]\,A_1.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Значение потенциала во внешней среде частично зависит от внешних источников электричества, которые производят токи независимо от наличия сферы с неоднородным заполнением, а частично от возмущения, вызванного введением неоднородной сферы.

Первая часть должна зависеть от пространственных гармоник только положительных степеней, потому что она не может принимать бесконечных значений внутри сферы. Вторая часть должна зависеть от гармоник отрицательных степеней, потому что она должна исчезать на бесконечном расстоянии от центра сферы.

Таким образом, потенциал, вызванный внешними электродвижущими силами, должен разлагаться в ряд по пространственным гармоникам положительной степени. Пусть A_3 — коэффициент одной из этих гармоник, имеющей вид $A_3S_ir^i$. Тогда с помощью соотношения (6) мы можем найти соответствующий коэффициент A_1 для внутренней сферы и отсюда вывести A_2, B_2 и B_3. При этом B_3 представляет влияние на потенциал во внешней среде, вызванное введением неоднородной сферы.

Предположим теперь, что $k_3=k_1$, т. е. рассмотрим случай полой оболочки, для которой $k=k_2$, разделяющей внутреннюю и внешнюю части среды, для которой $k=k_1$.

Если мы положим

$$C=[(2i+1)^2 k_1k_2+i(i+1)(k_2-k_1)^2(1-(a_1/a_2)^{2i+1})]^{-1},$$

то

$$\begin{aligned} A_1&=k_1k_2(2i+1)^2CA_3,\\ A_2&=k_2(2i+1)(k_1(i+1)+k_2i)CA_3,\\ B_2&=k_2i(2i+1)(k_1-k_2)a_1^{2i+1}CA_3,\\ B_3&=i(k_2-k_1)(k_1(i+1)+k_2i)(a_2^{2i+1}-a_1^{2i+1})CA_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Разность между невозмущенным коэффициентом A_3 и его значением A_1 в полости внутри сферической оболочки равна

$$A_3-A_1=(k_2-k_1)^2 i(i+1)(1-(a_1/a_2)^{2i+1})CA_3. \tag{8}$$

Поскольку эта величина всегда имеет тот же самый знак, что и A_3, каковы бы ни были значения k_1 и k_2, отсюда следует, что независимо от того, лучше или хуже остальной среды проводит сферическая оболочка, электрическое действие в пространстве, окруженном оболочкой, оказывается меньше, чем оно было бы без нее. Если оболочка оказывается лучшим проводником, чем остальная среда, она стремится выровнять потенциал вокруг внутренней сферы. Если она является худшим проводником, она вообще препятствует электрическим токам достичь внутренней сферы.

Случай сплошной сферы может быть получен из рассмотренного выше, если положить $a_1=0$, или же этот случай может быть рассмотрен независимо.

313. Наиболее важным членом в разложении по гармоникам является член с $i=1$, для которого

$$C=[9k_1k_2+2(k_1-k_2)^2(1-(a_1/a_2)^3)]^{-1},$$
$$A_1=9k_1k_2CA_3,\qquad A_2=3k_2(2k_1+k_2)CA_3,$$
$$B_2=3k_2(k_1-k_2)a_1^3CA_3,\qquad B_3=(k_1-k_2)(2k_1+k_2)(a_2^3-a_1^3)CA_3. \tag{9}$$

Случай сплошной сферы с сопротивлением k_2 может быть получен отсюда, если положить $a_1=0$. Мы тогда получаем

$$A_2=\frac{3k_2}{k_1+2k_2}A_3,\qquad B_2=0,\qquad B_3=\frac{k_2-k_1}{k_2+2k_1}a_2^3A_3. \tag{10}$$

С помощью общих формул легко показать, что коэффициент B_3 в случае полой сферы, имеющей ядро с сопротивлением k_1 и окруженной оболочкой с сопротивлением k_2, записывается точно так же, как и в случае однородной сплошной сферы с радиусом внешней поверхности и с сопротивлением K, где

$$K=\frac{(2k_1+k_2)a_2^3+(k_1-k_2)a_1^3}{(2k_1+k_2)a_2^3-2(k_1-k_2)a_1^3}k_2. \tag{11}$$

314. Если имеется n сфер радиуса a_1 и сопротивления k_1, помещенные в среду, сопротивление которой равно k_2, на таких расстояниях друг от друга, что вызы-

ваемое каждой из сфер возмущение протекающего тока можно рассматривать независимо, если все эти сферы заключены внутри сферы радиуса a_2, потенциал на больших расстояниях r от центра этой сферы будет иметь вид

$$V=\left(Ar+nB\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta, \tag{12}$$

где значение B равно

$$B=\frac{k_1-k_2}{2k_1+k_2}a_1^3A. \tag{13}$$

Отношение объема n малых сфер к объему содержащей их большой сферы равно

$$p=(na_1^3)/a_2^3. \tag{14}$$

Поэтому значение потенциала на большом расстоянии от сферы может быть записано в виде

$$V=A\left(r+pa_2^3\frac{k_1-k_2}{2k_1+k_2}\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta. \tag{15}$$

Если бы вся сфера радиуса a_2 была сделана из вещества с удельным сопротивлением K, мы бы имели

$$V=A\left\{r+a_2^3\frac{K-k_2}{2K+k_2}\frac{1}{r^2}\right\}\cos\theta. \tag{16}$$

Одно выражение эквивалентно другому, если

$$K=\frac{2k_1+k_2+p\,(k_1-k_2)}{2k_1+k_2-p\,(k_1-k_2)}\,k_2. \tag{17}$$

Это, таким образом, и есть удельное сопротивление составной среды, образованной из вещества с удельным сопротивлением k_2, в которое вкраплены малые сферы с удельным сопротивлением k_1, причем отношение суммарного объема всех малых сфер ко всему объему равно p. Для того чтобы действие этих сфер не вызывало явлений, зависящих от их взаимодействия, их радиусы должны быть малы в сравнении с расстояниями между ними, и поэтому величина p должна быть малой дробью.

Этот результат может быть получен и другими способами, но тот, который приведен здесь, содержит только повторение результата, уже полученного для случая одной сферы.

Если расстояние между сферами не велико по сравнению с их радиусами, и если величина $(k_1-k_2)/(2k_1+k_2)$ существенна, то в этот результат войдут другие члены, которые мы сейчас не будем рассматривать. Эти члены приводят к тому, что при определенных системах расположения сфер сопротивление составной среды оказывается различным в различных направлениях.

Приложение принципа изображений

315. Возьмем в качестве примера случай двух сред, разделенных плоской поверхностью, и предположим, что в первой среде на расстоянии a от этой плоской поверхности расположен источник электричества S, причем количество электричества, вытекающее из источника за единицу времени, равно S.

Если бы первая среда была бесконечно протяженной, ток в любой точке P был бы направлен по SP, а потенциал в P равнялся бы E/r_1, где $E=(Sk_1)/4\pi$, а $r_1=SP$.

В настоящем случае условия могут быть удовлетворены, если взять во второй среде точку I, изображение источника S, такую, что отрезок IS перпендикулярен плоскости раздела и точка пересечения с границей делит отрезок пополам. Пусть расстояние любой точки от I равно r_2, тогда на поверхности раздела

$$r_1=r_2, \tag{1}$$

$$\frac{dr_1}{d\nu}=-\frac{dr_2}{d\nu}. \tag{2}$$

Пусть потенциал V_1 в любой точке первой среды будет определяться количеством электричества E, помещенным в S, и воображаемым количеством E_2 в точке I, и пусть потенциал V_2 в любой точке второй среды будет равен потенциалу воображаемого количества E_1, помещенного в точке S. Тогда, если

$$V_1=\frac{E}{r_1}+\frac{E_2}{r_2} \text{ и } V_2=\frac{E_1}{r_1}, \tag{3}$$

условие на поверхности $V_1=V_2$ дает

$$E+E_2=E_1, \tag{4}$$

а условие

$$\frac{1}{k_1}\frac{dV_1}{d\nu}=\frac{1}{k_2}\frac{dV_2}{d\nu} \tag{5}$$

дает

$$\frac{1}{k_1}(E-E_2)=\frac{1}{k_2}E_1, \tag{6}$$

откуда

$$E_1=\frac{2k_2}{k_1+k_2}E, \qquad E_2=\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}E. \tag{7}$$

Таким образом, потенциал в первой среде оказывается таким же, какой был бы создан в воздухе, согласно электростатической теории, зарядом E, помещенным в S, и зарядом E_2, помещенным в I, а потенциал во второй среде совпадает с тем, который был бы создан в воздухе зарядом E_1, помещенным в точке S.

Ток в любой точке первой среды оказывается таким, как если бы он был вызван источником S и источником $(k_2-k_1)S/(k_2+k_1)$, расположенным в I, если бы первая среда была бесконечной, а ток в любой точке второй среды оказывается таким же, как если бы он был вызван источником $2k_2S/(k_1+k_2)$, расположенным в S, если бы вторая среда была бесконечной.

Таким образом, в случае двух сред, разделенных плоской границей, мы имеем полную теорию электрических изображений. Какова бы ни была природа электродвижущих сил в первой среде, потенциал, создаваемый ими в первой среде, может быть определен сочетанием их прямого действия с действием их изображения.

Если мы предположим, что вторая среда является идеальным проводником, то $k_2=0$, и изображение, расположенное в точке I, равно по величине и противоположно по знаку источнику в S. Это есть случай электрических изображений, аналогичный теории Томсона в электростатике.

Если мы предположим, что вторая среда является совершенным изолятором, то $k_2=\infty$, и изображение в точке I равно источнику в S и имеет тот же знак. То же самое имеет место и в гидрокинетике, когда жидкость ограничена жесткой плоской поверхностью.

316. Метод инверсии, который столь полезен в электростатике, когда предполагается, что граничная поверхность является поверхностью идеального проводника, неприменим к более общему случаю поверхности, разделяющей два проводника с различным электрическим сопротивлением. Однако метод инверсии применим в случае двух измерений, так же как и более общий метод преобразования для случая двух измерений, изложенный в п. 190 [1].

Прохождение электричества через пластину, разделяющую две среды

317. Рассмотрим теперь влияние пластины толщиной AB из среды с сопротивлением k_2, разделяющей две среды с сопротивлениями k_1 и k_3, на изменение потенциала источника S, расположенного в первой среде.

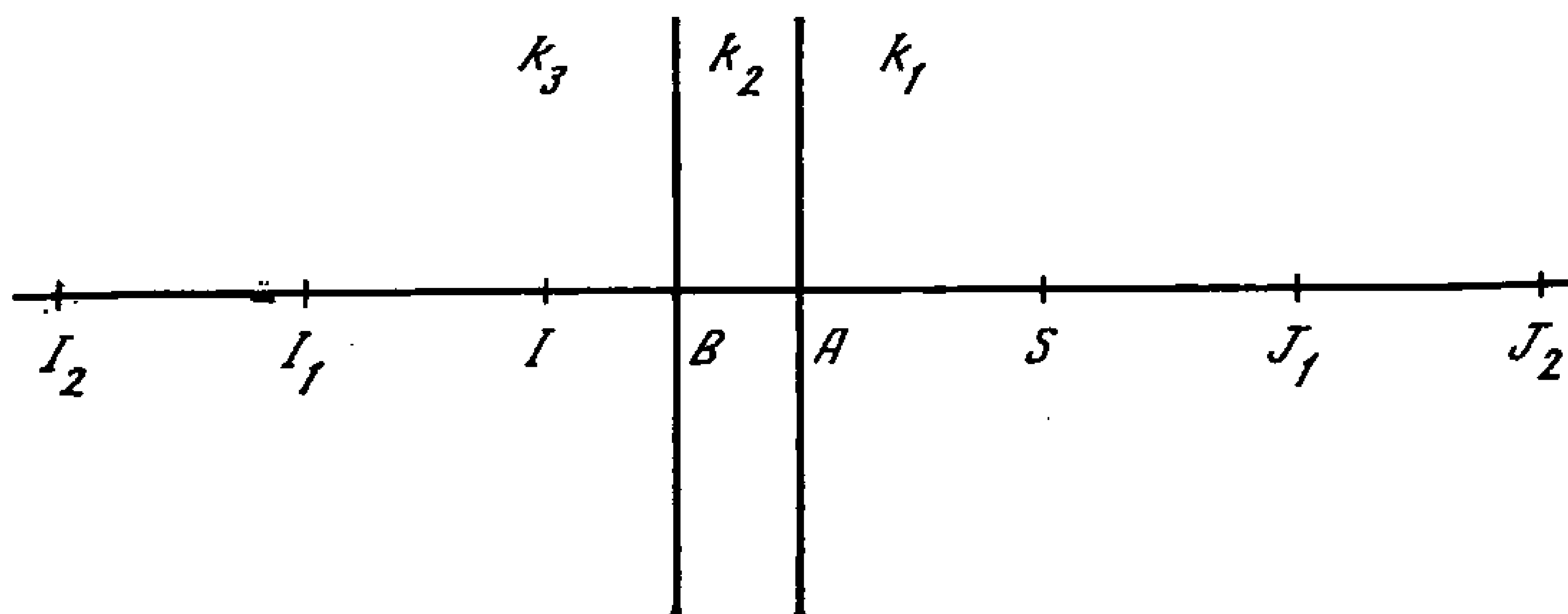


Рис. 24

Потенциал в этом случае будет равен потенциалу системы зарядов, расположенных в воздухе в определенных точках на прямой линии, перпендикулярной к пластине и проходящей через S.

Положим

$$AI=SA, \quad BI_1=SB, \quad AJ_1=I_1A, \quad BI_2=J_1B, \quad AJ_2=I_2A \text{ и т. д.},$$

тогда мы имеем два ряда точек, находящихся на расстоянии друг от друга, равных удвоенной толщине пластины [рис. 24].

318. Потенциал в первой среде в любой точке P равен

$$\frac{E}{PS}+\frac{I}{PI}+\frac{I_1}{PI_1}+\frac{I_2}{PI_2}+ \text{ и т. д.} \tag{8}$$

Потенциал в точке P' во второй среде равен

$$\frac{E'}{P'S}+\frac{I'}{P'I}+\frac{I'_1}{P'I_1}+\frac{I'_2}{P'I_2}+ \text{ и т. д. } +\frac{J'_1}{P'J_1}+\frac{J'_2}{P'J_2}+ \text{ и т. д.} \tag{9}$$

[1] См. Kirchhoff, Pogg. *Ann.*, LXIV, 497 и LXVII, 344; Quincke, Pogg., XCVII, 382; Smith, *Proc. R. S. Edin.*, 1869—70, p. 79.

и потенциал в точке P'' в третьей среде равен

$$\frac{E''}{P''S}+\frac{J_1}{P''J_1}+\frac{J_2}{P''J_2}+\text{ и т. д.,} \tag{10}$$

где I, I' и т. д.— воображаемые заряды, расположенные в точках I и т. д., а штрих означает, что потенциал следует брать внутри пластины.

Тогда, согласно п. 315, из условий на поверхности, проходящей через A, мы имеем

$$I=\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}E, \qquad E'=\frac{2k_2}{k_1+k_2}. \tag{11}$$

Для поверхности, проходящей через B, находим

$$I_1'=\frac{k_3-k_2}{k_3+k_2}E', \qquad E''=\frac{2k_3}{k_2+k_3}E'. \tag{12}$$

Подобным же образом снова для поверхности, проходящей через A,

$$J_1'=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}I_1', \qquad I_1=\frac{2k_1}{k_1+k_2}I_1', \tag{13}$$

и для поверхности, проходящей через B,

$$I_2'=\frac{k_3-k_2}{k_3+k_2}J_1', \qquad J_1=\frac{2k_3}{k_3+k_2}J_1'. \tag{14}$$

Если мы обозначим

$$\rho=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\ \text{ и }\ \rho'=\frac{k_3-k_2}{k_3+k_2},$$

то найдем для потенциала в первой среде

$$V=\frac{E}{PS}-\rho\frac{E}{PI}+(1-\rho^2)\rho'\frac{E}{PI_1}+\rho'(1-\rho^2)\rho\rho'\frac{E}{PI_2}+\text{и т. д.}+$$
$$+\rho'(1-\rho^2)(\rho\rho')^{n-1}\frac{E}{PI_n}+\ldots . \tag{15}$$

Для потенциала в третьей среде мы найдем

$$V=(1+\rho')(1-\rho)E\left\{\frac{1}{PS}+\frac{\rho\rho'}{PJ_1}+\text{ и т. д. }+\frac{(\rho\rho')^n}{PJ_n}+\ldots\right\}. \tag{16}$$

Если первая среда такая же, как третья, то $k_1=k_3$, $\rho=\rho'$, и потенциал по другую сторону пластины будет равен

$$V=(1-\rho^2)E\left\{\frac{1}{PS}+\frac{\rho^2}{PJ_1}+\text{ и т. д. }+\frac{\rho^{2n}}{PJ_n}+\ldots\right\}. \tag{17}$$

Если пластина является намного более хорошим проводником, чем остальная среда, величина ρ очень близка к 1. Если среда является почти идеальным изолятором, величина ρ очень близка к —1, а если проводимость пластины мало отличается от проводимости среды, ρ есть малая величина, положительная или отрицательная.

Эта задача была впервые поставлена Грином в его работе «Теория магнитной индукции» (*Essay*, p. 65). Его результат, однако, верен только в случае, когда ве-

личина ρ почти равна единице [2]. Величина g, которую использует Грин, связана с ρ уравнениями

$$g=\frac{2\rho}{3-\rho}=\frac{k_1-k_2}{k_1+2k_2}, \qquad \rho=\frac{3g}{2+g}=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}.$$

Если мы положим $\rho=2\pi k/(1+2\pi k)$, то получим решение задачи о магнитной индукции, наведенной магнитным полюсом в бесконечной пластине с коэффициентом намагничения k.

О слоистых проводниках

319. Пусть проводник составлен из чередующихся слоев с толщинами c и c' из двух веществ с различными коэффициентами проводимости. Требуется определить коэффициенты сопротивления и проводимости у составного проводника.

Будем считать, что плоскости слоев нормальны к оси z. Будем помечать штрихом каждую величину, относящуюся к слою второго вещества, а величины, относящиеся к составному проводнику, будем помечать чертой сверху, например, $\overline{X}$. Тогда

$$\overline{X}=X=X', \qquad (c+c')\overline{u}=cu+c'u',$$
$$\overline{Y}=Y=Y', \qquad (c+c')\overline{v}=cv+c'v',$$
$$(c+c')\overline{Z}=cZ+c'Z', \qquad \overline{w}=w=w'.$$

Сначала мы должны определить u, u', v, v', Z и Z' через $\overline{X}$, $\overline{Y}$ и w из уравнений сопротивления, п. 297, или уравнений проводимости, п. 298. Если мы обозначим через D детерминант, составленный из коэффициентов сопротивления, мы найдем

$$ur_3D=R_2\overline{X}-Q_3\overline{Y}+\overline{w}q_2D,$$
$$vr_3D=R_1\overline{Y}-P_3\overline{X}+\overline{w}p_1D, \qquad Zr_3=-p_2\overline{X}-q_1\overline{Y}+\overline{w}.$$

Аналогичные соотношения для штрихованных величин дают значения u', v' и Z'. Выразив $\overline{u}$, $\overline{v}$ и $\overline{w}$ через $\overline{X}$, $\overline{Y}$ и $\overline{Z}$, мы можем написать уравнения проводимости для слоистого проводника. Полагая $h=(c/r_3)$ и $h'=(c'/r_3')$, мы найдем

$$\overline{p}_1=\frac{hp_1+h'p_1'}{h+h'}, \qquad \overline{q}_1=\frac{hq_1+h'q_1'}{h+h'},$$
$$\overline{p}_2=\frac{hp_2+h'p_2'}{h+h'}, \qquad \overline{q}_2=\frac{hq_2+h'q_2'}{h+h'},$$
$$\overline{p}_3=\frac{cp_3+c'p_3'}{c+c'}-\frac{hh'(q_1-q_1')(q_2-q_2')}{(h+h')(c+c')},$$
$$\overline{q}_3=\frac{cq_3+c'q_3'}{c+c'}-\frac{hh'(p_1-p_1')(p_2-p_2')}{(h+h')(c+c')},$$
$$\overline{r}_1=\frac{cr_1+c'r_1'}{c+c'}-\frac{hh'(p_2-p_2')(q_2-q_2')}{(h+h')(c+c')},$$
$$\overline{r}_2=\frac{cr_2+c'r_2'}{c+c'}-\frac{hh'(p_1-p_1')(q_1-q_1')}{(h+h')(c+c')}, \qquad \overline{r}_3=\frac{c+c'}{h+h'}.$$

320. Если ни одно из двух веществ, составляющих слои, не обладает свойством вращения, рассмотренным в п. 303, значение любой из величин P или p будет рав-

[2] См. сэр У. Томсон «О наведенном магнетизме в пластине», *Camb. and Dub. Math. Journal*, Nov., 1845 или *Reprint*, art. IX, § 156.

но значению соответствующей величины Q или q. Отсюда следует, что в слоистом проводнике также $\overline{p}_1=\overline{q}_1$, $\overline{p}_2=\overline{q}_2$, $\overline{p}_3=\overline{q}_3$.

Другими словами, разделение на слои не приводит к свойству вращения, если этого свойства нет ни у одного из веществ, составляющих слои.

321. Если мы теперь предположим, что свойство вращения отсутствует и что оси x, y, z являются главными осями, тогда коэффициенты p и q исчезают и

$$\overline{r}_1=\frac{cr_1+c'r_1'}{c+c'},\qquad \overline{r}_2=\frac{cr_2+c'r_2'}{c+c'},\qquad \overline{r}_3=\frac{c+c'}{(c/r_3)+(c'/r_3')}.$$

Если мы начнем со случая, когда обе среды изотропны, но имеют различные проводимости r и r', то, поскольку $\overline{r}_1-\overline{r}_3=\frac{cc'}{c+c'}\cdot\frac{(r-r')^2}{(cr'+c'r)}$, разбиение на слои приводит к тому, что в направлении, перпендикулярном слоям, сопротивление оказывается наибольшим, а сопротивления по всем направлениям в плоскости слоев одинаковы.

322. Возьмем изотропную среду проводимости r, разобьем ее на исключительно тонкие слои толщиной a и расположим их попеременно со слоями вещества, проводимость которого равна s, а толщина k_1a.

Пусть эти слои будут нормальны к оси x. Затем разобьем этот составной проводник на гораздо более толстые слои толщины b, перпендикулярные оси y, и расположим эти слои попеременно со слоями, проводимость которых равна s, а толщина k_2b.

Наконец, разобьем этот новый проводник на еще более толстые слои толщины c, перпендикулярные к оси z, и расположим эти слои попеременно со слоями, проводимость которых равна s, а толщина k_3c.

В результате этих трех операций вещество проводимости r разобьется на прямоугольные параллелепипеды с размерами a, b, c, причем размер b крайне мал по сравнению с c и размер a крайне мал по сравнению с b. Эти параллелепипеды погружены в вещество с проводимостью s, так что они отдалены друг от друга на расстояния k_1a вдоль оси x, k_2b — в направлении оси y и k_3c — в направлении оси z. Проводимости образованного таким образом проводника можно определить, если трижды последовательно воспользоваться результатами п. 321.

При этом мы получим

$$r_1=\frac{\{1+k_1(1+k_2)(1+k_3)\}r+(k_2+k_3+k_2k_3)s}{(1+k_2)(1+k_3)(k_1r+s)}s,$$
$$r_2=\frac{(1+k_2+k_2k_3)r+(k_1+k_3+k_1k_2+k_1k_3+k_1k_2k_3)s}{(1+k_3)\{k_2r+(1+k_1+k_1k_2)s\}}s,$$
$$r_3=\frac{(1+k_3)(r+(k_1+k_2+k_1k_2)s)}{k_3r+(1+k_1+k_2+k_2k_3+k_3k_1+k_1k_2+k_1k_2k_3)s}s.$$

Точность этого рассмотрения определяется тем, что три размера параллелепипедов имеют разные порядки величины, так что мы можем пренебречь условиями, которые должны быть выполнены на ребрах и в вершинах. Если мы положим каждую из величин k_1, k_2, k_3 равной единице, то получим

$$r_1=\frac{5r+3s}{4r+4s}s,\qquad r_2=\frac{3r+5s}{2r+6s}s,\qquad r_3=\frac{2r+6s}{r+7s}.$$

Если $r=0$, т. е. если среда, из которой сделаны параллелепипеды, представляет собой совершенный изолятор, то $r_1=(3/4)s$, $r_2=(5/6)s$, $r_3=(6/7)s$.

Если $r=\infty$, т. е. если параллелепипеды являются идеальными проводниками, $r_1=(5/4)s$, $r_2=(3/2)s$, $r_3=2s$.

В любом случае, если $k_1=k_2=k_3$, можно показать, что r_1, r_2 и r_3 расположены в порядке возрастания величины, так что наибольшая проводимость имеет место в направлении наибольшего размера параллелепипедов, а наибольшее сопротивление — в направлении наименьших размеров.

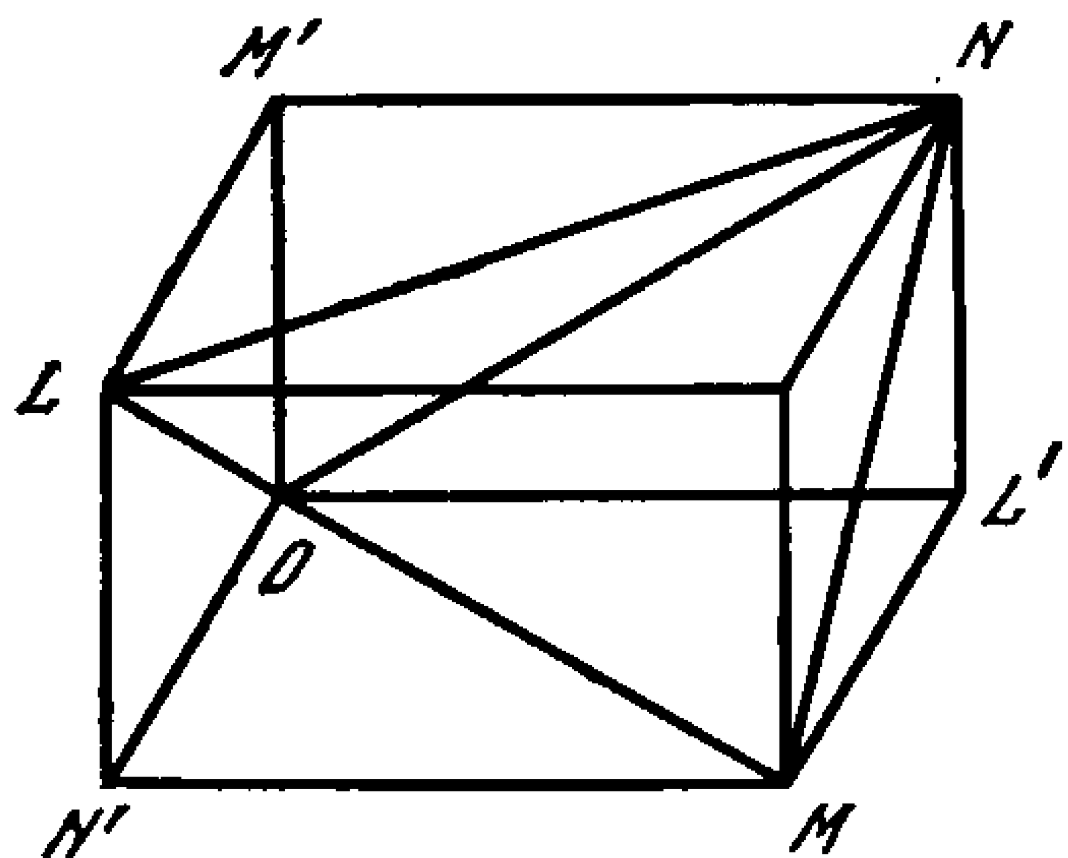


Рис. 25

323. Пусть в прямоугольном параллелепипеде, сделанном из проводящего твердого тела, имеется проводящий канал между противоположными вершинами, представляющий собой провод, покрытый изолирующим материалом. Пусть поперечные размеры канала настолько малы, что проводимость тела не изменяется, если не считать тока, идущего по проводу.

Пусть размеры параллелепипеда в направлениях координатных осей будут равны a, b и c, и пусть проводимость канала, идущего от начала координат к точке (abc), равна $abcK$.

Электродвижущая сила, действующая между концами канала, равна $aX+$ $+bY+cZ$, и если ток вдоль канала равен C', то $C'=Kabc\ (aX+bY+cZ)$.

Ток, идущий через грань параллелепипеда bc, равен bcu, и он складывается из тока, обусловленного проводимостью тела, и из тока, обусловленного проводимостью канала, или

$$bcu=bc\ (r_1X+p_3Y+q_2Z)+Kabc\ (aX+bY+cZ),$$

или

$$u=(r_1+Ka^2)X+(p_3+Kab)Y+(q_2+Kca)Z.$$

Таким же путем мы можем найти значения v и w. Коэффициенты проводимости с учетом изменения, которое вызвано влиянием канала, имеют вид

$$\begin{array}{lll} r_1+Ka^2, & r_2+Kb^2, & r_3+Kc^2, \\ p_1+Kbc, & p_2+Kca, & p_3+Kab, \\ q_1+Kbc, & q_2+Kca, & q_3+Kab. \end{array}$$

В этих выражениях добавки к значениям p_1 и т. д., вызванные действием канала, равны добавкам к значениям q_1 и т. д. Следовательно, значения p_1 и q_1 не могут стать неравными из-за введения линейного канала в каждый элемент объема тела, и поэтому свойство вращения, рассмотренное в п. 303, если оно первоначально отсутствовало у тела, не может быть создано таким способом.

324. *Как построить решетку из проводников, которая будет иметь любые заданные коэффициенты проводимости, образующие симметричную систему.*

Пусть пространство разбито на одинаковые малые кубы, один из которых представлен на рис. 25. Обозначим координаты точек O, L, M, N и потенциалы

этих точек следующим образом:

	x	y	z	*Потенциал*
0	0	0	0	$X+Y+Z$
L	0	1	1	X
M	1	0	1	Y
N	1	1	0	Z

Пусть эти четыре точки соединены шестью проводниками

$$OL,\quad OM,\quad ON,\quad MN,\quad NL,\quad LM,$$

у которых значения проводимости соответственно равны

$$A,\quad B,\quad C,\quad P,\quad Q,\quad R.$$

Электродвижущие силы вдоль этих проводников будут равны

$$Y+Z,\ Z+X,\ X+Y,\ Y-Z,\ Z-X,\ X-Y,$$

а токи —

$$A\,(Y+Z),\quad B\,(Z+X),\quad C\,(X+Y),\quad P\,(Y-Z),\quad Q\,(Z-X),\quad R\,(X-Y).$$

Те из этих токов, которые переносят электричество в положительном направлении оси x, протекают вдоль проводников LM, LN, OM и ON, а переносимое количество равно

$$u=(B+C+Q+R)X+(C-R)Y+(B-Q)Z.$$

Подобным же образом,

$$v=(C-R)X+(C+A+R+P)Y+(A-P)Z,$$
$$w=(B-Q)X+(A-P)Y+(A+B+P+Q)Z.$$

Откуда путем сравнения с уравнениями проводимости, п. 298, находим

$$4A=r_2+r_3-r_1+2p_1,\qquad 4P=r_2+r_3-r_1-2p_1,$$
$$4B=r_3+r_1-r_2+2p_2,\qquad 4Q=r_3+r_1-r_2-2p_2,$$
$$4C=r_1+r_2-r_3+2p_3,\qquad 4R=r_1+r_2-r_3-2p_3.$$

ГЛАВА X

ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА В ДИЭЛЕКТРИКАХ

325. Мы видели, что, когда электродвижущая сила действует на диэлектрическую среду, она производит в среде состояние, которое мы назвали электрической поляризацией и которое мы описали как электрическое смещение внутри среды в направлении, в изотропной среде совпадающем с направлением электродвижущей силы, сопровождаемое появлением поверхностного заряда на каждом из элементов объема, на которые, как мы можем предположить, разбит диэлектрик. По-

верхностный заряд положителен на той стороне, по направлению к которой действует электродвижущая сила, и отрицателен на той стороне, от которой она действует.

Если электродвижущая сила действует на проводящую среду, она также производит то, что называется электрическим током.

Но диэлектрические среды, за очень немногими исключениями, если такие исключения вообще имеются, являются также более или менее несовершенными проводниками, и многие среды, которые не представляют собой хороших изоляторов, обнаруживают явления диэлектрической индукции. Таким образом, мы приходим к необходимости изучать такое состояние среды, в котором одновременно имеют место индукция и прохождение электричества.

Для простоты мы будем предполагать, что среда изотропна в каждой точке, но не обязательно однородна в различных точках. В этом случае уравнение Пуассона, согласно п. 83, становится таким:

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)+4\pi\rho=0, \tag{1}$$

где K — «удельная индуктивная способность».

«Уравнение непрерывности» для электрического тока будет

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dz}\right)-\frac{d\rho}{dt}=0, \tag{2}$$

где r — удельное сопротивление на единицу объема.

Если функции K или r имеют разрывы, эти уравнения нужно преобразовать в такие, которые будут удобны для рассмотрения поверхностей разрыва.

В строго однородной среде обе величины r и K являются постоянными, так что мы находим

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-4\pi\frac{\rho}{K}=r\frac{d\rho}{dt}, \tag{3}$$

откуда

$$\rho=Ce^{-\frac{4\pi}{Kr}t}, \tag{4}$$

или, если положим

$$T=\frac{Kr}{4\pi}, \qquad \rho=Ce^{-\frac{t}{T}}. \tag{5}$$

Этот результат показывает, что если на однородную среду действуют любые внешние электрические силы и если в объеме среды первоначально был любым способом создан электрический заряд, этот внутренний заряд будет вымирать со скоростью, которая не зависит от внешних сил, так что в конце концов внутри среды не будет электрического заряда, после чего никакие внешние силы не смогут ни создать, ни удержать заряд в любой внутренней части среды, если только соотношение между электродвижущей силой, электрической поляризацией и током остается неизменным. Если возникает пробой, эти соотношения теряют свою справедливость, и внутренний заряд может быть создан.

О прохождении тока через конденсатор

326. Пусть C — емкость конденсатора, R — его сопротивление, а E — электродвижущая сила, действующая на конденсатор, т. е. разность потенциалов на поверхностях металлических электродов.

Тогда количество электричества на той стороне, от которой действует электродвижущая сила, будет равно CE, а ток через вещество конденсатора в направлении электродвижущей силы будет равен E/R.

Если предполагается, что электризация производится электродвижущей силой E, действующей на контур, частью которого является рассматриваемый конденсатор, и если dQ/dt есть ток в этом контуре, то

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{E}{R}+C\frac{dE}{dt}. \qquad (6)$$

Введем в эту цепь батарею с электродвижущей силой E_0, сопротивление которой вместе с сопротивлением подводящих проводов равно r_1, тогда

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{E_0-E}{r_1}=\frac{E}{R}+C\frac{dE}{dt}. \qquad (7)$$

Таким образом, в любое время t_1

$$E\,(=E_1)=E_0\frac{R}{R+r_1}\left(1-e^{-t_1/T_1}\right),\ \text{где}\ T_1=\frac{CRr_1}{R+r_1}. \qquad (8)$$

Пусть, далее, цепь с сопротивлением r_1 разрывается на время t_2. Полагая r_1 бесконечной величиной, мы получим из (7)

$$E\,(=E_2)=E_1e^{-t_2/T_2},\ \text{где}\ T_2=CR. \qquad (9)$$

Наконец, соединим поверхности конденсатора проводом, сопротивление которого равно r_3, и пусть длительность этого соединения равна t_3, тогда, полагая в (7) $E_0=0$, $r_1=r_3$, мы получим

$$E\,(=E_3)=E_2e^{-t_3/T_3},\ \text{где}\ T_3=\frac{CRr_3}{R+r_3}. \qquad (10)$$

Если Q_3 есть полный разряд через этот провод за время t_3, то

$$Q_3=E_0\frac{CR^2}{(R+r_1)(R+r_3)}\left(1-e^{-t_1/T_1}\right)e^{-t_2/T_2}\left(1-e^{-t_3/T_3}\right). \qquad (11)$$

Таким путем мы можем найти разряд через провод, с помощью которого соединяются поверхности конденсатора после того, как конденсатор в течение времени t_1 заряжается, а потом в течение времени t_2 изолируется. Если, как это обычно бывает, время зарядки достаточно для того, чтобы образовался полный заряд, и если время разрядки достаточно для полной разрядки, то разряд равен

$$Q_3=E_0\frac{CR^2}{(R+r_1)(R+r_3)}e^{-t_2/CR}. \qquad (12)$$

327. Если такого рода конденсатор сначала любым способом заряжается, затем разряжается через провод с малым сопротивлением, а потом изолируется, то не возникает никакой новой электризации. Однако обнаружено, что в большинст-

ве реальных конденсаторов после разрядки и изоляции постепенно нарастает новый заряд того же знака, что и первоначальный, но меньший по величине. Он называется остаточным зарядом. Для того чтобы его объяснить, мы должны признать, что строение диэлектрической среды отличается от того, какое мы только что описывали. Однако мы увидим, что среда, составленная из смеси малых частиц различных простых сред, обладала бы таким свойством.

Теория составного диэлектрика

328. Для простоты мы будем предполагать, что диэлектрик состоит из некоторого числа плоских слоев различных веществ, что слои имеют единичную площадь и что электрические силы действуют в направлении нормали к слоям.

Обозначим:

a_1, a_2 и т. д.— толщины различных слоев;

X_1, X_2 и т. д.— результирующие электрические силы внутри слоев;

p_1, p_2 и т. д.— токи, вызванные прохождением электричества через слои;

f_1, f_2 и т. д.— электрические смещения;

u_1, u_2 и т. д.— полные токи, которые частично обусловлены прохождением электричества, а частично — изменением смещения;

r_1, r_2 и т. д.— удельные сопротивления, отнесенные к единице объема;

K_1, K_2 и т. д.— удельные индуктивные способности;

k_1, k_2 и т. д.— величины, обратные удельным индуктивным способностям;

E — электродвижущая сила вольтовой батареи, помещенной в ту часть цепи, которая ведет от последнего слоя к первому. Эти слои мы будем считать хорошими проводниками;

Q — полное количество электричества, которое прошло через эту часть цепи к моменту времени;

R_0 — сопротивление батареи вместе с подводящими проводами;

σ_{12} — поверхностная плотность электричества на поверхности, которая разделяет первый и второй слои.

Тогда в первом слое мы имеем по закону Ома

$$X_1 = r_1 p_1, \tag{1}$$

по теории электрического смещения

$$X_1 = 4\pi k_1 f_1, \tag{2}$$

по определению полного тока

$$u_1 = p_1 + (df_1/dt) \tag{3}$$

и аналогичные уравнения для других слоев, в каждом из которых соответствующие величины имеют индекс, принадлежащий данному слою.

Для определения поверхностной плотности на каждом слое мы имеем уравнение вида

$$\sigma_{12} = f_2 - f_1, \tag{4}$$

а для определения ее изменения имеем

$$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = p_1 - p_2. \tag{5}$$

Дифференцируя (4) по t и приравнивая результат к (5), мы получим

$$p_1+\frac{df_1}{dt}=p_2+\frac{df_2}{dt}=u, \tag{6}$$

или, учитывая (3),

$$u_1=u_2=\text{и т. д.}=u. \tag{7}$$

Это означает, что полный ток u имеет одно и то же значение для всех слоев и равен току, идущему через провод и батарею.

В силу уравнений (1) и (2) имеем также

$$u=\frac{1}{r_1}X_1+\frac{1}{4\pi k_1}\frac{dX_1}{dt}, \tag{8}$$

откуда, произведя над u обратную операцию, получим X_1:

$$X_1=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{4\pi k_1}\frac{d}{dt}\right)^{-1}u. \tag{9}$$

Полная электродвижущая сила E равна

$$E=a_1X_1+a_2X_2+\text{и т. д.}, \tag{10}$$

или

$$E=\left\{a_1\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{4\pi k_1}\frac{d}{dt}\right)^{-1}+a_2\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{4\pi k_2}\frac{d}{dt}\right)^{-1}+\text{и т. д.}\right\}u. \tag{11}$$

Уравнение (11) дает соотношение между внешней электродвижущей силой E и внешним током u.

Если отношение r к k имеет одно и то же значение для всех слоев, уравнение сводится к

$$E+\frac{r}{4\pi k}\frac{dE}{dt}=(a_1r_1+a_2r_2+\text{и т. д.})\,u. \tag{12}$$

Это — тот случай, уже рассмотренный в п. 326, в котором, как мы нашли, явление остаточного заряда не может иметь места.

Если имеется n веществ с различными значениями отношения r/k, общее уравнение (11) после избавления от обратных операций будет линейным дифференциальным уравнением n-го порядка по отношению к E и $(n-1)$-го порядка по отношению к u, причем независимой переменной является t.

Из вида уравнения ясно, что порядок, в котором различные слои следуют друг за другом, безразличен, так что, если имеется несколько слоев, сделанных из одного и того же вещества, мы можем считать, что они объединены в один и явления при этом не меняются.

329. Теперь предположим, что сначала f_1, f_2 и т. д. все равны нулю и что электродвижущая сила E_0 внезапно начинает действовать, и найдем ее мгновенный эффект.

Интегрируя (8) по времени, мы находим

$$Q=\int u\,dt=\frac{1}{r_1}\int X_1\,dt+\frac{1}{4\pi k_1}X_1+\text{const}, \tag{13}$$

Но, поскольку величина X_1 в этом случае всегда конечна, $\int X_1 dt$ представляет собой неощутимо малую величину, если t есть неощутимо малая величина. Поэтому, так как величина X_1 первоначально равнялась нулю, мгновенный результат будет

$$X_1=4\pi k_1 Q_1. \tag{14}$$

Отсюда, согласно уравнению (10),

$$E_0=4\pi\ (k_1a_1+k_2a_2+\text{и т. д.})Q, \tag{15}$$

и если C — электрическая емкость системы, измеренная таким мгновенным способом, то

$$C=(Q/E_0)=[4\pi\ (k_1a_1+k_2a_2+\text{и т. д.})]^{-1}. \tag{16}$$

Как раз такой результат мы получили бы, если бы пренебрегли проводимостью слоев.

Предположим далее, что электродвижущая сила E_0 остается неизменной в течение неопределенно долгого времени или до тех пор, пока в системе не установится постоянный ток проводимости, равный p.

Мы тогда имеем $X_1=r_1p$ и т. д., и поэтому, с учетом (10),

$$E_0=(r_1a_1+r_2a_2+\text{и т. д.})\,p. \tag{17}$$

Если R — полное сопротивление системы, то

$$R=(E_0/p)=r_1a_1+r_2a_2+\text{и т. д.} \tag{18}$$

В этом состоянии из (2) имеем $f_1=(r_1p)/(4\pi k_1)$, так что

$$\sigma_{12}=\left(\frac{1}{4\pi k_2}-\frac{1}{4\pi k_1}\right)p. \tag{19}$$

Если мы теперь быстро соединим крайние слои проводом с малым сопротивлением, значение E быстро изменится от начального значения E_0 до нуля, а через проводник пройдет некоторое количество электричества Q.

Для того чтобы определить величину Q, заметим, что если X_1' есть новое значение величины X_1, то, с учетом (13),

$$X_1'=X_1+4\pi k_1 Q. \tag{20}$$

Отсюда, с учетом (10), полагая $E=0$, получаем

$$0=a_1X_1+\text{и т. д.}+4\pi\ (a_1k_1+a_2k_2+\text{и т. д.})Q, \tag{21}$$

или

$$0=E_0+(Q/C). \tag{22}$$

Отсюда $Q=-CE_0$, где C — емкость, определяемая уравнением (16). Таким образом, мгновенный разряд равен мгновенному заряду.

Предположим теперь, что немедленно после разряда соединение разрывается. Тогда мы будем иметь $u=0$, так что, согласно уравнению (8),

$$X_1=X_1'e^{-(4\pi k_1/r_1)t}, \tag{23}$$

где X_1' есть начальное значение после разряда.

Отсюда для любого момента t получаем, с учетом (23) и (20):

$$X_1=E_0\left\{\frac{r_1}{R}-4\pi k_1 C\right\}e^{-(4\pi k_1/r_1)t}.$$

Поэтому значение E в любой момент равно

$$E_0\left\{\left(\frac{a_1r_1}{R}-4\pi a_1k_1C\right)e^{-(4\pi k_1/r_1)t}+\left(\frac{a_2r_2}{R}+4\pi a_2k_2C\right)e^{-(4\pi k_2/r_2)t}+\text{и т. д.}\right\},\quad (24)$$

и мгновенный заряд по истечении любого времени t равен EC. Эта величина и называется остаточным разрядом.

Если отношение r/k имеет одно и то же значение для всех слоев, величина E сводится к нулю. Если, однако, это отношение не одинаково, расположим слагаемые в соответствии со значением этого отношения, в порядке уменьшения величины.

Сумма всех коэффициентов, очевидно, равна нулю, так что при $t=0$ имеем $E=0$. Коэффициенты также расположены в порядке уменьшения величины, и таким же оказывается порядок расположения экспоненциальных членов при положительных значениях t. Таким образом, при положительных t величина E также будет положительной, т. е. остаточный разряд всегда имеет тот же знак, что и первичный разряд.

Если время t бесконечно велико, все слагаемые исчезают, если только некоторые из слоев не являются идеальными изоляторами. В этом случае для такого слоя величина r_1 бесконечна, значение R для всей системы также становится бесконечным и значение E в конце равно не нулю, а

$$E=E_0(1-4\pi a_1k_1C).\quad (25)$$

Таким образом, если некоторые, но не все из слоев оказываются идеальными изоляторами, остаточный разряд может постоянно удерживаться в системе.

330. Мы теперь определим полный разряд через провод с сопротивлением R_0, соединенный все время с крайними слоями системы, предполагая, что эта система сперва была заряжена с помощью приложенной на долгое время электродвижущей силы E_0.

Для любого момента времени мы имеем

$$E=a_1r_1p_1+a_2r_2p_2+\text{и т. д.}+R_0u=0,\quad (26)$$

кроме того, с учетом (3),

$$u=p_1+\frac{df_1}{dt}.\quad (27)$$

Отсюда

$$(R+R_0)\,u=a_1r_1\frac{df_1}{dt}+a_2r_2\frac{df_2}{dt}+\text{и т. д.}\quad (28)$$

Интегрируя по t, для того чтобы найти Q, получаем

$$(R+R_0)Q=a_1r_1\,(f_1'-f_1)+a_2r_2\,(f_2'-f_2)+\text{и т. д.},\quad (29)$$

где f_1 — начальное, а f_1' — конечное значения величины f_1.

В нашем случае $f_1'=0$, и с учетом (2) и (20) имеем

$$f_1=E_0\left(\frac{r_1}{4\pi k_1 R}-C\right).$$

Отсюда

$$(R+R_0)Q=-\frac{E}{4\pi R}\left(\frac{a_1 r_1^2}{k_1}+\frac{a_2 r_2^2}{k_2}+\text{и т. д.}\right)+E_0 CR, \quad (30)$$

$$=-\frac{CE_0}{R}\sum\sum\left[a_1 a_2 k_1 k_2\left(\frac{r_1}{k_1}-\frac{r_2}{k_2}\right)\right], \quad (31)$$

где суммирование проводится по всем выражениям этого вида, относящимся к каждой паре слоев.

Отсюда следует, что величина Q всегда отрицательна, т. е. имеет, так сказать, противоположное направление по отношению к направлению того тока, который использовался при зарядке системы.

Это исследование показывает, что диэлектрик, составленный из различного рода слоев, проявляет свойства, известные как электрическое поглощение и остаточный разряд, хотя ни одно из веществ, составляющих этот диэлектрик, взятое само по себе, не проявляет этих свойств. Рассмотрение таких случаев, в которых вещества расположены иначе, чем слоями, привело бы к сходным результатам, хотя соответствующие вычисления были бы более сложными. Поэтому мы можем заключить, что явления электрического поглощения возможны для таких веществ, которые составлены из частей различной природы, даже несмотря на то, что эти части могут быть микроскопически малы.

Отсюда никак не следует, что каждое вещество, обнаруживающее это явление, построено именно таким образом, потому что это может указывать на некоторый новый вид электрической поляризации, возможный для однородного вещества, который в некоторых случаях, вероятно, больше напоминает электрохимическую поляризацию, чем диэлектрическую поляризацию.

Цель этого рассмотрения состоит только в том, чтобы указать на чисто математические особенности так называемого электрического поглощения и показать, насколько фундаментально оно отличается от тепловых явлений, которые на первый взгляд кажутся аналогичными.

331. Если мы возьмем толстую пластину любого вещества и нагреем ее с одной стороны так, чтобы создать ток тепла через нее, и если мы затем быстро охладим нагретую сторону до той температуры, при которой находится другая сторона, и предоставим пластину самой себе, то нагревавшаяся сторона пластины опять станет теплее другой в результате прихода тепла изнутри.

Можно осуществить электрическое явление, в точности аналогичное этому, и оно действительно имеет место в телеграфных кабелях, но его математические законы, хотя и полностью согласуются с законами теории тепла, совершенно отличны от законов слоистого конденсатора.

В случае тепла имеет место настоящее поглощение тепла веществом, в результате вещество нагревается. В электричестве невозможно получить полностью аналогичное явление, но мы можем имитировать его следующим образом в форме лекционной демонстрации.

Пусть A_1, A_2 и т. д.— внутренние проводящие поверхности последовательности конденсаторов, у которых внешними поверхностями являются B_0, B_1, B_2 и т. д.

Пусть A_1, A_2 и т. д. соединены последовательно проводниками с сопротивлениями R, и пусть ток идет по этой цепи слева направо [рис. 26].

Предположим сначала, что каждая из пластин B_0, B_1, B_2 изолирована и свободна от заряда. Тогда полное количество электричества на каждой из пластин

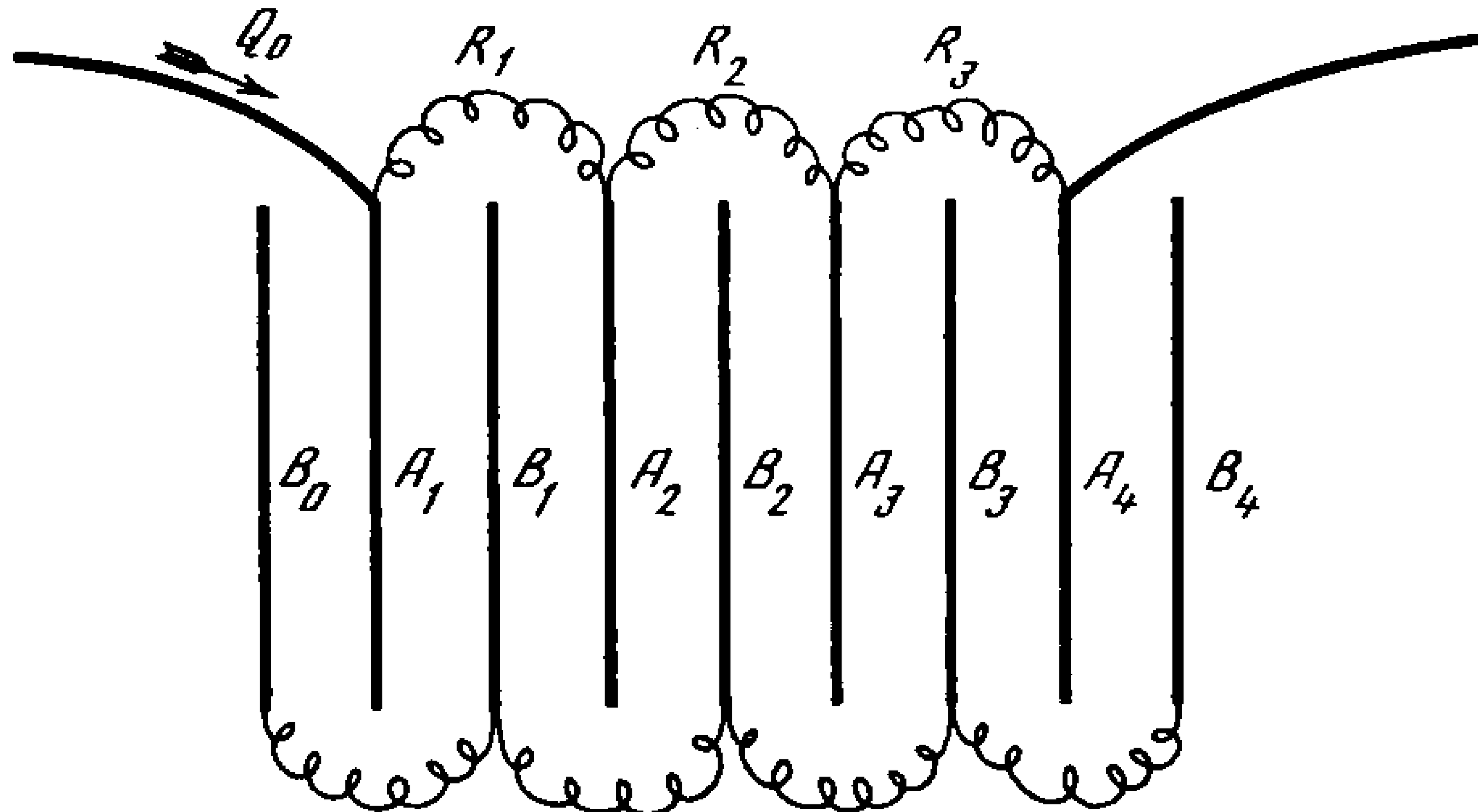


Рис. 26

B будет оставаться равным нулю, и, поскольку электричество на пластинах A в каждом случае равно и противоположно электричеству на противолежащей поверхности, пластины A не будут электризованы и не будет наблюдаться никакого изменения тока.

Но соединим между собой все пластины B или заземлим каждую из них. Тогда, поскольку потенциал пластины A_1 положителен, а потенциал пластин B равен нулю, пластина A_1 будет электризована положительно, а B_1 — отрицательно.

Если потенциалы пластин A_1, A_2 и т. д. равны P_1, P_2 и т. д., а емкость каждой пластины равна C, и если мы предполагаем, что через левый подводящий провод прошло количество электричества Q_0, через сопротивление R_1 прошло количество электричества Q_1 и т. д., тогда то количество, которое имеется на пластине A_1, равно $Q_0—Q_1$, и мы имеем $Q_0-Q_1=CP_1$.
Подобным же образом $Q_1-Q_2=CP_2$ и т. д.

Но по закону Ома

$$P_1-P_2=R_1\frac{dQ_1}{dt}, \qquad P_2-P_3=R_2\frac{dQ_2}{dt}.$$

Мы предположили, что все пластины имеют одно и то же значение C. Если мы предположим, что значения R также одинаковы для каждого из проводов, мы получим систему уравнений вида

$$Q_0-2Q_1+Q_2=RC\frac{dQ_1}{dt},$$

$$Q_1-2Q_2+Q_3=RC\frac{dQ_2}{dt}.$$

Если требуется определить n количеств электричества и если задана полная электродвижущая сила или какое-нибудь другое эквивалентное условие, то диф-

ференциальное уравнение для определения любого из этих количеств электричества будет линейным и n-го порядка.

С помощью такой установки г-н Варлей (Varley) успешно воспроизвел электрическое действие кабеля длиною 12 000 миль.

Если сделать так, что вдоль провода, расположенного слева, начнет действовать электродвижущая сила, то электричество, втекающее в систему, будет главным образом идти на зарядку различных конденсаторов, начиная с A_1, и до тех пор, пока не пройдет значительное время, справа будет выходить только очень малая часть тока. Если включить в цепь гальванометры в R_1, R_2 и т. д., то они будут испытывать воздействие тока один за другим, причем интервал во времени между равными показаниями будет возрастать по мере нашего продвижения вправо.

332. В случае телеграфного кабеля проводящая жила отделена от внешних проводников цилиндрическим слоем гуттаперчи или другого изолирующего материала. Таким образом, каждая часть кабеля становится конденсатором, внешняя поверхность которого всегда находится при нулевом потенциале. Следовательно, в данной части кабеля количество свободного электричества на поверхности проводящей жилы равно произведению потенциала на емкость этой части кабеля, рассматриваемого как конденсатор.

Если внешний и внутренний радиусы изолирующего слоя равны a_1 и a_2 и если удельная диэлектрическая способность слоя равна K, то емкость единицы длины кабеля, по п. 126, равна

$$c=K/\ln (a_1/a_2). \tag{1}$$

Пусть потенциал в любой точке жилы равен v. Мы будем считать, что потенциал имеет одно и то же значение для каждой части одного и того же сечения.

Пусть Q будет полное количество электричества, которое прошло через это сечение от начала прохождения тока. Тогда количество, которое в момент времени t заключено между сечениями x и $x+\delta x$, равно

$$Q-\left(Q+\frac{dQ}{dx}\delta x\right) \quad \text{или} \quad -\frac{dQ}{dx}\delta x,$$

и, по сказанному выше, эта величина равна $cv\delta x$.

Следовательно,

$$cv=-\frac{dQ}{dx}. \tag{2}$$

Но электродвижущая сила в любом сечении равна $-dv/dx$, и по закону Ома

$$-\frac{dv}{dx}=k\frac{dQ}{dt}, \tag{3}$$

где k — сопротивление единицы длины проводника, а dQ/dt — сила тока. Исключая Q из уравнений (2) и (3), находим

$$ck\frac{dv}{dt}=\frac{d^2v}{dx^2}. \tag{4}$$

Это уравнение в частных производных, которое нужно решить для того, чтобы получить потенциал в любой момент времени в любой точке кабеля. Оно совпадает с тем уравнением, которое Фурье дает для определения температуры в любой

точке слоя, через который течет тепло в направлении, перпендикулярном к слою. В случае тепла c означает емкость единицы объема (эту величину Фурье обозначает через CD), а k означает величину, обратную проводимости.

Если прослойка не является совершенным изолятором и если ее сопротивление на единицу длины равно k_1 при прохождении тока через слой в радиальном направлении, тогда, если удельное сопротивление изолирующего материала равно ρ_1, легко показать, что

$$k_1 = \frac{1}{2\pi}\rho_1 \ln\frac{a_1}{a_2}. \qquad (5)$$

Уравнение (2) уже не будет справедливым, поскольку электричество расходуется не только на зарядку жилы до величины, определяемой выражением cv, но и наутечку, скорость которой определяется выражением v/k_1. Поэтому скорость расхода электричества будет

$$-\frac{d^2Q}{dx\,dt} = c\frac{dv}{dt} + \frac{1}{k_1}v, \qquad (6)$$

откуда, сравнивая с (3), получаем

$$ck\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{k}{k_1}v. \qquad (7)$$

Такой вид, согласно Фурье, имеет уравнение теплопроводности для стержня или кольца [1].

333. Если бы мы приняли, что при повышении потенциала тело электризуется во всем своем объеме так, как если бы электричество нагнеталось внутрь тела, мы бы пришли к уравнению точно такого же вида. Примечательно, что сам Ом, будучи введен в заблуждение этой аналогией между электричеством и теплотой, поддержал мнение такого рода и потому из-за этой ошибочной точки зрения использовал уравнение Фурье для того, чтобы описать истинные законы прохождения электричества по длинному проводу, задолго до того, как были усмотрены действительные причины применимости этих уравнений.

Механическое истолкование свойств диэлектриков

334. Пять трубок A, B, C, D и P равного поперечного сечения расположены так, как показано на рисунке. A, B, C и D расположены вертикально, а P — горизонтально [рис. 27].

У трубок A, B, C, D нижняя половина наполнена ртутью, а их верхняя половина и горизонтальная трубка P наполнены водой.

Трубка с запорным краном Q соединяет нижнюю часть трубок A и B с нижней частью трубок C и D, а поршень P сделан так, чтобы он мог скользить в горизонтальной трубке.

Начнем с предположения, что уровень ртути во всех четырех трубках один и тот же, и обозначим этот уровень через A_0, B_0, C_0 и D_0. Пусть при этом поршень находится в положении P_0, а запорный кран Q закрыт.

---

[1] *Théory de la Chaleur*, Art. 105.

Пусть теперь поршень перемещается из положения P_0 в положение P_1 на расстояние a. Тогда, поскольку сечения всех трубок равны, уровень ртути в A и C поднимется на высоту a, т. е. до отметок A_1 и C_1, а ртуть в B и D опустится на такое же расстояние a, т. е. до отметок B_1 и D_1.

Разность давлений по обе стороны поршня будет представлена величиной $4a$.

Эту установку можно использовать для того, чтобы представить диэлектрик, на который действует электродвижущая сила, равная $4a$.

Можно считать, что избыток воды в трубке D представляет положительный заряд электричества на одной стороне диэлектрика, а избыток ртути в трубке A может представлять отрицательный заряд на другой стороне. Тогда избыток давления в трубке P с той стороны поршня, которая обращена к D, будет представлять избыток потенциала на положительной стороне диэлектрика.

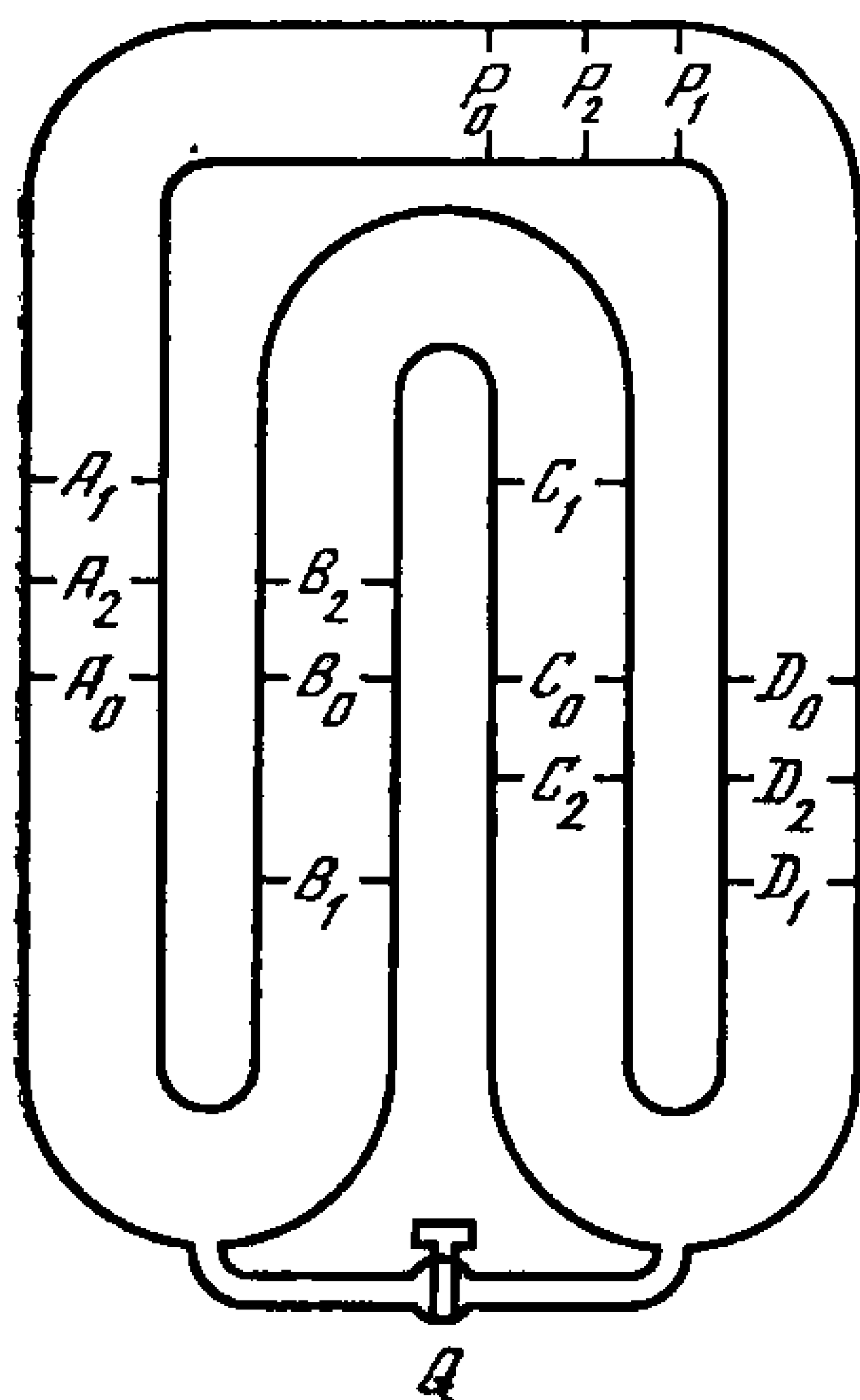


Рис. 27

Если поршень может двигаться, он будет двигаться назад к положению P_0, где он будет в равновесии. Это представляет полный разряд диэлектрика.

Во время разряда имеет место обратное движение жидкостей во всей установке, и оно представляет то изменение электрического смещения, которое, по нашему предположению, имеет место в диэлектрике.

Я предположил, что каждая часть системы трубок наполнена несжимаемыми жидкостями, с тем чтобы представить свойство полного электрического смещения, состоящее в том, что ни в каком месте не происходит действительного накопления электричества.

Теперь рассмотрим, что произойдет, если мы откроем запорный кран Q в то время, когда поршень P находится в положении P_1.

Уровни A_1 и D_1 останутся неизменными, но уровни в трубках B и C станут одинаковыми и будут совпадать с B_0 и C_0.

Открытый запорный кран Q отвечает наличию в диэлектрике части, которая обладает некоторой проводящей способностью, но которая не простирается через весь диэлектрик так, чтобы образовать открытый канал.

Заряды на противоположных сторонах диэлектрика остаются изолированными, но отвечающая им разность потенциалов уменьшается.

Действительно, за время прохождения жидкости через Q разность давлений по обе стороны от поршня падает с $4a$ до $2a$.

Если мы теперь закроем запорный кран Q и дадим возможность поршню P свободно двигаться, он придет к равновесию в точке P_2, и разряд, очевидно, будет равен половине заряда.

Уровень ртути в A и B будет выше первоначального уровня на $a/2$, в то время как уровень в трубках C и D будет на $a/2$ ниже первоначального. Эти уровни изображены отметками A_2, B_2, C_2, D_2.

Если теперь закрепить поршень и открыть кран, ртуть будет перетекать из B в C до тех пор, пока уровень в этих двух трубках не придет снова к отметкам B_0 и C_0. Тогда разность давлений по обе стороны от поршня P будет равна a. Если

теперь закрыть запорный кран и освободить поршень P, он опять придет к равновесию в некоторой точке P_3, находящейся на полпути между точками P_2 и P_0. Это соответствует остаточному заряду, который наблюдается, когда заряженный диэлектрик сперва разряжается, а потом предоставляется самому себе. Он постепенно восстанавливает часть своего заряда, и если его потом опять разрядить, образуется третий заряд, причем эти последовательные заряды убывают по величине. В случае рассматриваемого иллюстративного эксперимента каждый заряд равен половине предыдущего, а разряды, которые равны 1/2, 1/4 и т. д. от первоначального заряда, образуют ряд, сумма которого равна первоначальному заряду.

Если бы вместо открывания и закрывания крана мы бы в течение всего эксперимента держали кран почти, но не совсем закрытым, мы бы получили случай, напоминающий случай электризации некоторого диэлектрика, который является совершенным изолятором и, кроме того, обнаруживает явление, называемое «электрическим поглощением».

Чтобы представить случай, в котором имеется истинное прохождение тока, мы должны либо сделать так, чтобы поршень пропускал жидкость, либо установить соединение между верхней частью трубки A и верхней частью трубки D.

Таким способом мы можем построить механическую иллюстрацию свойств диэлектрика любого вида, причем два вида электричества представлены двумя настоящими жидкостями, а электрический потенциал представлен давлением жидкости. Заряд и разряд представлены движением поршня P, а электродвижущая сила — равнодействующей сил, действующих на поршень.

ГЛАВА XI

ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

335. При нынешнем состоянии науки об электричестве определение электрического сопротивления проводника можно рассматривать как основную операцию в электричестве в том же смысле, в каком определение веса является основной операцией в химии.

Причина этого заключается в том, что определение абсолютного значения других электрических величин, таких, как количество электричества, электродвижущие силы, токи и т. д., требует в каждом случае выполнения сложного ряда операций, в том числе, в общем случае, наблюдения времени, измерения расстояний, а также определения моментов инерции, и эти операции, по крайней мере некоторые из них, должны повторяться для каждого нового определения, потому что невозможно сохранить в неизменном состоянии единицу электричества, или электродвижущей силы, или тока так, чтобы эти количества были пригодны для прямого сравнения.

Но если один раз определено электрическое сопротивление проводника, имеющего подходящую форму и сделанного из должным образом выбранного материала, то, как установлено, эта величина всегда остается той же самой для той же самой температуры, так что этот проводник может быть использован как стандарт

сопротивления, с которым можно сравнивать сопротивление других проводников, а сравнение двух сопротивлений — это такая операция, которая может быть проведена с исключительной точностью.

После того как установлена единица электрического сопротивления, изготовляются вещественные копии этой единицы в виде «Катушек Сопротивления» для использования их исследователями электричества и, таким образом, в любой части света электрические сопротивления могут быть выражены через одну и ту же единицу. Эти катушки с единичным сопротивлением в настоящее время представляют собой единственный пример вещественных электрических стандартов, которые могут быть сохранены, воспроизведены и использованы с целью измерения. Меры электрической емкости, которые также имеют большое значение, до сих пор еще несовершенны из-за возмущающего действия электрической абсорбции.

336. Единица электрического сопротивления может быть совершенно произвольной, как в случае Эталона Якоби, который представлял собой определенный медный провод весом 22,4932 грамма, длиной 7,61975 метра и диаметром 0,667 миллиметра. Копии этого эталона изготовлялись Лейзером (Leyser) в Лейпциге, и их можно найти в разных местах.

В соответствии с другим методом единица сопротивления может быть определена как сопротивление образца, сделанного из определенного вещества и имеющего определенные размеры. Так, единица Сименса определяется как сопротивление столба ртути длиною в один метр и поперечным сечением в один квадратный миллиметр при температуре 0 °C.

337. Наконец, эта единица может быть определена в электростатической или в электромагнитной системе единиц. На практике во всех телеграфных операциях используется электромагнитная система, и потому единственные единицы, которые действительно употребляются,— это единицы этой системы.

В электромагнитной системе, как мы это покажем в своем месте, сопротивление есть величина, имеющая размерность скорости и поэтому может быть выражено как скорость (см. п. 628).

338. Первые фактические измерения в этой системе были проведены Вебером, который использовал в качестве своей единицы один миллиметр в секунду. Позднее, сэр У. Томсон использовал в качестве единицы один фут в секунду, однако большое число исследователей электричества согласились использовать единицу Британской Ассоциации (В. А.). Эта единица представляет такое сопротивление, которое, будучи выражено как скорость, равно десяти миллионам метров в секунду. Величина этой единицы более удобна, чем величина единицы Вебера, которая слишком мала. Иногда эту единицу называют единицей В. А., но, для того чтобы связать ее с именем того, кто открыл законы сопротивления, эта единица называется Ом.

339. Чтобы запомнить ее абсолютную величину, полезно знать, что десять миллионов метров по определению представляют собой расстояние от полюса до экватора, измеренное вдоль парижского меридиана. Таким образом, тело, проходящее за одну секунду путь вдоль меридиана от полюса до экватора, имело бы скорость, величина которой, по определению, равна величине одного Ома в электромагнитной системе.

Я говорю «по определению» потому, что если бы более точные исследования показали, что вещественный стандарт одного Ома, созданный Британской Ассо-

циацией, по своей величине отличается от этого значения скорости, то исследователи электричества не стали бы менять свои стандарты, а внесли бы поправку. Точно так же, метр, по определению, равен одной десятимиллионной доле определенной дуги в четверть окружности, но, хотя было найдено, что это не совсем верно, длина метра не была изменена, зато размеры Земли выражаются менее простым числом.

В соответствии с методом Британской Ассоциации абсолютное значение величины *первоначально подбирается* так, чтобы представлять как можно точнее величину, выведенную из электромагнитной абсолютной системы.

340. Если создана вещественная единица, представляющая эту абстрактную величину, другие стандарты создаются путем копирования этой единицы. Этот процесс может быть выполнен с крайней точностью — во много раз большей точностью, чем, например, изготовление линейки длиною в один фут путем копирования стандартного фута.

Эти копии, изготовленные из наиболее стойких материалов, распределены по всем частям мира, и если первоначальные стандарты будут утрачены, вряд ли возникнут какие-либо трудности в получении их копий.

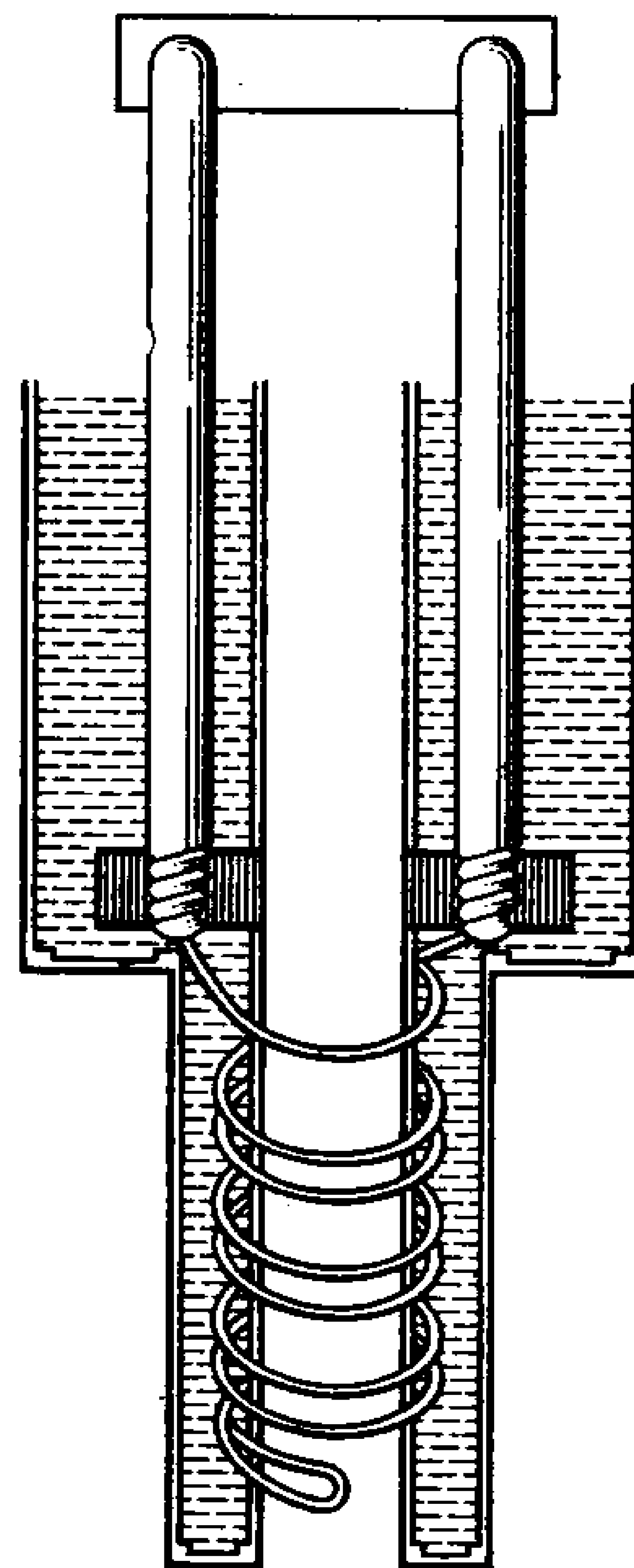


Рис. 28

Но такие единицы, как единица Сименса, могут быть без очень большого труда воспроизведены со значительной точностью, и, поскольку соотношение между Омом и единицей Сименса известно, Ом можно воспроизвести, даже не имея стандарта для копирования, хотя для этого придется затратить много больше труда, а точность будет много меньше, чем в методе копирования.

Наконец, Ом можно воспроизвести электромагнитным методом, с помощью которого он и был первоначально определен. Этот метод является значительно более трудоемким, чем определение фута с помощью секундного маятника, и, по-видимому, уступает последнему в точности. С другой стороны, определение электромагнитной единицы, выраженной через Ом, со степенью точности, отвечающей прогрессу электрической науки, представляет собой необычайно важную физическую задачу, вполне достойную повторного исследования.

Существующие катушки сопротивления, созданные для того, чтобы представлять один Ом, сделаны из сплава, состоящего из двух частей серебра и одной части платины, в виде проводов диаметром от 0,5 до 0,8 мм и длиной от одного до двух метров. Эти провода припаяны к толстым медным электродам. Сам провод покрыт двумя слоями шелка, окружен застывшим парафином и помещен в тонкостенный латунный футляр, так что катушка сопротивления легко может быть доведена до температуры, при которой ее сопротивление в точности равно одному Ому. Это значение температуры указано на изолирующей подставке катушки (см. рис. 28).

О форме катушек сопротивления

341. Катушка сопротивления — это проводник, который легко можно включить в вольтову цепь, с тем чтобы ввести в эту цепь известное сопротивление.

Электроды или концы катушки должны быть сделаны так, чтобы способ соединения не вносил заметной ошибки. Для сопротивлений заметной величины важно, чтобы электроды были сделаны из толстых медных проводов или стержней, чтобы концы электродов были хорошо амальгамированы ртутью и были прижаты к плоским амальгамированным медным поверхностям, помещенным в чашки со ртутью.

Для очень больших сопротивлений достаточно, чтобы электроды были сделаны из массивной латуни и чтобы можно было производить соединения, вставляя латунный или медный клин в промежуток между электродами. Этот метод оказался очень удобным.

Сама катушка сопротивления состоит из полностью покрытого шелком провода, концы которого постоянно припаяны к электродам.

Катушка должна быть устроена так, чтобы легко было определить ее температуру. Для этой цели провод наматывается на трубку и закрывается другой трубкой, с тем чтобы его можно было поместить в сосуд с водой и чтобы вода имела доступ и к внешней, и к внутренней частям катушки.

Для того чтобы избежать электромагнитного воздействия от тока в катушке, провод сначала складывается пополам, а затем наматывается на трубку, и, таким образом, в каждой части катушки имеются равные и противоположные токи в прилегающих частях провода.

В тех случаях, когда желательно держать две катушки при одной и той же температуре, провода иногда располагаются рядом и наматываются вместе. Этот метод особенно полезен в тех случаях, когда важнее обеспечить равенство сопротивлений, чем знать их точную величину, как, например, в случае равных плеч мостика Уитстона (п. 347).

Когда впервые приступали к измерениям сопротивления, широко использовалась катушка сопротивления, состоявшая из неизолированного провода, который был намотан вдоль спиральной канавки вокруг цилиндра, сделанного из изолирующего материала. Такое сопротивление было названо Реостатом. Точность, с которой оказалось возможно сравнивать сопротивления, стала вскоре несовместимой с применением любого прибора, в котором контакты не лучше, чем в реостате. Однако в тех случаях, когда точные измерения не требуются, реостат еще используется для регулировки сопротивления.

Катушки сопротивления изготовляются, как правило, из металлов, имеющих наибольшее сопротивление и мало меняющихся с температурой. Этому требованию очень хорошо удовлетворяет нейзильбер (мельхиор), но оказалось, что некоторые образцы с годами меняют свои свойства. Поэтому для стандартных сопротивлений применяются некоторые чистые металлы, а также сплав платины и серебра; относительное сопротивление таких катушек на протяжении нескольких лет найдено постоянным в пределах современной точности.

342. Для очень больших сопротивлений, таких, как несколько миллионов Ом, провод должен быть очень длинным или очень тонким, и изготовление катушки оказывается дорогим и трудным. Поэтому в качестве материалов для стандартов

большого сопротивления были предложены теллур и селен. Очень остроумный и легкий метод изготовления был недавно предложен Филлипсом (Phillips) [1]. На куске эбонита или матового стекла наносится тонкая карандашная линия. Концы этой нити из графита присоединяются к металлическим электродам, и все вместе затем покрывается изолирующим лаком. Если окажется, что сопротивление такой карандашной линии остается постоянным, это будет лучший метод получения сопротивления в несколько миллионов Ом.

343. Существуют различные устройства, с помощью которых катушки сопротивления могут легко вводиться в цепь. Например, ряд катушек, сопротивления

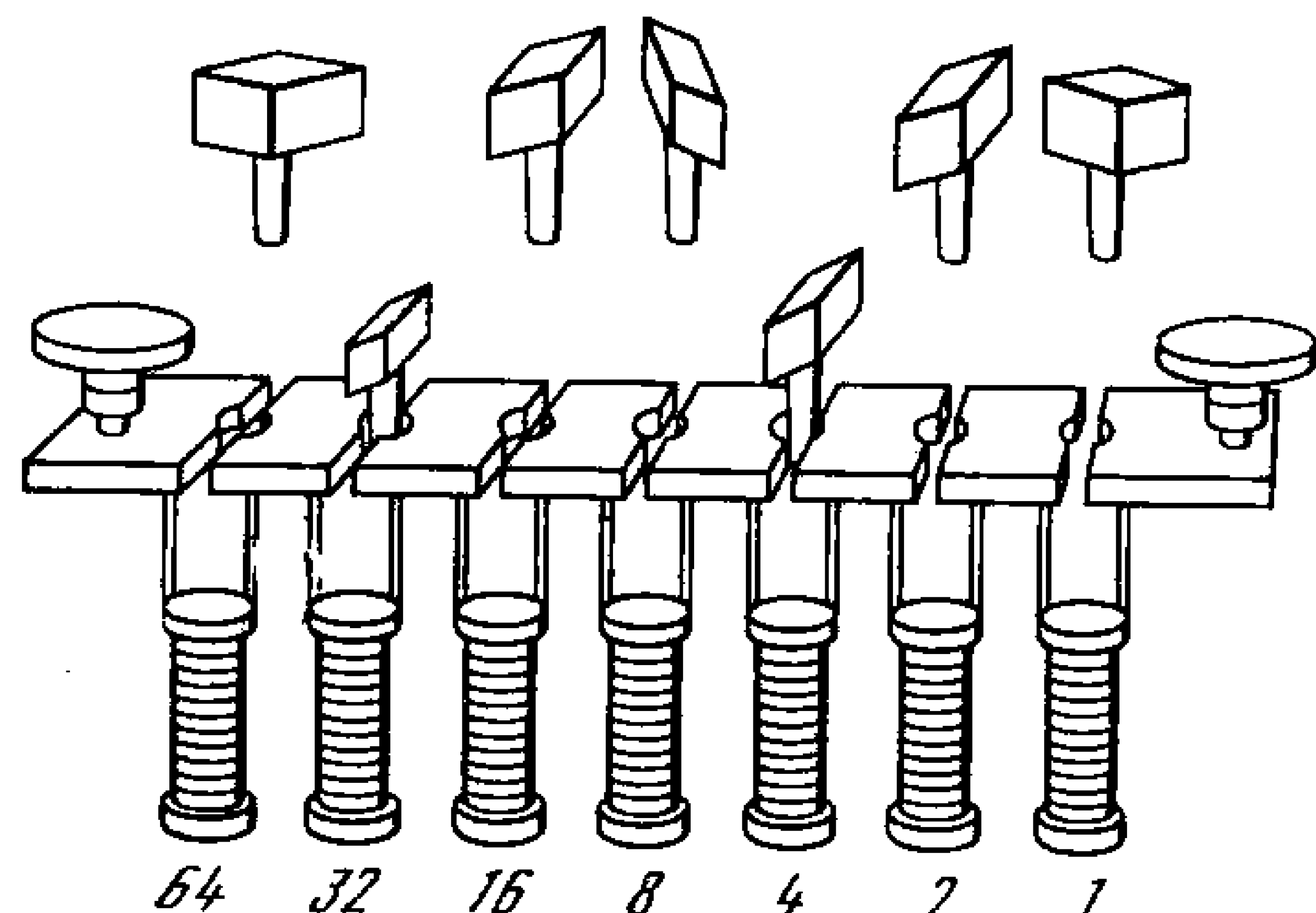


Рис. 29

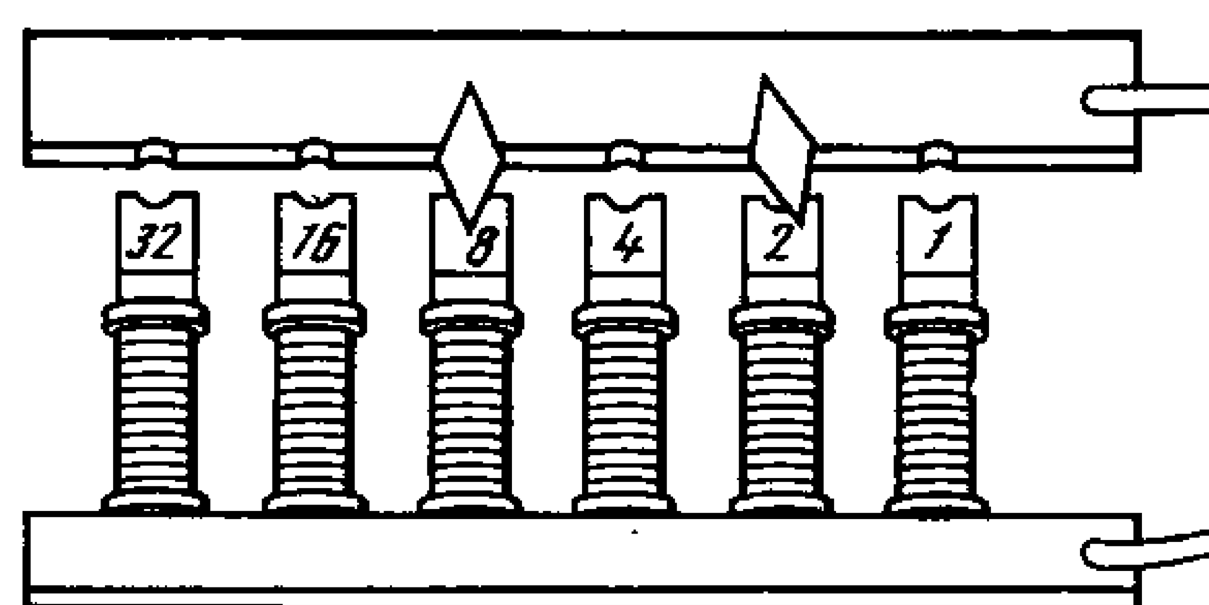


Рис. 30

которых равны 1, 2, 4, 16 и т. д., расположенные по возрастающим степеням числа 2, могут быть помещены в ящик друг за другом последовательно.

Электроды состоят из толстых латунных пластин, расположенных на внешней стороне ящика таким образом, что, если между двумя из них вставить в качестве шунта латунный штеккер или клин, сопротивление соответствующей катушки может быть убрано из цепи. Это устройство было введено Сименсом.

В каждом промежутке между электродами обозначено сопротивление соответствующей катушки, так что, если, например, мы хотим, чтобы сопротивление в ящике было равно 107, мы выражаем 107 в двоичной системе как сумму 64+32+8+2+1, т. е. как число 1101011. Затем мы вынимаем штеккеры из отверстий, соответствующих числам 64, 32, 8, 2 и 1, и оставляем штеккеры в 16 и 4 [рис. 29].

Этот метод, основанный на двоичной системе, требует наименьшего числа отдельных катушек, а также легче всего проверяется. Потому что, если мы имеем другую катушку, равную 1, мы можем проверить равенство катушек 1 и 1′, затем равенство 1+1′ и 2, затем равенство 1+1′+2 и 4 и т. д.

Единственным недостатком этого устройства является то, что требуется знакомство с двоичной системой счисления, а такое знакомство не всегда есть у тех, кто привык выражать каждое число в десятичной системе.

344. Если измеряются проводимости, а не сопротивления, ящик с катушками сопротивления можно устроить по-другому.

Катушки располагаются таким образом, что один конец каждой из них соединен с длинным толстым куском металла, который образует один электрод ящика,

[1] *Phil. Mag.*, July, 1870.

а другой конец, как в предыдущем случае, соединен с массивной латунной пластиной.

Другим электродом ящика является длинная латунная пластина, расположенная таким образом, что, вставляя латунные штеккеры в промежутки между этой пластиной и электродами катушек, мы можем соединить ее с первым электродом через любой заданный набор катушек. Тогда проводимость ящика равняется сумме проводимостей включенных катушек.

На рис. 30 сопротивления катушек равны 1, 2, 4 и т. д., а штеккеры включают катушки 2 и 8, поэтому проводимость ящика равна $1/2+1/8=5/8$ и, следовательно, сопротивление ящика равно 8/5 или 1,6.

Этот метод соединения катушек сопротивления для измерения дробных сопротивлений был введен сэром У. Томсоном под названием метода многократного (параллельного) соединения (см. п. 276).

О сравнении сопротивлений

345. Если электродвижущая сила батареи равна E, а сопротивление батареи и всех соединений, включая сопротивление гальванометра, измеряющего ток, равно R и если сила тока при включенной батарее равна I, а после введения в цепь добавочных сопротивлений r_1, r_2 сила тока принимает соответственно значения I_1, I_2 то по закону Ома

$$E=IR=I_1(R+r_1)=I_2(R+r_2).$$

Исключая электродвижущую силу батареи E и сопротивление R батареи и ее соединений, получаем формулу Ома

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{(I-I_1)I_2}{(I-I_2)I_1}.$$

Этот метод требует измерения отношений I, I_1 и I_2, а потому гальванометр должен быть градуирован для абсолютных измерений.

Если сопротивления r_1 и r_2 равны, то равны токи I_1 и I_2, и мы можем проверить равенство токов с помощью гальванометра, не дающего возможности определить их отношения.

Но этот подход следует скорее рассматривать как пример ошибочного подхода, а не как практический метод определения сопротивления. Электродвижущая сила не может поддерживаться строго постоянной, и внутреннее сопротивление батареи также очень сильно меняется, поэтому не следует основываться на любых методах измерений, в которых эти величины даже на короткое время предполагаются неизменными.

346. Сравнение сопротивлений может быть проведено с крайней точностью при помощи любого из двух методов, в которых результат не зависит от изменений R и E.

Первый из этих методов основан на использовании дифференциального гальванометра, прибора, в котором имеются две катушки, причем ток в каждой из них является независимым от тока в другой, поэтому, если сделать так, что эти токи текут в противоположных направлениях, они оказывают противоположное воздействие на стрелку, и если отношение этих токов равно отношению m к n, они не оказывают суммарного воздействия на стрелку гальванометра [рис. 31].

Обозначим через I_1, I_2 токи, текущие через эти две катушки гальванометра. Тогда отклонение стрелки может быть записано в виде $\delta = mI_1 - nI_2$.

Пусть теперь ток батареи I разделяется между катушками гальванометра, и пусть в цепь первой и второй катушек введены соответственно сопротивления A и B. Обозначим остальные сопротивления в цепях этих катушек и их соединений соответственно через α и β, сопротивление батареи и ее соединений между точками C и D обозначим через r, а ее электродвижущую силу — через E.

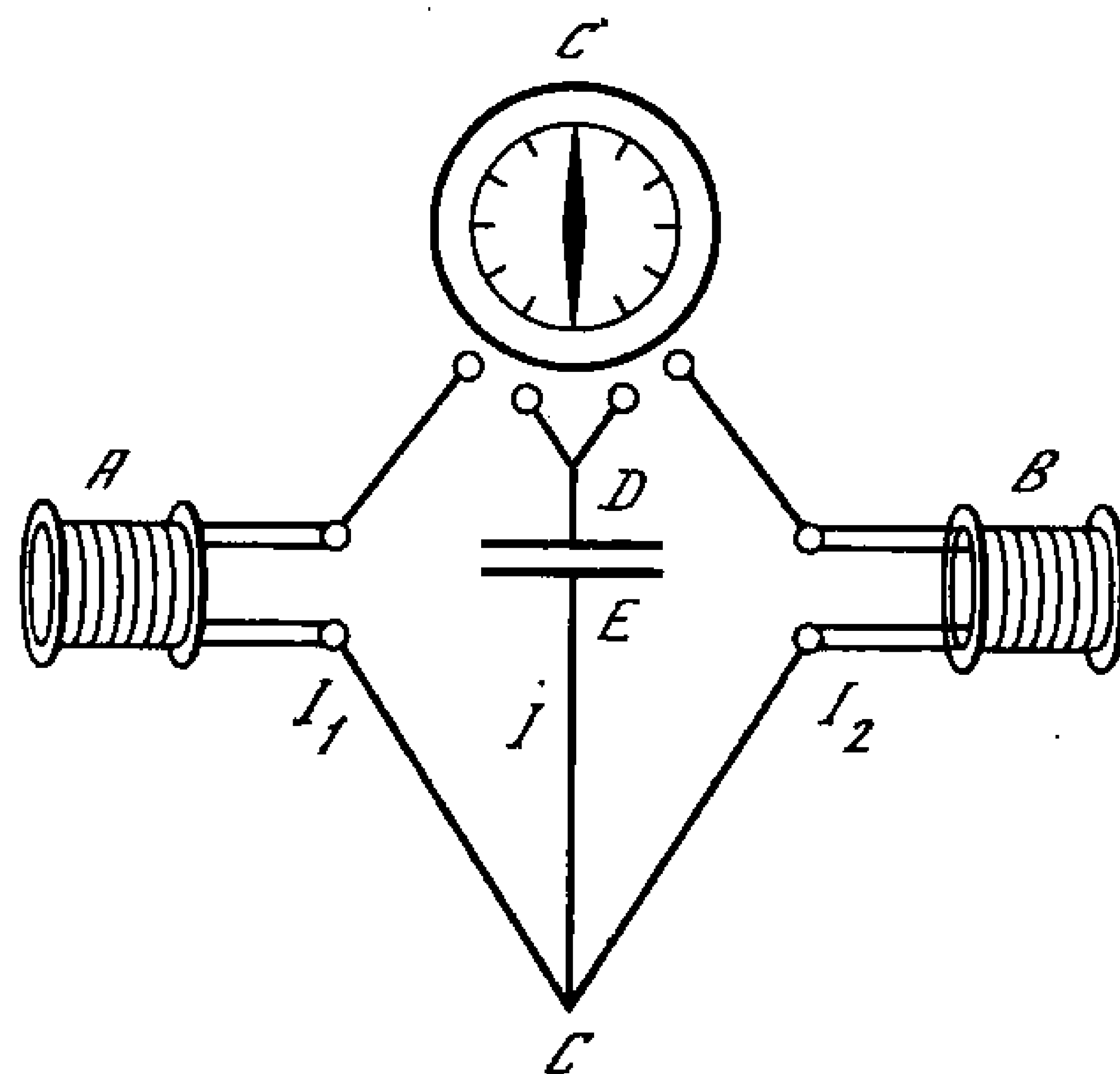


Рис. 31

Тогда, по Закону Ома, для разности потенциалов между точками C и D находим

$$I_1 (A+\alpha) = I_2 (B+\beta) = E - Ir,$$

и так как $I_1 + I_2 = I$, то

$$I_1 = E\frac{B+\beta}{D}, \qquad I_2 = E\frac{A+\alpha}{D},$$

$$I = E\frac{A+\alpha+B+\beta}{D},$$

где

$$D = (A+\alpha)(B+\beta) + r(A+\alpha+B+\beta).$$

Поэтому отклонение стрелки гальванометра равно

$$\delta = (E/D)\{m(B+\beta) - n(A+\alpha)\},$$

и, если не наблюдается никакого отклонения, тогда мы знаем, что величина, заключенная в фигурные скобки, не может отличаться от нуля больше, чем на некоторое малое количество, зависящее от мощности батареи, от выбора подходящего устройства, от чувствительности гальванометра и от точности наблюдателя.

Предположим, что катушка B подобрана так, что не наблюдается видимого отклонения.

Пусть теперь вместо A вставляется другой проводник A', и пусть проводник A' подбирается так, чтобы не было видимого отклонения. Тогда, очевидно, в первом приближении, $A' = A$.

Чтобы установить степень точности этой оценки, обозначим штрихами измененные количества, относящиеся ко второму наблюдению. Тогда

$$m(B+\beta) - n(A+\alpha) = \frac{D}{E}\delta,$$

$$m(B+\beta) - n(A'+\alpha) = \frac{D'}{E'}\delta';$$

отсюда

$$n(A' - A) = \frac{D}{E}\delta - \frac{D'}{E'}\delta'.$$

Если наблюдения дают, что δ и δ', вместо того чтобы видимым образом обратиться в нуль, только равны друг другу, то, пока мы не можем ручаться, что $E=$

$=E'$, правая часть последнего уравнения может не обратиться в нуль. В этом случае метод был бы только видоизменением метода, описанного выше.

Дсстоинство излагаемого метода состоит в том, что предметом наблюдения является отсутствие какого бы то ни было отклонения, или, иными словами, этот метод является Нулевым методом, в котором отсутствие силы определяется из такого наблюдения, в котором сила, если бы она отличалась от нуля больше чем на некоторую определенную малую величину, произвела бы наблюдаемый эффект.

Нулевые методы имеют большое значение там, где их можно применить, но они применимы только в тех случаях, когда мы можем сделать так, чтобы два равные и противоположные количества одного и того же вида одновременно входили в эксперимент.

В рассматриваемом нами случае обе величины δ и δ' являются слишком малыми для того, чтобы их можно было наблюдать, и поэтому любое изменение в величине E не нарушает точности результата.

Действительную степень точности этого метода можно определить, проведя некоторое число наблюдений, в каждом из которых A' подстраивается отдельно, и сравнивая результат каждого наблюдения со средним значением, полученным по всей последовательности измерений.

Но если мы выведем A' из настройки, изменив эту величину известным образом, например, включив в цепь A или в цепь B добавочное сопротивление, равное одной сотой части от величины A или B, и если мы затем определим результирующее отклонение стрелки гальванометра, мы можем узнать, сколько делений соответствует ошибке в один процент. Чтобы оценить действительную степень точности, мы должны оценить наименьшее отклонение, которое еще поддается наблюдению, и сравнить его с отклонением, соответствующим ошибке в один процент.

[2] Если нужно сравнить величины A и B и если A и B поменять местами, то уравнение станет таким:

$$m(A+\beta)-n(B+\alpha)=\frac{D'}{E'}\delta',$$

откуда

$$(m+n)(B-A)=\frac{D}{E}\delta-\frac{D'}{E'}\delta'.$$

Если m и n, A и B, α и β, E и E' приблизительно равны, то

$$B-A=(1/2nE)(A+\alpha)(A+\alpha+2r)(\delta-\delta').$$

Здесь за величину $\delta-\delta'$ можно принять наименьшее наблюдаемое отклонение гальванометра.

Если бы провод гальванометра был длиннее и тоньше при неизменной полной массе, тогда величина n менялась бы как длина провода, а величина α — как квадрат длины. Поэтому величина $(A+\alpha)(A+\alpha+2r)/n$ будет иметь минимум при

$$\alpha=\frac{1}{3}(A+r)\left\{2\sqrt{1-\frac{3}{4}\frac{r^2}{(A+r)^2}}-1\right\}.$$

Если мы предположим, что сопротивление батареи r пренебрежимо мало в сравнении с A, это даст $\alpha=A/3$, или *сопротивление каждой катушки гальванометра должно быть равно одной трети от величины измеряемого сопротивления.*

[2] Это исследование взято из трактата Вебера по гальванометрам. *Göttingen Transactions*, X, p. 65.

Мы тогда находим

$$B-A=\frac{8}{9}\frac{A^2}{nE}(\delta-\delta').$$

Если мы пустим ток только через одну из катушек гальванометра и если при этом отклонение будет равно Δ (предполагаем, что отклонение строго пропорционально отклоняющей силе), то

$$\Delta=\frac{nE}{A+\alpha+r}=\frac{3}{4}\frac{nE}{A}, \quad \text{если} \quad r=0 \text{ и } \alpha=1/3A.$$

Отсюда $(B-A)/A=2(\delta-\delta')/3\Delta$.

В дифференциальном гальванометре два тока должны производить равное и противоположное воздействие на подвешенную стрелку. Сила, с которой каждый из токов действует на стрелку, зависит не только от величины этого тока, но и от положения витков провода относительно стрелки. Поэтому, если катушка намотана недостаточно тщательно, отношение m к n может меняться при изменении положения стрелки, и, следовательно, если возникают подозрения о любом изменении положения стрелки, необходимо соответствующими методами определять это отношение m к n каждый раз в течение хода измерений.

В другом методе, в котором используется мостик Уитстона, требуется только обычный гальванометр, и наблюдаемое нулевое отклонение стрелки вызвано не противодействием двух токов, а отсутствием тока в проводе. Поэтому мы наблюдаем не только нулевое отклонение, но и нулевой ток, и не может возникнуть ошибок от недостаточной регулярности или от изменений любого вида в катушках гальванометра. От гальванометра только требуется, чтобы он был достаточно чувствителен, для того чтобы определять существование и направление тока, и не нужно каким-либо способом определять величину тока или сравнивать величину этого и другого тока.

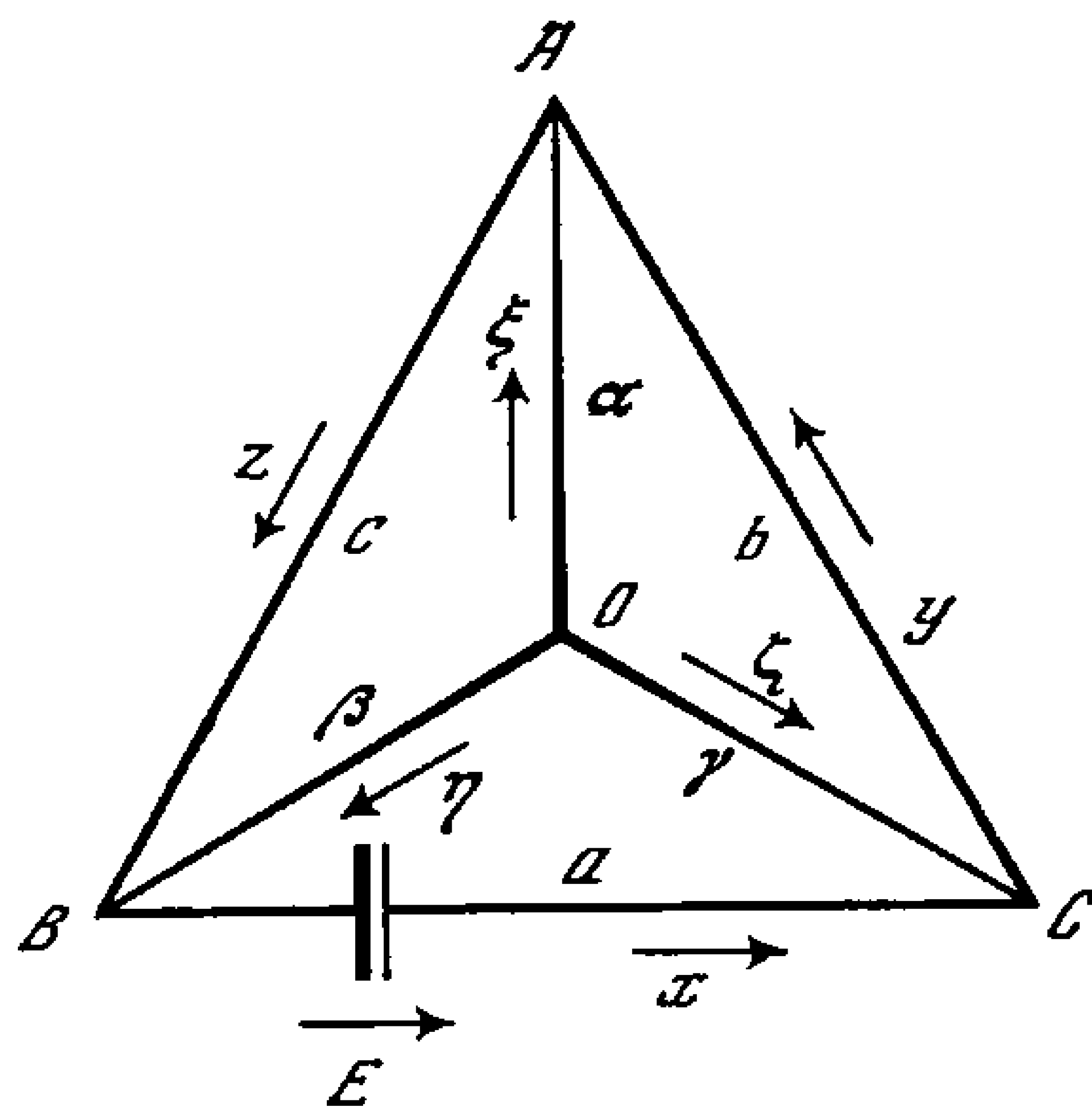


Рис. 32

347. Мостик Уитстона состоит, по существу, из шести проводников, соединяющих четыре точки. К двум из этих точек прикладывается электродвижущая сила E с помощью вольтовой батареи, введенной между B и C. Ток между двумя другими точками O и A измеряется гальванометром [рис. 32].

При определенных условиях этот ток обращается в нуль. Тогда говорят, что проводники BC и OA *сопряжены* один другому, что накладывает определенную связь на сопротивления других четырех проводников, и эта связь используется при измерении сопротивлений.

Если ток через OA равен нулю, потенциал в точке O должен быть равен потенциалу в точке A. Но если мы знаем потенциалы в B и C, мы можем определить потенциалы в O и A с помощью правил, данных в п. 275, с учетом того, что ток в

OA отсутствует:

$$O=\frac{B\gamma+C\beta}{\beta+\gamma}, \qquad A=\frac{Bb+Cc}{b+c},$$

откуда получаем условие $b\beta=c\gamma$, где b, c, β, γ обозначают соответственно сопротивления участков CA, AB, BO и OC.

Чтобы определить степень точности, достижимую в этом методе, мы должны определить силу тока в OA, если это условие не выполнено точно.

Пусть A, B, C и O — четыре точки. Пусть токи, текущие вдоль BC, CA и AB равны соответственно x, y и z, а сопротивления этих проводников — a, b и c. Пусть токи, текущие вдоль OA, OB и OC равны ξ, η, ζ, а соответствующие сопротивления равны α, β и γ. Пусть электродвижущая сила E действует вдоль BC. Требуется определить ток ξ через OA.

Обозначим потенциалы в точках A, B, C и O буквами A, B, C и O. Уравнения, определяющие прохождение тока, будут

$$\begin{aligned} ax&=B-C+E, & \alpha\xi&=O-A,\\ by&=C-A, & \beta\eta&=O-B,\\ cz&=A-B, & \gamma\zeta&=O-C, \end{aligned}$$

а уравнения непрерывности:

$$\begin{aligned} \xi+y+z&=0,\\ \eta+z-x&=0,\\ \zeta+x-y&=0. \end{aligned}$$

Рассматривая систему как образованную тремя цепями OBC, OCA и OAB, в которых токи соответственно равны x, y и z, и применяя к каждой замкнутой цепи правило Кирхгофа, мы исключаем значения потенциалов O, A, B, C и токов ξ, η, ζ и получаем следующие уравнения для x, y и z:

$$\begin{aligned} (a+\beta+\gamma)\,x\quad -\gamma y\quad -\beta z&=E,\\ -\gamma x+(b+\gamma+\alpha)\,y\quad -\alpha z&=0,\\ -\beta x\quad -\alpha y+(c+\alpha+\beta)\,z&=0. \end{aligned}$$

Отсюда, если мы положим

$$D=\begin{vmatrix} a+\beta+\gamma, & -\gamma, & -\beta,\\ -\gamma, & b+\gamma+\alpha, & -\alpha,\\ -\beta, & -\alpha, & c+\alpha+\beta \end{vmatrix},$$

найдем

$$\xi=\frac{E}{D}\,(b\beta-c\gamma)$$

и

$$x=\frac{E}{D}\,\{(b+\gamma)(c+\beta)+\alpha(b+c+\beta+\gamma)\}.$$

348. Значение D можно выразить в симметричной форме

$$D=abc+bc(\beta+\gamma)+ca(\gamma+\alpha)+ab(\alpha+\beta)+(a+b+c)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta),$$

или, так как мы предполагаем, что батарея составляет часть проводника a, а гальванометр — часть проводника α, можем вместо a писать сопротивление батареи B, а вместо α — сопротивление гальванометра G. Мы тогда находим

$$D=BG(b+c+\beta+\gamma)+B(b+\gamma)(c+\beta)+G(b+c)(\beta+\gamma)+bc(\beta+\gamma)+\beta\gamma(b+c).$$

Если бы электродвижущая сила E действовала вдоль отрезка OA, причем сопротивление отрезка OA было бы по-прежнему равно α, и если бы гальванометр был включен в BC, причем сопротивление BC было бы по-прежнему равно a, то величина D не изменилась бы и ток в BC, вызванный электродвижущей силой E, действующей вдоль OA, был бы равен току в OA, вызванному электродвижущей силой E, действующей в BC.

Но если мы просто отъединим батарею и гальванометр и, не меняя их соответствующих сопротивлений, присоединим батарею к точкам O и A, а гальванометр — к точкам B и C, то в выражении для D мы должны поменять местами B и G. Если обозначить через D' выражение, в которое переходит D после такой перестановки, мы находим

$$D-D'=(G-B)\{(b+c)(\beta+\gamma)-(b+\gamma)(\beta+c)\}=(B-G)\{(b-\beta)(c-\gamma)\}.$$

Предположим, что сопротивление гальванометра больше, чем сопротивление батареи.

Предположим также, что в своем первоначальном положении гальванометр соединяет контакт двух проводников, β и γ, обладающих наименьшими сопротивлениями, с контактом двух проводников b, c, обладающих наибольшими сопротивлениями. Другими словами, мы будем предполагать, что если величины b, c, γ, β расположены в порядке возрастания, то b и c стоят рядом и γ и β стоят рядом. Поэтому величины $b-\beta$ и $c-\gamma$ имеют один и тот же знак, вследствие чего их произведение положительно, и потому $D-D'$ имеет тот же самый знак, что $B-G$.

Следовательно, если сделать так, чтобы гальванометр соединял контакт между двумя наибольшими сопротивлениями с контактом между двумя наименьшими сопротивлениями, и если у гальванометра сопротивление больше, чем у батареи, то величина D будет меньше, а величина отклонения гальванометра — больше по сравнению с тем случаем, когда соединения переставлены местами.

Отсюда вытекает следующее правило для получения наибольших отклонений гальванометра в данной системе: из двух сопротивлений, батареи и гальванометра, большее нужно подключить так, чтобы оно соединяло два наибольших и два наименьших из остальных четырех сопротивлений.

349. Предположим, что нам нужно определить отношение сопротивлений двух проводников AB и AC и что это нужно сделать, отыскав такую точку O проводника BOC, что если точки O и A соединить проводом с введенным в него гальванометром, а между B и C включить батарею, то заметного отклонения стрелки гальванометра не произойдет.

Можно предположить, что проводник BOC представляет собой провод с однородным сопротивлением, разделенный на равные части, и поэтому отношение сопротивлений BO и OC можно отсчитывать сразу.

Можно не делать весь проводник однородным, а сделать из однородного провода только часть проводника, прилегающую к точке O, а те части, которые на-

ходятся по обе стороны, могут быть катушками любой формы, сопротивление которых точно известно.

Теперь мы будем использовать обозначения, отличающиеся от симметричных обозначений, с которых мы начали.

Пусть сопротивление BAC равно R, $c=mR$ и $b=(1-m)R$, полное сопротивление BOC равно S, $\beta=nS$ и $\gamma=(1-n)S$.

Величина n отсчитывается непосредственно, а величина m определяется по n в положении, когда нет заметного отклонения гальванометра.

Обозначим сопротивление батареи и ее соединений через B, а сопротивление гальванометра и его соединений — через G.

Находим, как раньше,

$$D=G\{BR+BS+RS\}+m(1-m)R^2(B+S)+n(1-n)S^2(B+R)+(m+n-2mn)BRS,$$

и если ξ — ток в проводе гальванометра, то $\xi=(ERS/D)\ (n-m)$.

Чтобы получить наиболее точные результаты, мы должны сделать отклонение стрелки настолько большим, насколько это возможно в сравнении с $(n-m)$. Этого можно добиться, подбирая надлежащим образом размеры гальванометра и провод стандартного сопротивления.

Когда мы дойдем до Гальванометрии, п. 716, будет показано, что если у проволоки в гальванометре менять форму, оставляя неизменной массу, то отклонение стрелки на единицу тока пропорционально длине, но сопротивление возрастает как квадрат длины. Отсюда следует, что максимальное отклонение имеет место в том случае, когда сопротивление проволоки в гальванометре равно постоянному сопротивлению остальной цепи.

Для настоящего случая, если отклонение обозначить через δ, имеем $\delta=C\sqrt{G}\xi$, где C — некоторая постоянная, а G — сопротивление гальванометра, которое меняется как квадрат длины проволоки. Отсюда мы находим, что, когда величина δ достигает максимума, та часть выражения для D, которая содержит G, должна быть равна остальной части выражения.

Если мы также положим $m=n$, как это имеет место в случае, если мы произвели правильное измерение, мы находим, что наилучшее значение G равно $G=n(1-n)(R+S)$.

Этот результат легко получить, рассматривая сопротивление системы между точками A и O с учетом того, что отрезок BC сопряжен отрезку AO и не влияет на это сопротивление.

Таким же путем мы могли бы найти, что если задана полная площадь активных поверхностей батареи, то, поскольку в этом случае величина E пропорциональна $\sqrt{B}$, наиболее выгодное устройство батареи достигается при условии

$$B=RS/(R+S).$$

Наконец, мы определим такое значение S, при котором данное изменение величины n вызывает наибольшее отклонение гальванометра. Дифференцируя по S выражения для ξ, мы находим, что оно максимально при

$$S^2=\frac{BR}{B+R}\left(R+\frac{G}{n(1-n)}\right).$$

Если нам нужно проделать очень много измерений сопротивления, в которых

величина имеющихся сопротивлений примерно одна и та же, имеет смысл специально подготовить для этой цели батарею и гальванометр. В этом случае мы находим, что наилучшее устройство достигается при $S=R$, $B=R/2$, $G=2n(1-n)R$, и если $n=1/2$, то $G=R/2$.

Об использовании Мостика Уитстона

350. Мы уже объяснили общую теорию Мостика Уитстона, теперь рассмотрим некоторые из его применений.

С наибольшей точностью может быть проведено сравнение двух равных сопротивлений.

Предположим, что β — стандартная катушка сопротивления и мы хотим отрегулировать катушку γ так, чтобы по своему сопротивлению она была равна β [рис. 33].

Приготовляются еще две катушки b и c, которые равны или почти равны друг другу, и электроды всех четырех катушек помещаются в ртутные чашки таким образом, что ток батареи разделяется между двумя ветвями, из которых одна состоит из β и γ, а другая — из b и c. Катушки b и c соединены проводом PR, сопротивление которого настолько однородно, насколько это возможно. Вдоль провода PR расположена шкала с равными делениями.

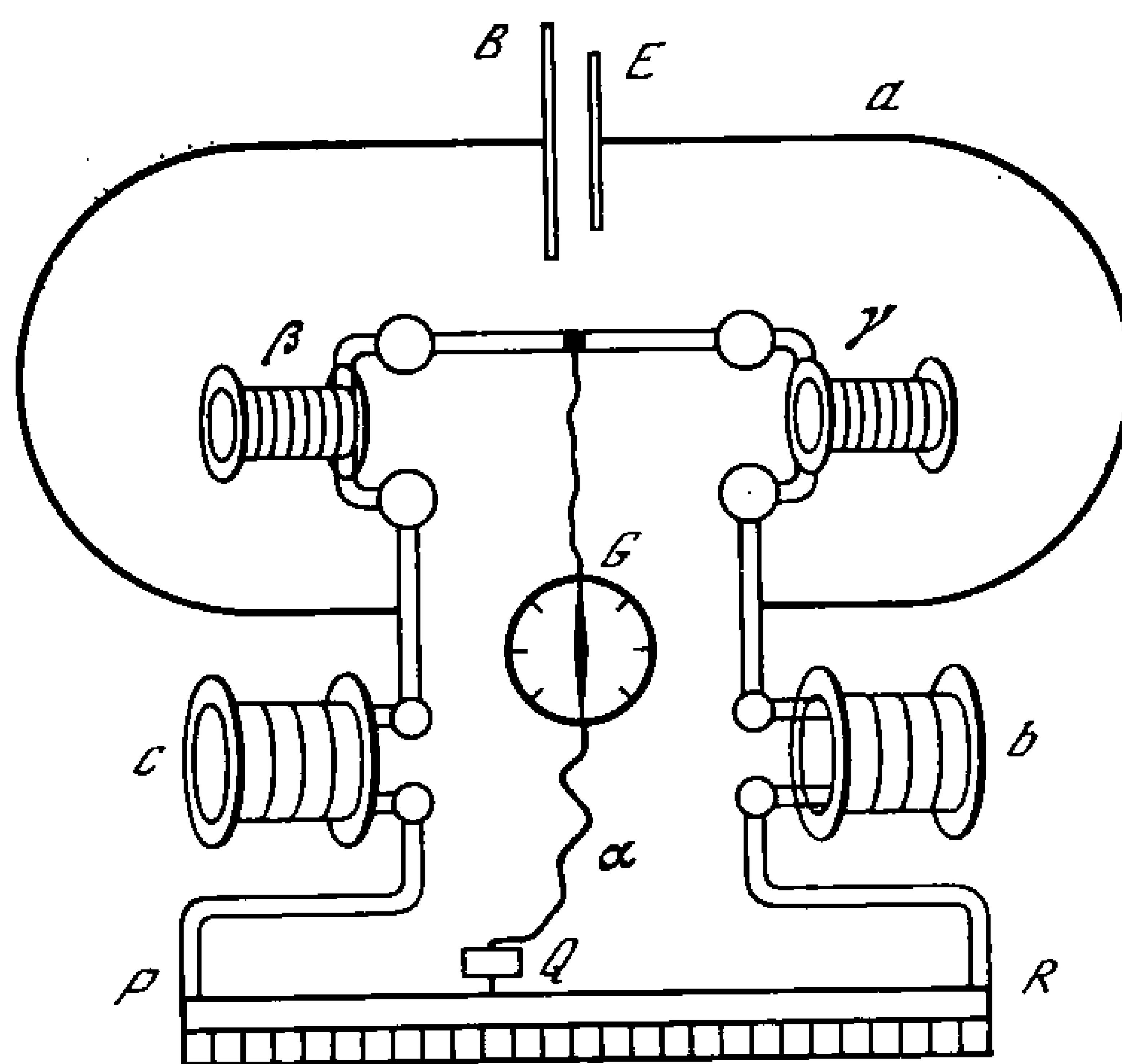


Рис. 33

Провод гальванометра подведен одним концом к точке соединения β и γ, другим — к точке Q на проводе PR, и точка контакта Q перемещается до такого положения, при котором после замыкания сначала цепи батареи, а затем цепи гальванометра не наблюдается отклонения стрелки гальванометра.

После этого катушки β и γ меняют местами и отыскивается новое положение Q. Если это новое положение оказывается тем же, что и старое, то мы знаем, что перемена местами сопротивлений β и γ не привела к изменению в соотношении сопротивлений, и, следовательно, катушка γ отрегулирована правильно. Если контакт Q нужно перемещать, то направление и величина перемещения указывают на характер и величину изменений в длине провода γ, после которых сопротивление катушки γ станет таким же, как у катушки β.

Если сопротивления катушек b и c, каждое из которых включает в себя сопротивление части провода PR до его нулевого отсчета, равны соответственно сопротивлениям b и c делений провода и если x — показание шкалы для точки Q в первом случае, а y — во втором, то

$$\frac{c+x}{b-x}=\frac{\beta}{\gamma}, \qquad \frac{c+y}{b-y}=\frac{\gamma}{\beta},$$

откуда

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2}=1-\frac{(b+c)(y-x)}{(c+x)(b-y)}.$$

Поскольку величина $b-y$ примерно равна величине $c+x$ и обе эти величины велики в сравнении с x или y, мы можем записать последнее равенство в виде

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2}=1+4\,\frac{y-x}{b+c}$$

и

$$\gamma=\beta\left(1+2\frac{y-x}{b+c}\right).$$

После того как величина γ подобрана настолько хорошо, насколько это возможно, мы заменяем катушки b и c на другие, сопротивление которых, скажем, в десять раз больше.

Остающееся различие между β и γ вызовет теперь в десять раз большее различие в положении Q, чем при первоначальных катушках b и c, и таким путем мы можем постепенно увеличивать точность сравнения.

Регулировка с помощью провода со скользящим контактом проводится быстрее, чем при использовании ящика сопротивлений, и позволяет плавное изменение.

Ни в коем случае нельзя вместо гальванометра вводить в провод со скользящим контактом батарею, потому что прохождение сильного тока в точке контакта может повредить поверхность провода. Поэтому такое устройство рассчитано для случая, в котором сопротивление гальванометра больше, чем сопротивление батареи.

[3] Если γ — измеряемое сопротивление, a — сопротивление батареи и α — сопротивление гальванометра, то наилучшие значения других сопротивлений, как показал м-р Оливер Хэвисайд (*Phil. Mag.*, Feb., 1873), равны

$$c=\sqrt{a\alpha}, \qquad b=\sqrt{a\gamma\frac{\alpha+\gamma}{a+\gamma}}, \qquad \beta=\sqrt{\alpha\gamma\frac{a+\gamma}{\alpha+\gamma}}.$$

Об измерении малых сопротивлений

351. Если в цепь вводится короткий и толстый проводник, его сопротивление оказывается настолько малым по сравнению с сопротивлением, возникающим из-за неизбежных дефектов в соединениях, таких, как плохие контакты или несовершенная пайка, что с помощью описанных выше способов нельзя получить правильную величину сопротивления.

Цель подобных экспериментов, как правило, состоит в том, чтобы определить удельное сопротивление вещества, и к ним прибегают в тех случаях, когда вещество не может быть получено в виде длинной тонкой проволоки или когда нужно определить как продольную, так и поперечную проводимость.

Сэр У. Томсон [4] описал применимый к подобным случаям метод, который мы можем рассматривать как пример системы, состоящей из девяти проводников [рис. 34].

---

[3] Последний абзац п. 350 отсутствует в первом издании.— *Примеч. ред.*

[4] *Proc. R. S.*, June 6, 1881.

Самая главная часть метода состоит в измерении сопротивления не проводника полной длины, а части проводника, заключенной между двумя отметками на некотором малом расстоянии от его концов.

Сопротивление, которое мы хотим измерить,— это сопротивление, испытываемое током, величина которого однородна в любом сечении проводника и который течет в направлении, параллельном оси проводника. Но непосредственно вблизи

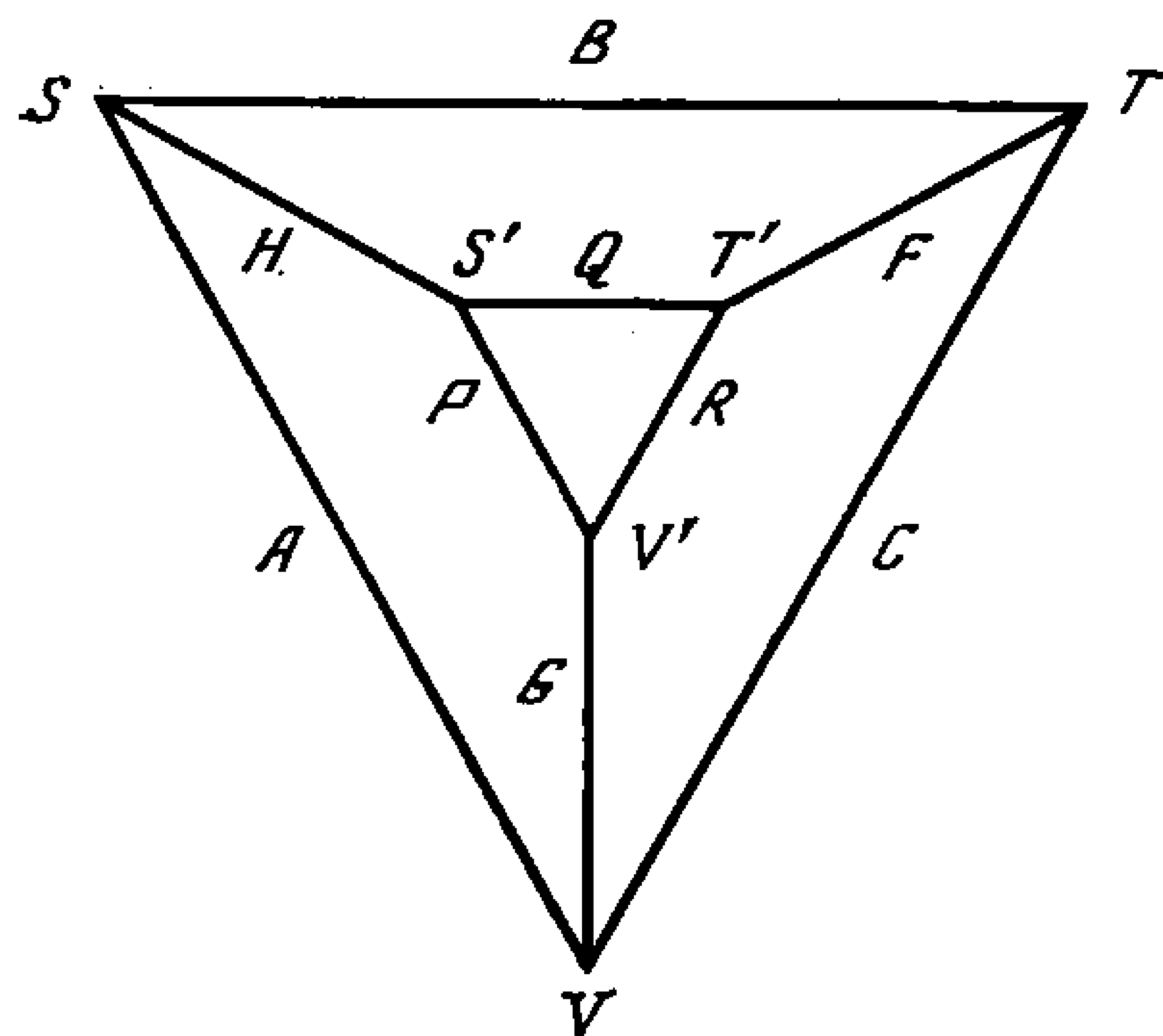


Рис. 34

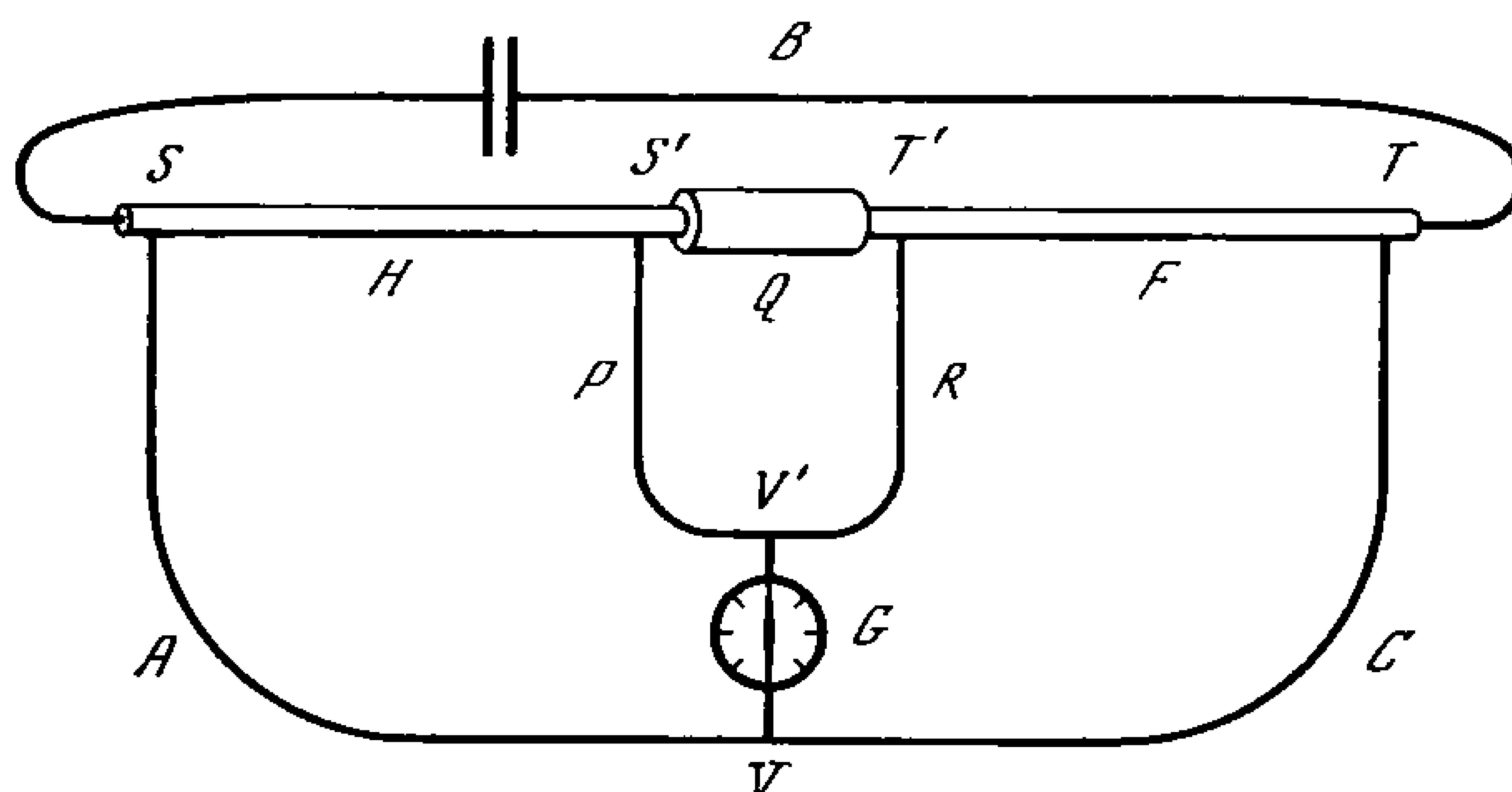


Рис. 35

концов, когда ток подводится с помощью электродов, припаянных, амальгамированных или просто прижатых к концам проводника, однородность в распределении тока по проводнику, как правило, отсутствует. На малых расстояниях от краев ток становится заметно однородным. Читатель может убедиться в этом, обратившись к исследованию и графикам в п. 193, где ток входит в металлическую пластину с параллельными границами через одну из границ, но быстро становится параллелен границам.

Требуется сравнить сопротивление проводников между определенными отметками S, S' и T, T'.

Проводники включаются последовательно в цепь батареи, обладающей малым сопротивлением, причем соединения должны быть настолько идеально проводящими, насколько это возможно. Провод подводится к проводникам в точках S и T, другой провод $S'V'T'$ касается проводников в точках S' и T'.

Провода гальванометра соединены с точками V и V' этих проводов [рис. 35].

Сопротивления проводов SVT и $S'V'T'$ настолько велики, что сопротивлением, происходящим от несовершенства соединений в точках S, T, S' или T', можно пренебречь в сравнении с сопротивлением провода. Точки V и V' подбираются так, чтобы сопротивления ветвей каждого провода, ведущих к двум проводникам, относились друг к другу приблизительно так же, как сопротивления этих двух проводников.

Обозначим через H и F сопротивления проводников SS' и $T'T$.

« » A и C сопротивления ветвей SV и VT.

« » P и R сопротивления ветвей $S'V'$ и $V'T'$.

« » Q сопротивление соединительной части $S'T'$.

« » B сопротивление батареи и ее соединений.

« » G сопротивление гальванометра и его соединений.

Симметрия системы может быть уяснена с помощью скелетной схемы, изображенной на рис. 34.

Условие, при выполнении которого батарея B и гальванометр G могут быть сопряженными проводниками, в этом случае таково:

$$\frac{F}{C}-\frac{H}{A}+\left(\frac{R}{C}-\frac{P}{A}\right)\frac{Q}{P+Q+R}=0.$$

Но сопротивление Q соединительного провода является настолько малым, насколько это возможно. Если бы оно равнялось нулю, это уравнение свелось бы к следующему: $(F/C)=(H/A)$, и отношение сравниваемых между собой сопротивлений равнялось бы отношению C к A, как в обычном Мостике Уитстона.

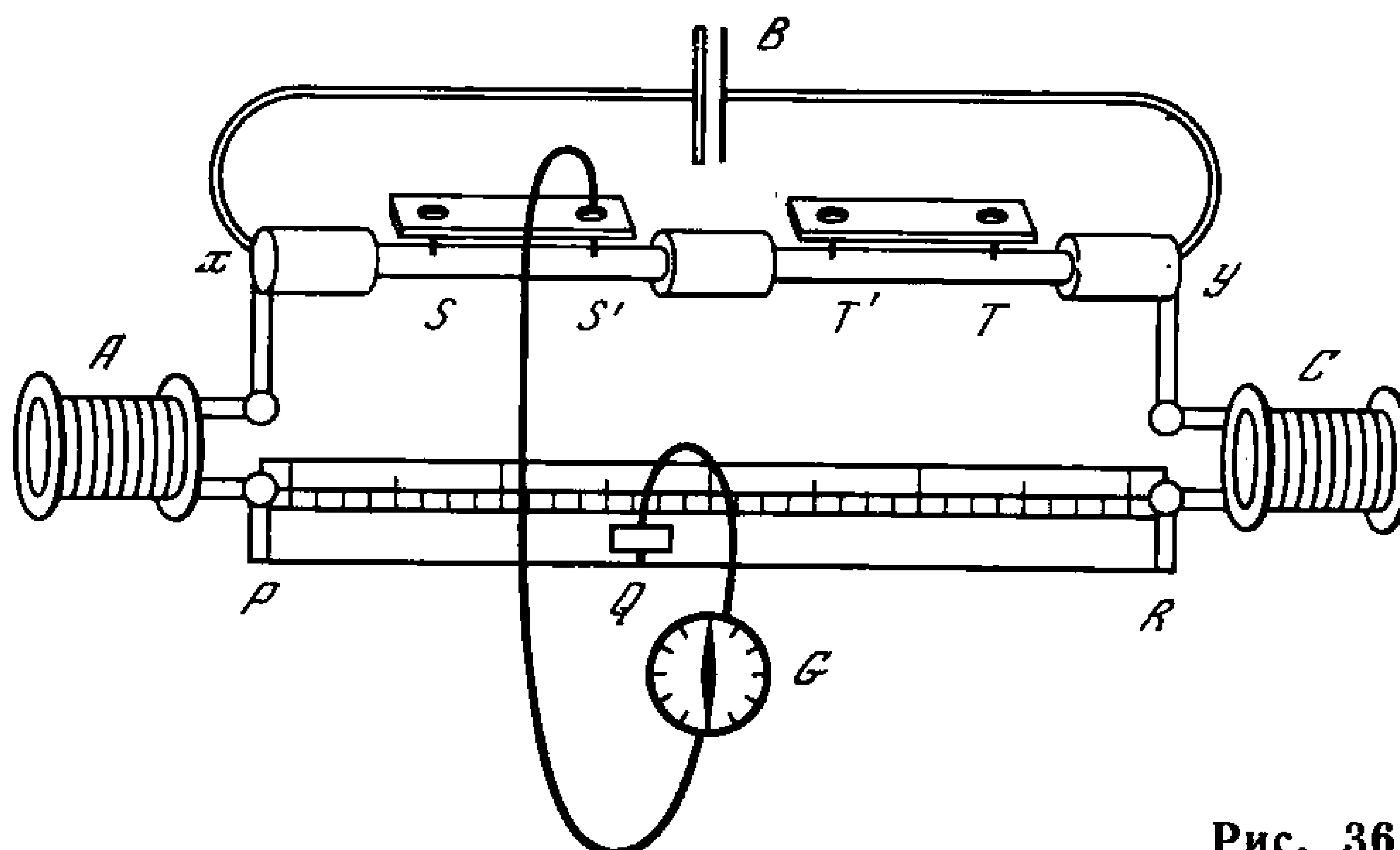


Рис. 36

В нашем случае величина Q мала в сравнении с P или R, и, если мы выберем точки V и V' таким образом, чтобы отношение R к C приблизительно равнялось отношению P к A, последний член в уравнении исчезнет, и мы будем иметь

$$F:H=C:A.$$

Успех этого метода в некоторой степени зависит от совершенства контактов между проводами и сравниваемыми проводниками в точках S, S', T' и T. Следующий метод, который применяют г-да Матиссен и Хоккин [5], позволяет обойтись без этого ограничения.

352. Испытуемые проводники располагаются уже описанным образом, причем соединения выполняются как можно лучше. Требуется сравнить сопротивление между отметками SS' на первом проводнике с сопротивлением между отметками $T'T$ на втором проводнике.

Два проводящих острия или острых лезвия закреплены в куске изолирующего материала таким образом, что расстояние между ними может быть точно измерено. Это устройство накладывается на испытуемый проводник, и тогда точки контакта с проводником находятся на известном расстоянии SS' друг от друга. Каждый из этих двух контактов соединен со ртутной чашкой, в которую может быть погружен один из электродов гальванометра [рис. 36].

[5] *Laboratory*. Matthiessen and Hockin on Alloys.

В остальном прибор устроен так же, как Мостик Уитстона, с катушками или ящиками сопротивлений A и C; провод PR снабжен скользящим контактом Q, к которому присоединен другой электрод гальванометра.

Пусть гальванометр соединен с точками S и Q и пусть мы так подобрали сопротивления A_1 и C_1 и так определили положение Q (обозначим это положение Q_1), что в проводе гальванометра нет тока.

Тогда мы знаем, что

$$\frac{XS}{SY}=\frac{A_1+PQ_1}{C_1+Q_1R},$$

где XS, PQ_1 и т. д. обозначают сопротивления соответствующих проводников.

Отсюда мы получаем

$$\frac{XS}{XY}=\frac{A_1+PQ_1}{A_1+C_1+PR}.$$

Пусть теперь электрод гальванометра присоединен к S' и пусть сопротивление передается от C к A (путем переноса катушек сопротивления с одной стороны на другую) до тех пор, пока не возникнет возможность установить электрическое равновесие гальванометра, поместив Q в некоторой точке провода, скажем в точке Q_2. Пусть в этом случае значения C и A равны C_2 и A_2. Положим

$$A_2+C_2+PR=A_1+C_1+PR=R.$$

Тогда получаем, как раньше, $\frac{XS'}{XY}=\frac{A_2+PQ_2}{R}$, откуда $\frac{SS'}{XY}=\frac{A_2-A_1+Q_1Q_2}{R}$.

Точно так же, помещая это устройство на второй проводник в точках T, T' и снова перенося сопротивление, мы получаем при положении электрода в T' $\frac{XT'}{XY}=\frac{A_3+PQ_3}{R}$, а при положении электрода в I имеем $\frac{XT}{XY}=\frac{A_4+PQ_4}{R}$.

Отсюда $\frac{T'T}{XY}=\frac{A_4-A_3+Q_3Q_4}{R}$.

Теперь мы можем вывести отношение сопротивлений SS' и $T'T$:

$$\frac{SS'}{T'T}=\frac{A_2-A_1+Q_1Q_2}{A_4-A_3+Q_3Q_4}.$$

Если не требуется большой точности, мы можем не учитывать катушек сопротивления A и C и тогда находим

$$\frac{SS'}{T'T}=\frac{Q_1Q_2}{Q_3Q_4}.$$

Отсчеты положения Q на проводе длиною в метр не могут превышать точность в одну десятую миллиметра, а сопротивление на разных участках может существенно различаться из-за неравенства температуры, трения и т. д. Поэтому в тех случаях, когда требуется большая точность, в A и C вводятся катушки со значительным сопротивлением, и отношение сопротивлений этих катушек может быть определено более точно, чем отношение сопротивлений тех частей, на которые разделяется провод точкой Q.

В дальнейшем будет видно, что в этом методе точность определения ни в какой степени не зависит от совершенства контактов в S, S' или T', T.

Этот метод можно назвать дифференциальным методом использования Мостика Уитстона, поскольку он основан на сравнении независимо сделанных наблюдений.

Существенным условием точности в этом методе является условие, чтобы сопротивление соединений оставалось тем же самым в продолжение цикла из четырех измерений, необходимых для полного определения. Поэтому серию измерений следует всегда повторять, чтобы отметить любое изменение в сопротивлениях.

О сравнении больших сопротивлений

353. Когда сопротивления, которые нужно измерить, очень велики, сравнение потенциалов в различных точках системы может быть проведено с помощью чувствительного электрометра, такого, как Квадрантный Электрометр, описанный в п. 219.

Если проводники, сопротивление которых требуется измерить, соединены последовательно и через них проходит один и тот же ток от батареи с большой электродвижущей силой, разность потенциалов на концах каждого проводника будет пропорциональна сопротивлению этого проводника. Поэтому, соединяя электроды электрометра с концами сначала одного, а затем другого проводника, можно определить отношение их сопротивлений.

Этот метод определения сопротивлений является самым прямым. Он связан с использованием электрометра, на показания которого можно полагаться, и мы также должны иметь некоторую гарантию того, что во время эксперимента ток остается постоянным.

Четыре проводника с большим сопротивлением можно также расположить по схеме Мостика Уитстона, при этом сам Мостик может быть образован электродами электрометра, а не электродами гальванометра. Преимущество этого метода заключается в том, что для отклонения стрелки электрометра не требуется постоянного тока, в то время как стрелка гальванометра не может отклоняться, если по проводу не идет постоянный ток.

354. Если сопротивление проводника настолько велико, что ток, который может создать в нем любая достижимая электродвижущая сила, является слишком малым для прямого измерения с помощью гальванометра, можно использовать конденсатор, для того чтобы в течение определенного времени накапливать электричество, а затем оценить накопленное количество, разряжая конденсатор через гальванометр. Этот метод предложили г-да Брайт (Bright) и Кларк (Clark) для испытания соединений в подводных кабелях.

355. Но самый простой метод, позволяющий измерить сопротивление такого проводника,— это зарядить конденсатор большой емкости, а затем соединить две его поверхности с электродами электрометра, а также с концами этого проводника. Если E — разность потенциалов, которую показывает электрометр, S — емкость конденсатора, Q — заряд на каждой из двух поверхностей, R — сопротивление проводника и x — ток в нем, то по теории конденсаторов $Q=SE$.

По Закону Ома $E=Rx$, и по определению тока $x=-(dQ/dt)$.

Отсюда — $Q=RS(dQ/dt)$ и $Q=Q_0e^{-t/(RS)}$, где Q_0 — заряд вначале,при $t=0$.

Аналогичным образом $E=E_0e^{-t/(RS)}$, где E_0 — начальный отсчет по шкале электрометра, а E — отсчет, сделанный после того, как пройдет время t.

Отсюда мы находим $R=t/\{S[\ln E_0-\ln E]\}$, что дает значение R в абсолютных единицах. Для пользования этим выражением не требуется знать цену деления по шкале электрометра.

Если емкость конденсатора S задана в электростатических единицах и равна определенному числу метров, то величина R также задана в электростатических единицах, как величина, обратная скорости.

Если емкость S задана в электромагнитных единицах, ее размерность есть T^2/L, а размерность R — скорость.

Поскольку сам конденсатор не является идеальным изолятором, необходимо провести два опыта. В первом мы определяем сопротивление R_0 самого конденсатора, а во втором — сопротивление конденсатора, когда к его поверхностям присоединен исследуемый проводник. Обозначим это сопротивление R'. Тогда сопротивление R проводника определяется соотношением

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R'}-\frac{1}{R_0}.$$

Этот метод был разработан г-дами Сименс.

Метод Томсона [6] *для определения сопротивления гальванометра*

356. Сэр У. Томсон с успехом применил устройство, подобное Мостику Уитстона, для того чтобы определить сопротивление гальванометра во время его действия. Наводящей идеей для сэра У. Томсона послужил метод Манса (Mance). См. п. 357.

Пусть на чертеже в п. 347 батарея, как и раньше, помещена между B и C, но гальванометр помещен не в OA, а в CA [рис. 37]. Если величина $b\beta-c\gamma$ равна нулю, то проводник OA сопряжен проводнику BC, и, поскольку батарея в BC не производит никакого тока в OA, сила тока в любом другом проводнике не зависит от сопротивления OA. Следовательно, если гальванометр помещен в CA, его отклонение будет оставаться тем же самым как при малом, так и при большом сопротивлении OA. Мы поэтому устанавливаем, являются ли показания гальванометра одинаковыми в случаях, когда O и A соединены проводником с малым сопротивлением и когда это соединение разорвано. Если мы получаем такой результат, подобрав нужным образом сопротивления проводников, мы знаем, что сопротивление гальванометра равно $b=(c\gamma)/\beta$, где c, γ и β — катушки сопротивления с известными величинами сопротивлений.

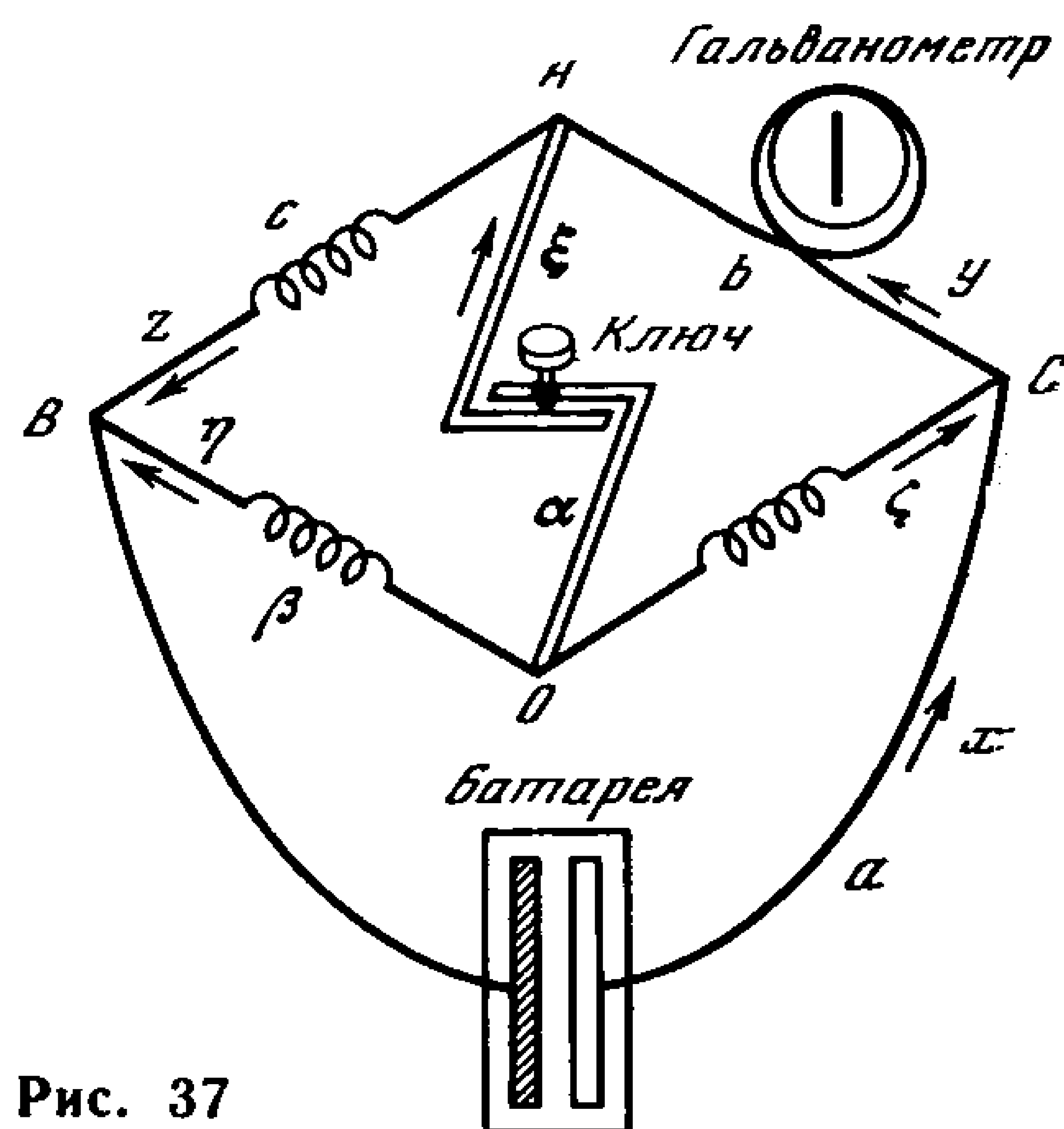


Рис. 37

Следует заметить, что хотя этот метод не является нулевым в смысле отсутствия тока в гальванометре, однако он является нулевым методом в том смысле,

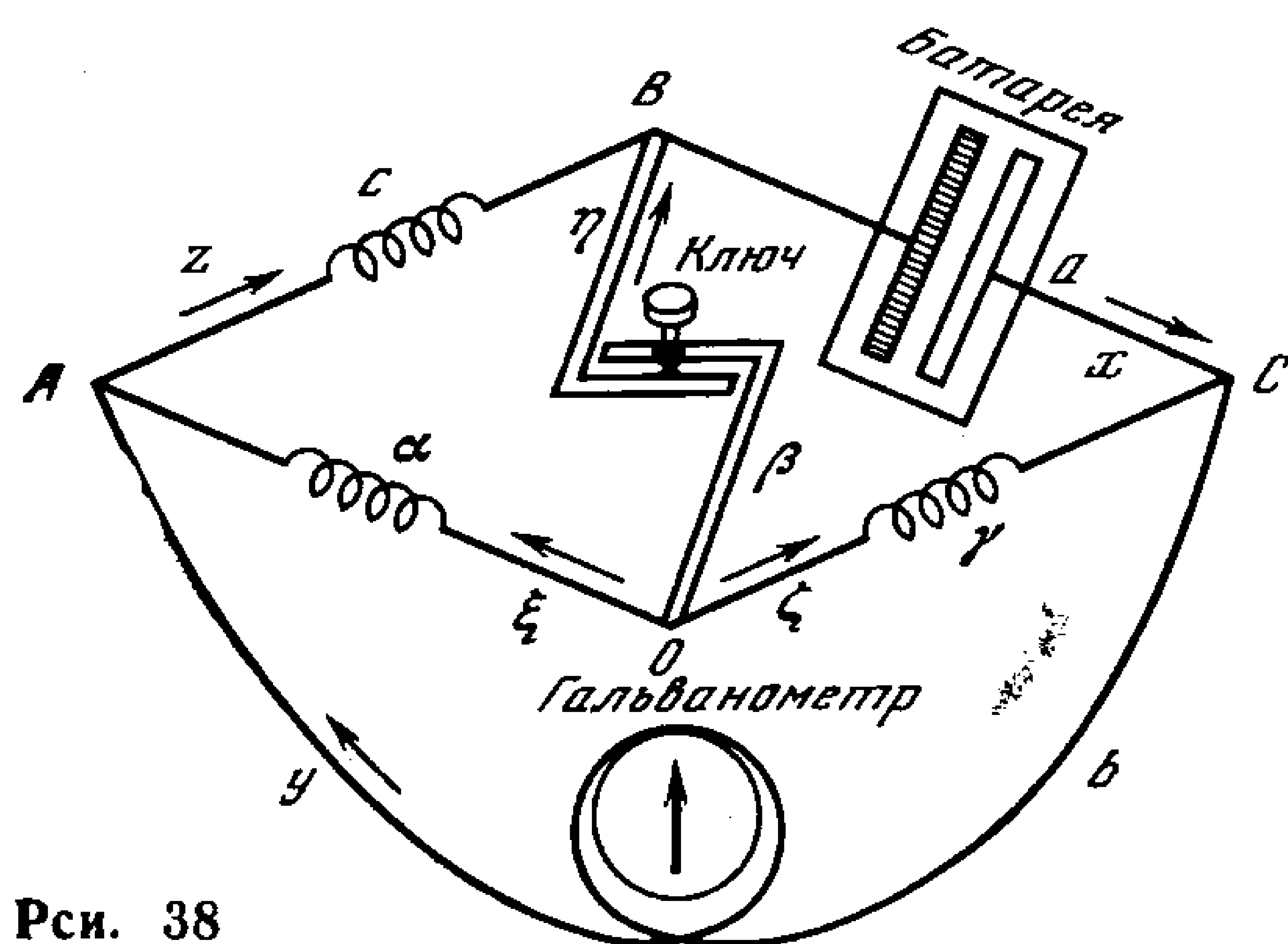
[6] *Proc. R. S.*, Jan. 19, 1871.

что наблюдаемый факт является негативным — отклонение гальванометра не меняется при замыкании определенного контакта. Наблюдение такого рода является более ценным, чем наблюдение равенства двух различных отклонений одного и того же гальванометра, потому что в последнем случае имеется время для изменения в силе батареи или в чувствительности гальванометра, если же отклонение остается неизменным, несмотря на то, что происходят определенные изменения, которые мы можем повторять по желанию, тогда мы уверены, что ток совершенно не зависит от этих изменений.

Определение сопротивления в катушке гальванометра легко можно выполнить обычным путем с помощью Мостика Уитстона, поместив другой гальванометр в OA. С помощью описанного здесь метода сам гальванометр используется для того, чтобы измерить свое собственное сопротивление.

Метод Манса [7] *определения сопротивления батареи*

357. Измерение сопротивления батареи во время ее работы представляет собой задачу намного более высокого порядка трудности, потому что сопротивление батареи, как оказалось, значительно меняется через некоторое время после того, как изменился текущий через нее ток. Во многих методах, обычно применяемых с целью измерить сопротивление батареи, указанные изменения силы тока через батарею происходят в процессе измерений, и поэтому полученные результаты сомнительны.



Рси. 38

В методе Манса, свободном от этого возражения, батарея помещается в BC, а гальванометр — в CA. После этого соединение между O и B попеременно замыкается и размыкается [рис. 38].

При этом отклонение стрелки гальванометра не будет изменяться, как бы ни менялось сопротивление OB, если только OB и AC сопряжены. Это можно рассматривать как частный случай результата, полученного в п. 347, или в этом можно убедиться непосредственно, исключив z и β из уравнений указанного раздела. Именно, мы тогда получаем

$$(a\alpha - c\gamma)x + (c\gamma + c\alpha + c\beta + b\alpha)y = E\alpha.$$

Если y не зависит от x, а потому и от β, мы должны иметь $a\alpha = c\gamma$. Таким образом, сопротивление батареи выражается через c, γ и α.

Если выполнено условие $a\alpha = c\gamma$, ток y через гальванометр определяется соотношением

$$y = \frac{E\alpha}{cb + \alpha(a+b+c)} = \frac{E\gamma}{ab + \gamma(a+b+c)}.$$

[7] *Proc. R. S.*, Jan. 19, 1871.

Для того чтобы испытать чувствительность этого метода, предположим, что соотношение $c\gamma=a\alpha$ выполнено не точно, а приближенно. Пусть ток через гальванометр в случае, когда O и B соединены проводником без заметного сопротивления, равен y_0, а в случае, когда O и B полностью разъединены, ток через гальванометр равен y_1.

Чтобы найти эти значения, мы должны в общей формуле для y положить $\beta=0$ и $\beta=\infty$, а затем сравнить результаты.

Общее значение для y таково: $\frac{c\gamma+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{D}E$, где D обозначает то же самое выражение, что и в п. 348. Полагая $\beta=0$, получаем

$$y_0=\frac{\gamma E}{ab+\gamma(a+b+c)+\frac{c(a\alpha-c\gamma)}{\alpha+c}}, \qquad =y+\frac{c(c\gamma-a\alpha)}{\gamma(c+\alpha)}\frac{y^2}{E} \text{ (приближенно)}.$$

Полагая $\beta=\infty$, получаем

$$y_1=\frac{E}{a+b+c+\frac{ab}{\gamma}-\frac{(a\alpha-c\gamma)b}{(\gamma+\alpha)\gamma}}, \qquad =y-\frac{b(c\gamma-a\alpha)}{\gamma(\gamma+\alpha)}\frac{y^2}{E}.$$

Из этих значений находим $\frac{y_0-y_1}{y}=\frac{\alpha}{\gamma}\frac{c\gamma-a\alpha}{(c+\alpha)(\alpha+\gamma)}$.

Сопротивление c проводника AB должно быть равно сопротивлению батареи a; сопротивления α и γ должны быть равны и настолько малы, насколько возможно; наконец, сопротивление b должно быть равно $a+\gamma$.

Поскольку гальванометр наиболее чувствителен при малых отклонениях, перед замыканием контакта между O и B мы должны с помощью закрепленных магнитов довести его стрелку почти до нуля.

В этом методе измерения сопротивления батареи ток в гальванометре никак не влияет на процесс измерения, и мы, таким образом, можем определить сопротивление батареи при любой заданной силе тока в гальванометре и тем самым определить, как сила тока влияет на сопротивление.

Если ток через гальванометр равен y, а ток, текущий через батарею, равен x_0 при замкнутом ключе и x_1 при разомкнутом, где

$$x_0=y\left(1+\frac{b}{\gamma}+\frac{ac}{\gamma(\alpha+c)}\right), \qquad x_1=y\left(1+\frac{b}{\alpha+\gamma}\right),$$

то сопротивление батареи равно $a=(c\gamma)/\alpha$, а электродвижущая сила батареи равна

$$E=y(b+c+(c/\alpha)(b+\gamma)).$$

Метод, по которому в п. 356 определялось сопротивление гальванометра, отличается от этого только тем, что контакт замыкается и размыкается между O и A, а не между O и B, и мы можем, поменяв местами α и β, a и b, получить для этого случая

$$\frac{y_0-y_1}{y}=\frac{\beta}{\gamma}\frac{c\gamma-b\beta}{(c+\beta)(\beta+\gamma)}.$$

О сравнении электродвижущих сил

358. Нижеследующий метод сравнения электродвижущих сил вольтовых и термоэлектрических устройств, при котором через них не проходит токов, нуждается только в наборе катушек сопротивления и в батарее постоянного тока.

Пусть электродвижущая сила E батареи больше, чем электродвижущая сила любого из сравниваемых источников электричества, тогда, если между точками A_1 и B_1 первичной цепи EB_1A_1E вставлено достаточное сопротивление R_1, электродвижущая сила от B_1 до A_1 может быть сделана равной электродвижущей силе источника электричества E_1 [рис. 39]. Если теперь электроды этого источника электричества соединить с точками A_1 и B_1, то через этот источник не будет течь никакого тока.

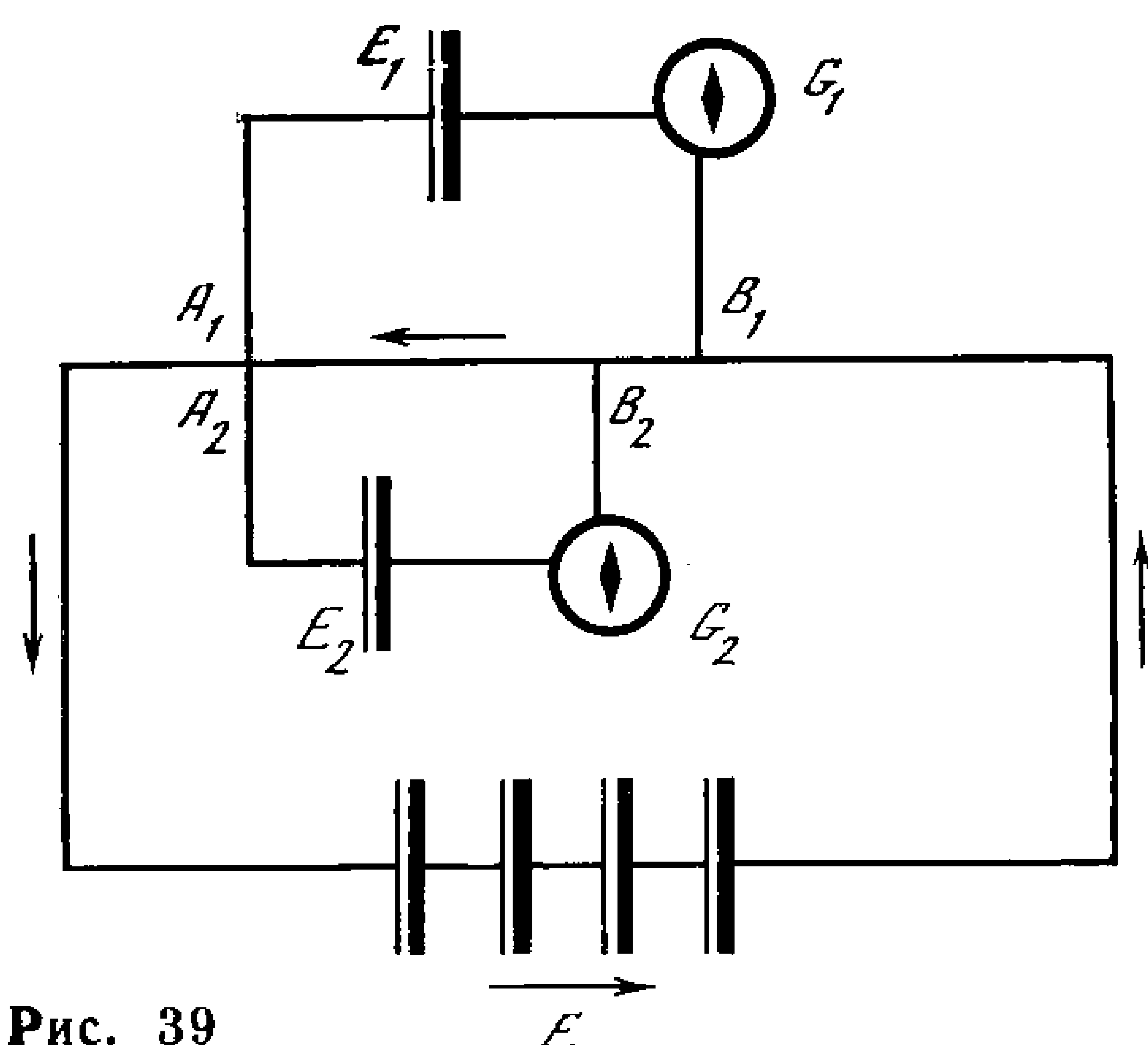


Рис. 39

Поместив гальванометр G_1 в цепь источника тока E_1 и подбирая сопротивление между A_1 и B_1 до тех пор, пока не прекратится ток через гальванометр G_1, мы получаем уравнение $E_1 = R_1C$, где R_1 — сопротивление между A_1 и B_1, а C — сила тока в первичной цепи.

Тем же путем, взяв второй источник тока и поместив его электроды в точках A_2 и B_2 таким образом, что гальванометр G_2 не отмечает тока, мы получим $E_2 = R_2C$, где R_2 — сопротивление между A_2 и B_2. Если показания гальванометров G_1 и G_2 наблюдаются одновременно, значение C тока в первичном контуре является одним и тем же в обоих уравнениях, и мы находим $E_1 : E_2 = R_1 : R_2$.

Таким путем можно сравнить электродвижущие силы двух источников. Абсолютная электродвижущая сила источника может быть измерена или электростатически, с помощью электрометра, или электромагнитно, с помощью абсолютного гальванометра.

Этот метод, в котором во время сравнения не идет ток ни через один из источников, представляет собой содификацию метода Поггендорфа и предложен г-ном Латимером Кларком, который вывел следующие значения электродвижущих сил:

					Концентрированный раствор		Вольты
Даниэль	I.	Амальгамированный	цинк	$H_2SO_4 + 4$ aq.	$CuSO_4$	Медь	1,079
»	II.	»	»	$H_2SO_4 + 12$ aq.	$CuSO_4$	Медь	0,978
»	III.	»	»	$H_2SO_4 + 12$ aq.	$Cu(NO_3)_2$	Медь	1,00
Бунзен	I.	»	»	» »	HNO_3	Углерод	1,964
Бунзен	II.	»	»	» »	Уд. вес 1,38	Углерод	1,888
Гроув		»	»	$H_2SO_4 + 4$ aq.	HNO_3	Платина	1,956

Один вольт есть электродвижущая сила, равная 100 000 000 *единиц в системе сантиметр-грамм-секунда.*

ГЛАВА XII

ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ВЕЩЕСТВ

359. Различные вещества по отношению к прохождению через них электричества мы можем разбить на три класса.

Первый класс содержит все металлы и их сплавы, некоторые соединения серы и другие соединения, содержащие металлы, к которым мы должны добавить углерод в виде кокса и селен в кристаллической форме.

Во всех этих веществах прохождение тока происходит без какого бы то ни было разложения или изменения химической природы вещества как внутри, так и там, где ток входит и выходит из тела. Во всех этих веществах сопротивление растет по мере того, как температура повышается.

Второй класс состоит из веществ, которые называются электролитами, потому что ток связан с разложением этих веществ на две компоненты, которые появляются у электродов. Как правило, вещество является электролитом только в жидкой фазе, хотя некоторые коллоидные вещества, как, например, стекло при 100°С, которые кажутся твердыми, представляют собой электролиты. Из экспериментов сэра Б. Броди (B. C. Brodie) вытекает, что в некоторых газах можно вызвать электролиз с помощью мощной электродвижущей силы.

Во всех веществах, которые проводят электролитически, сопротивление уменьшается с ростом температуры.

Третий класс состоит из веществ, сопротивление которых настолько велико, что только с помощью наиболее тонких методов можно определить прохождение электричества через эти вещества. Они называются Диэлектриками. К этому классу принадлежит значительное количество твердых тел, многие из которых в расплавленном состоянии являются электролитами, как, например, скипидар, нефть, расплавленный парафин и т. д., а также все газы и пары. К этому классу относятся углерод в виде алмаза и селен в аморфной форме.

Сопротивление этого класса тел огромно в сравнении с сопротивлением металлов. Оно уменьшается с ростом температуры. Из-за огромного сопротивления этих веществ трудно определить, связан или нет с электролизом тот ничтожный ток, который мы можем вызвать в этих телах.

Об электрическом сопротивлении металлов

360. Нет такого раздела электрических исследований, в котором были бы проведены более многочисленные и более точные эксперименты, чем при определении сопротивления металлов. Для электрической телеграфии необычайно важно, чтобы металл, из которого сделаны провода, имел наименьшее возможное сопротивление. Поэтому перед выбором материала должны быть проведены измерения сопротивления. Если в линии возникнет какая-либо неисправность, ее местоположение сразу устанавливается с помощью измерений сопротивления, а эти измерения, в которых ныне занято так много лиц, требуют использования катушек сопротивления, сделанных из металла, электрические свойства которого тщательно исследованы.

Электрические свойства металлов и их сплавов были с большой тщательностью исследованы г-дами Матиссеном (Matthiessen), Фогтом (Vogt) и Хоккином (Hockin), а также г-дами Сименс, которые так много сделали для того, чтобы внедрить точные электрические измерения в практику.

Из исследований д-ра Матиссена вытекает, что влияние температуры на сопротивление оказывается примерно одинаковым для большого числа *чистых* металлов, причем сопротивление при 100°С относится к сопротивлению при 0°С, как 1,414 относится к 1,000, или 100 к 70,7. Для чистого железа это отношение равно 1,6197, а для чистого таллия 1,458.

Д-р К. В. Сименс [1] наблюдал сопротивление металлов в гораздо более широком интервале температур, простирающемся от точки замерзания до 350°С, а в некоторых случаях до 1000°С. Он находит, что сопротивление возрастает с ростом температуры, но скорость возрастания уменьшается по мере роста температуры. Формула, которая, по его мнению, очень тесно согласуется и с результатами д-ра Матиссена, измерявшего сопротивления при низких температурах, и с его собственными измерениями в интервале 1000°С, такова: $r=\alpha T^{1/2}+\beta T+\gamma$, где T — абсолютная температура, отсчитываемая от —273°С, α, β и γ — постоянные. Таким образом,

для платины $r=0{,}039\,369\ T^{1/2}+0{,}002\,164\,07\ T\ -0{,}241\,3$;

для меди $r=0{,}026\,577\ T^{1/2}+0{,}003\,144\,3\ T\ -0{,}227\,51$;

для железа $r=0{,}072\,545\ T^{1/2}+0{,}003\,813\,3\ T\ -1{,}239\,71$.

Из этих данных можно определить температуру в печи, наблюдая сопротивление платиновой проволоки, помещенной в печь.

Д-р Матиссен обнаружил, что если два металла образуют сплав, сопротивление этого сплава в большинстве случаев оказывается больше, чем то, которое вычисляется по сопротивлению и относительному содержанию составляющих металлов. В случае сплавов золота и серебра сопротивление сплава оказывается больше, чем сопротивление и чистого золота, и чистого серебра, и при изменении в определенных пределах относительного содержания составляющих, оно очень мало меняется при незначительном изменении пропорции. В связи с этим д-р Матиссен предложил для воспроизведения единицы сопротивления сплав из двух частей золота и одной части серебра.

Как правило, влияние изменений температуры на сопротивление оказывается меньше в сплавах, чем в чистых металлах.

Поэтому обычные катушки сопротивления изготовляются из нейзильбера (мельхиора) из-за большой величины его сопротивления и малых изменений с температурой.

Сплав серебра и платины также используется для стандартных катушек.

361. Электрическое сопротивление некоторых металлов меняется после отжига. Поэтому, пока провод не испытан повторным нагреванием до высокой температуры и не установлено, что это не приводит к стойким изменениям сопротивления, на этот провод нельзя полагаться как на меру сопротивления. Некоторые провода изменяют сопротивление с течением времени, не подвергаясь изменениям температуры. Поэтому важно установить удельное сопротивление ртути — металла,

[1] *Proc. R. S.*, April 27, 1871.

который, будучи жидким, имеет всегда одно и то же молекулярное строение и который легко может быть очищен дистилляцией и воздействием азотной кислоты. Большая тщательность была проявлена в определении сопротивления этого металла В. и К. Ф. Сименсами, которые ввели эту величину как стандарт. Их исследования были дополнены исследованиям Матиссена и Хоккина.

Удельное сопротивление ртути определялось по наблюдаемому сопротивлению трубки длиной l, содержащей ртуть массы w.

Не существует стеклянных трубок, у которых диаметр канала был бы одинаков по всей длине, но если небольшое количество ртути введено в трубку и занимает область длиной λ, средняя точка которой удалена от одного конца трубки на расстояние x, то площадь s сечения около этой точки будет равна $s=(C/\lambda)$, где C — некоторая постоянная.

Масса ртути, которая заполняет всю трубку, равна $w=\rho\int s\,dx=\rho C\Sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{l}{n}$, где n — число точек, находящихся на равном расстоянии друг от друга вдоль трубки, в которых измерена величина λ, а ρ — масса единицы объема.

Сопротивление всей трубки равно $R=\int\frac{r}{s}dx=\frac{r}{C}\Sigma(\lambda)\frac{l}{n}$, где r — удельное сопротивление на единицу объема. Отсюда

$$wR=r\rho\Sigma(\lambda)\Sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{l^2}{n^2} \quad \text{и} \quad r=\frac{wR}{\rho l^2}\cdot\frac{n^2}{\Sigma(\lambda)\Sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

дает удельное сопротивление единицы объема.

Чтобы найти сопротивление единицы длины и единицы массы, мы должны умножить это выражение на плотность.

Из опытов Матиссена и Хоккина следует, что сопротивление однородного столба ртути при 0°С длиной в один метр и весом в один грамм равно 13,071 единиц В. А. Отсюда следует, что если удельный вес ртути равен 13,595, то сопротивление столба длиной в один метр и сечением в один квадратный миллиметр равно 0,96146 единиц В. А.

362. В следующей таблице R — сопротивление в единицах В. А. столба длиною в один метр и весом в один грамм при 0°С, r — сопротивление в сантиметрах, деленных на секунду, куба с ребром в один сантиметр. Приводимые данные получены в опытах Матиссена [2], принято, что единица В. А. равна 0,98677 от квадранта большого круга Земли.

	Удельный вес		R	r	Возрастание в % на 1°С при 20°С
Серебро	10,50	Холоднотянутое	0,1689	1 588	0,377
Медь	8,95	Холоднотянутая	0,1469	1 620	0,388
Золото	19,27	Холоднотянутое	0,4150	2 125	0,365
Свинец	11,391	Прессованный	2,257	19 584	0,387
Ртуть	13,595	Жидкая	13,071	94 874	0,072
Золото 2, Серебро 1	15,218	Твердое или отожженное	1,668	18 326	0,065
Селен при 100°С		Кристаллическая форма		6×10^{13}	1,00

[2] *Phil. Mag.*, May, 1865.

Об электрическом сопротивлении электролитов

363. Измерение электрического сопротивления электролитов затрудняется из-за поляризации электродов, которая приводит к тому, что наблюдаемая разность потенциалов металлических электродов оказывается больше, чем электродвижущая сила, которая в действительности вызывает ток.

Эту трудность можно преодолеть разными способами. В некоторых случаях мы можем избавиться от поляризации, используя электроды из подходящего материала, как, например, цинковые электроды в растворе сульфата цинка. Если сделать поверхность электродов очень большой в сравнении с сечением той части электролита, сопротивление которой нужно измерить, и использовать только токи малой длительности, идущие попеременно в противоположных направлениях, можно провести измерения до того, как прохождение тока вызовет заметную напряженность поляризации.

Наконец, проведя два разных опыта, в одном из которых путь тока через электролит намного длиннее, чем в другом, и подбирая электродвижущую силу так, чтобы протекающий ток и время, в течение которого он идет, были бы в каждом случае почти одинаковы, мы можем совсем исключить влияние поляризации.

364. В опытах, которые провел д-р Паальцов (Paalzow) [3], электроды, имевшие форму больших дисков, были помещены в отдельные плоские сосуды, наполненные электролитом, а соединение осуществлялось с помощью длинного сифона, наполненного электролитом и погруженного в оба сосуда. Применялись два таких сифона разной длины.

Наблюдаемые сопротивления электролита в этих сифонах равны R_1 и R_2. После измерений сифоны заполнялись ртутью. Сопротивления сифонов, заполненных ртутью, оказались равными R'_1 и R'_2.

Отношение сопротивления электролита к сопротивлению некоторой массы ртути той же формы при 0°С определялось затем по формуле $\rho=(R_1-R_2)/(R'_1-R'_2)$.

Чтобы вывести из этих значений ρ сопротивление одного сантиметра в длину, имеющего сечение в квадратный сантиметр, мы должны умножить их на величину r для ртути при 0°С. См. п. 361.

Паальцов приводит следующие результаты:

Смеси серной кислоты и воды

	Темп. °С	Сопротивление в сравнении со ртутью
H_2SO_4	15°С	96 950
$H_2SO_4+14H_2O$	19	14 157
$H_2SO_4+13H_2O$	22	13 310
$H_2SO_4+499H_2O$	22	184 773

Сульфат цинка и вода

$ZnSO_4+33H_2O$	23°С	194 400
$ZnSO_4+24H_2O$	23	191 000
$ZnSO_4+107H_2O$	23	354 000

	Темп. °С	Сопротивление в сравнении со ртутью
Сульфат меди и вода		
$CuSO_4+45H_2O$	22°С	202 410
$CuSO_4+105H_2O$	22	339 341
Сульфат магния и вода		
$MgSO_4+45H_2O$	22°С	199 180
$MgSO_4+107H_2O$	22	324 600
Соляная кислота и вода		
$HCl+15H_2O$	23°С	13 626
$HCl+500H_2O$	23	86 679

[3] *Berlin, Monatsbericht*, July, 1868.

365. Г-да Кольрауш (F. Kohlraush) и Нипподьдт (W. A. Nippoldt)[4] определили сопротивление смесей серной кислоты и воды. Они использовали переменные магнитоэлектрические токи, электродвижущая сила которых менялась от ½ до 1/74 от электродвижущей силы элемента Гроува, а с помощью термоэлектрической пары медь — железо они уменьшили электродвижущую силу до 1/429000 от электродвижущей силы элемента Гроува. Они нашли, что закон Ома применим к этому электролиту во всей области значений этих электродвижущих сил.

Сопротивление минимально в смеси, содержащей приблизительно одну треть серной кислоты.

Сопротивление электролитов уменьшается с ростом температуры. Процентное возрастание проводимости при нагревании на 1°С дано в таблице [с. 399].

Сопротивление смесей серной кислоты и воды при 22°С, выраженное через сопротивление ртути при 0°С.
Г-да Кольрауш и Нипподьдт

Удельный вес при 18,5°	Процент H_2SO_4	Сопротивление при 22°С (Hg=1)	Процент возрастания проводимости на 1°С	Удельный вес при 18,5°	Процент H_2SO_4	Сопротивление при 22°С (Hg=1)	Процент возрастания проводимости на 1°С
0,9985	0,0	746 300	0,47	1,2631	35,2	13 132	1,259
1,00	0,2	465 100	0,47	1,3163	41,5	14 286	1,410
1,0504	8,3	34 530	0,653	1,3597	46,0	15 762	1,674
1,0989	14,2	18 946	0,646	1,3994	50,4	17 726	1,582
1,1431	20,2	14 990	0,799	1,4482	55,2	20 796	1,417
1,2045	28,0	13 133	1,317	1,5026	60,3	25 574	1,794

Об электрическом сопротивлении диэлектриков

366. Было проведено большое число измерений сопротивления гуттаперчи и других материалов, используемых для изоляции при изготовлении телеграфных кабелей. Измерения проводились с целью оценить качества этих материалов как изоляторов.

Как правило, материал подвергался испытанию после того, как из него изготовлялось покрытие для проводящего провода. Сам провод служил электродом, а вода в баке, куда был погружен кабель, служила другим электродом. Таким образом, ток проходил через цилиндрическое покрытие из изоляторов, имевшее большую площадь и малую толщину.

Найдено, что, когда электродвижущая сила начинает действовать, ток, как показывает гальванометр, ни в коей мере не является постоянным. Первое воздействие, конечно, представляет собой переходный ток значительной величины, причем полное количество электричества оказывается таким, какое требуется для зарядки поверхностей изолятора поверхностным распределением электри-

[4] Pogg. *Ann.*, CXXXVIII, p. 280, 370, 1869.

чества, соответствующим этой электродвижущей силе. Поэтому этот первый ток является мерой не проводимости, а емкости изолирующего слоя.

Но даже после того, как этот ток затухает, остаточный ток не является постоянным и не указывает на настоящую проводимость вещества. Найдено, что ток продолжает уменьшаться в течение по меньшей мере получаса, и, таким образом, определение сопротивления по току дает большую величину в случае, если подождать некоторое время, по сравнению со случаем, когда измерение производится немедленно по включении батареи.

Например, для изолирующего материала Хупера (Hooper) сопротивление, определенное через десять минут, оказалось в четыре раза больше, а через девятнадцать часов — в двадцать три раза больше, чем сопротивление, измеренное по истечении одной минуты. Если направление электродвижущей силы меняется, сопротивление падает так же низко, как сначала, или ниже, а затем постепенно возрастает.

Эти явления, по-видимому, вызваны тем свойством гуттаперчи, которое за неимением лучшего названия мы можем назвать поляризацией и которое мы можем сравнить, с одной стороны, со свойством последовательно соединенных заряжаемых Лейденских банок, а с другой стороны, со свойством вторичной батареи Риттера, п. 271.

Если некоторое число лейденских банок большой емкости соединить последовательно с помощью проводников, обладающих большим сопротивлением (как, например, влажные хлопчатые нити в опытах г-на Гогена (Gaugain)), то действующая на эту последовательность электродвижущая сила вызывает ток, отмечаемый гальванометром; ток будет постепенно падать, пока банки полностью не зарядятся.

Наблюдаемое сопротивление такой последовательности будет возрастать, и если диэлектрик в банках является идеальным изолятором, сопротивление будет возрастать неограниченно. Если отключить электродвижущую силу и соединить концы последовательности, будет наблюдаться обратный ток, полное количество которого в случае идеальной изоляции будет тем же самым, что и для прямого тока. Аналогичные явления наблюдаются и в случае вторичной батареи, с той разницей, что конечная изоляция не столь хороша, а емкость на единицу поверхности неизмеримо больше.

В случае кабеля, покрытого гуттаперчей и т. п., обнаружено, что если батарея включена в течение получаса, а затем провод соединяется с внешним электродом, возникает обратный ток, который идет в течение некоторого времени и постепенно приводит систему к ее первоначальному состоянию.

Эти явления имеют ту же природу, что и те, которые были названы «остаточным разрядом» лейденской банки, за исключением того, что степень поляризации оказывается гораздо больше в гуттаперче и т. п., чем в стекле.

Это состояние поляризации, по-видимому, является направленным свойством вещества, для возникновения которого требуется не только электродвижущая сила, но и прохождение значительного количества электричества путем смещения или иным способом, и это прохождение требует значительного времени. Когда поляризованное состояние установилось, имеется внутренняя электродвижущая сила, действующая на вещество в обратном направлении, которая существует либо до тех пор, пока не создаст обратного тока, равного первому по общему коли-

честву, либо до тех пор, пока состояние поляризации спокойно не исчезнет из-за истинного прохождения тока через вещество.

Полная теория того, что названо остаточным разрядом, поглощением электричества, электризацией или поляризацией, требует тщательного исследования и, по-видимому, приведет к важным открытиям, относящимся к внутреннему строению тел.

367. Сопротивление большей части диэлектриков уменьшается с ростом температуры.

Например, сопротивление гуттаперчи при 0°C приблизительно в двадцать раз больше, чем при 24°C. Господа Брайт и Кларк обнаружили, что следующая формула дает результаты, которые согласуются с их опытами. Если сопротивление гуттаперчи при температуре T по шкале Цельсия равно r, то сопротивление при температуре $T+t$ будет равно $R=r\times C^t$, где C для различных образцов гуттаперчи заключено между 0,8878 и 0,9.

Г-н Хоккин установил любопытный факт: после того как гуттаперча приняла свою окончательную температуру, сопротивление достигает своего соответствую щего значения не раньше, чем через несколько часов.

Влияние температуры на сопротивление каучука оказывается не столь большим, как в случае гуттаперчи.

Сопротивление гуттаперчи значительно возрастает под действием давления.

Сопротивление в Омах кубического метра разных образцов гуттаперчи, использованных в различных кабелях, равно следующим величинам [5]:

Название кабеля	
Красное море	$0{,}267\cdot10^{12}$ до $0{,}362\cdot10^{12}$
Мальта — Александрия	$1{,}23\cdot10^{12}$
Персидский залив	$1{,}80\cdot10^{12}$
Второй атлантический	$3{,}42\cdot10^{12}$
Персидский залив, сердечник Хупера	$7{,}47\cdot10^{12}$
Гуттаперча при 24°C	$3{,}53\cdot10^{12}$

368. Следующая таблица составлена на основе опытов Баффа (Buff), описанных в п. 271. Она показывает сопротивление в Омах одного кубического метра стекла при различных температурах:

Температура, °C	*Сопротивление*	*Температура*, °C	*Сопротивление*
200	227 000	350	1035
250	13 900	400	735
300	1 480		

369. М-р Варлей [6] исследовал недавно свойства тока, идущего через разреженные газы. Он находит, что электродвижущая сила E складывается из некоторой постоянной величины E_0 и части, зависящей от тока по закону Ома, т. е. $E=E_0+$ $+RC$.

Например, электродвижущая сила, которая требуется для того, чтобы через

[5] Jenkin's *Cantor Lectures*.
[6] *Proc. R. S.*, Jan. 12, 1871.

некоторую трубку начал проходить ток, равнялась электродвижущей силе 323 элементов Даниэля, но для поддержания этого тока достаточно было электродвижущей силы 304 элементов Даниэля. Сила тока, измеренная гальванометром, была пропорциональна числу элементов сверх 304. Так, для 305 элементов отклонение равнялось 2, для 306 оно было равно 4, для 307 отклонение равнялось 6 и т. д. до 380, или 304+76, при этом отклонение равнялось 150, т. е. 76×1,97.

Из этих опытов явствует, что существует некий род поляризации электродов и соответствующая электродвижущая сила равна электродвижущей силе 304 элементов Даниэля; вплоть до этого значения электродвижущей силы батарея занята созданием этого состояния поляризации. После того как создана максимальная поляризация, избыток электродвижущей силы над той, какую дают 304 элемента Даниэля, идет на поддержание тока в соответствии с законом Ома.

Закон тока в разреженном газе, таким образом, очень похож на закон тока в электролите, в котором нам следует учесть поляризацию электродов.

В связи с этим вопросом следует обдумать результат Томсона, показавшего, что электродвижущая сила, потребная для создания искры в воздухе, оказалась пропорциональной не расстоянию, а расстоянию плюс некоторая постоянная величина. Электродвижущая сила, отвечающая этой постоянной величине, может рассматриваться как мера поляризации электродов.

370. Г-да Видеман и Рюльман (Rühlmann) недавно [7] исследовали прохождение электричества через газы. Электрический ток создавался машиной Гольца, а разряд происходил между двумя сферическими электродами в металлическом сосуде, содержащем разреженный газ. Разряд был, как правило, прерывистым, и промежуток времени между двумя последовательными разрядами измерялся с помощью зеркала, вращавшегося вместе с осью машины Гольца. Изображения последовательности разрядов наблюдались через гелиометр с разрезанным объективом, который регулировался так, чтобы одно изображение каждого разряда совпадало с другим изображением следующего разряда. Этим методом были получены хорошо согласующиеся результаты. Было найдено, что количество электричества в каждом разряде не зависит от силы тока и от материала электродов, а зависит от природы и плотности газа, от формы электродов и от расстояния между ними.

Эти исследования подкрепляют утверждение Фарадея [8], что электрическое натяжение, требуемое для того, чтобы вызвать пробойный разряд, возникающий на электризованной поверхности проводника, оказывается немного меньше в случае отрицательной электризации, чем в случае положительной. Но если разряд имеет место, то гораздо больше электричества проходит при каждом разряде, если он начинается на положительной поверхности. Они также, по-видимому, поддерживают предположение, высказанное в п. 57, что слой газа, сгущенного на поверхности электрода, играет важную роль в этом явлении, и они указывают, что это сгущение является наибольшим у положительного электрода.

КОНЕЦ ТОМА I.

[7] *Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft*, Leipzig, Oct. 20, 1871.

[8] *Exp. Res.*, 1501.

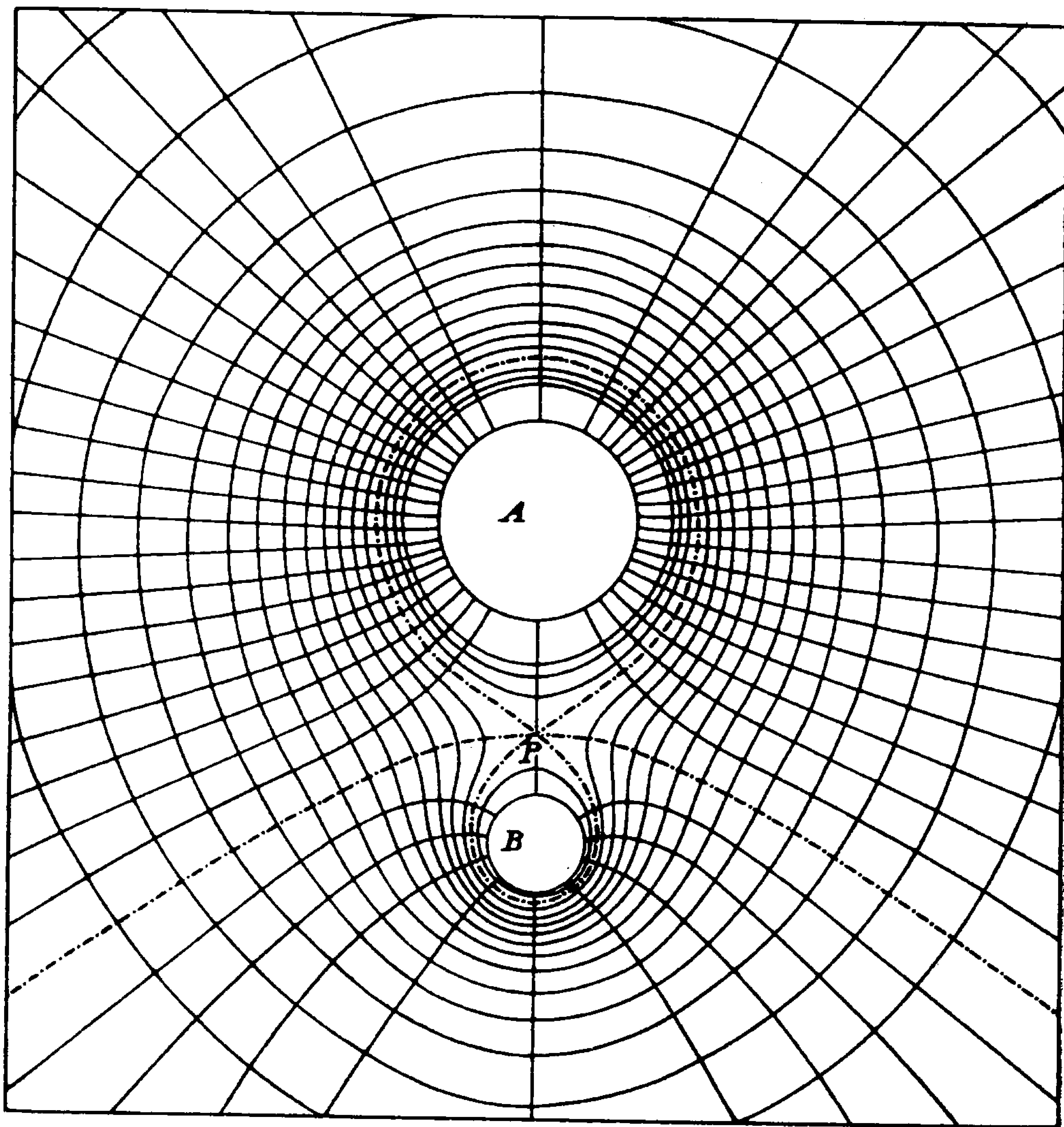


Рис. I, п. 118. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

$A = 20$, $B = 5$, $P =$ точка равновесия, $AP = \frac{2}{3} AB$

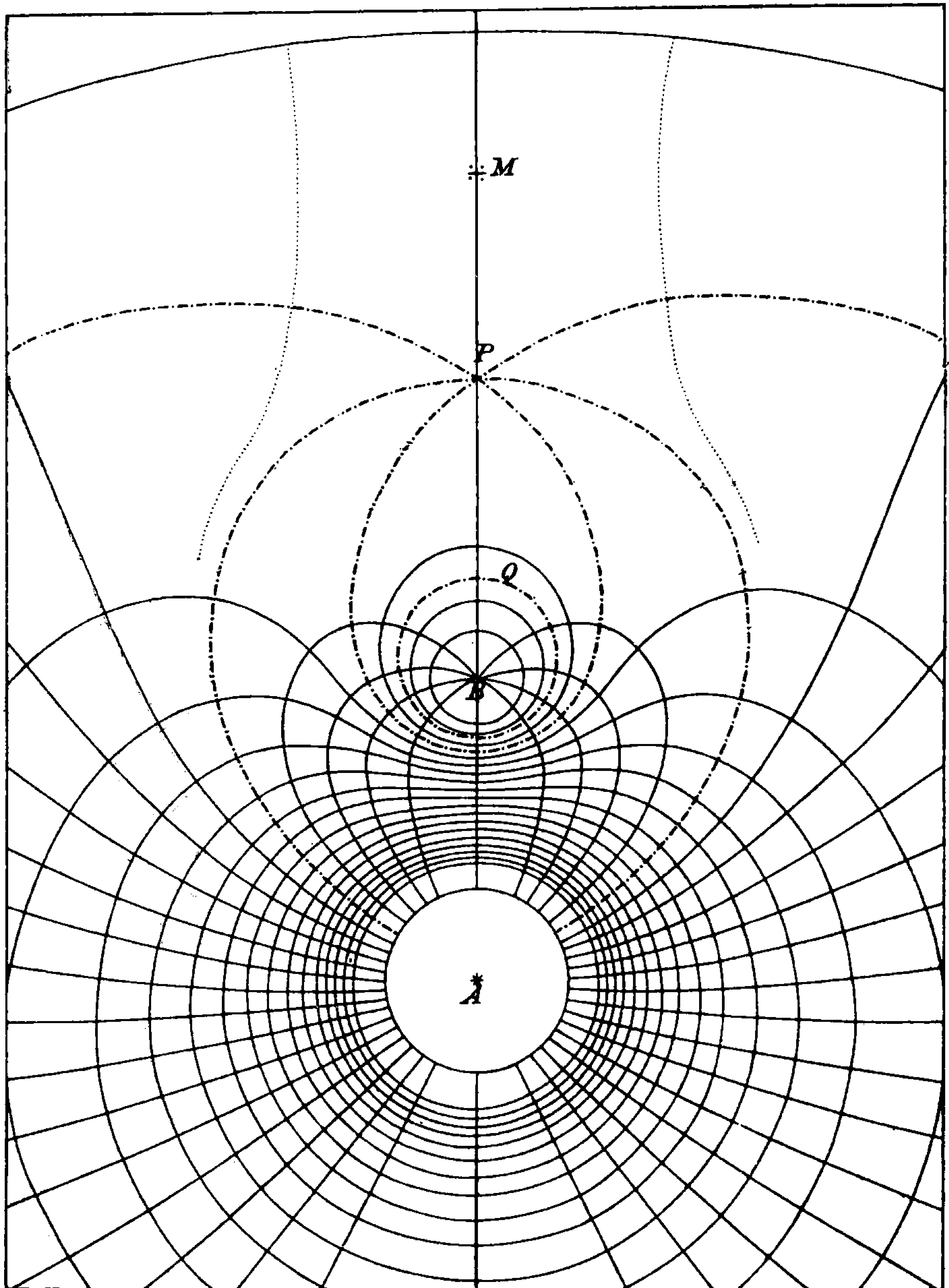


Рис. II, п. 119. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

$A=20$, $B=-5$, P — точка равновесия, $AP=2AB$, Q — сферическая поверхность нулевого потенциала, M — точка максимума силы вдоль оси. Пунктирная кривая — силовая линия $\Psi=0,1$

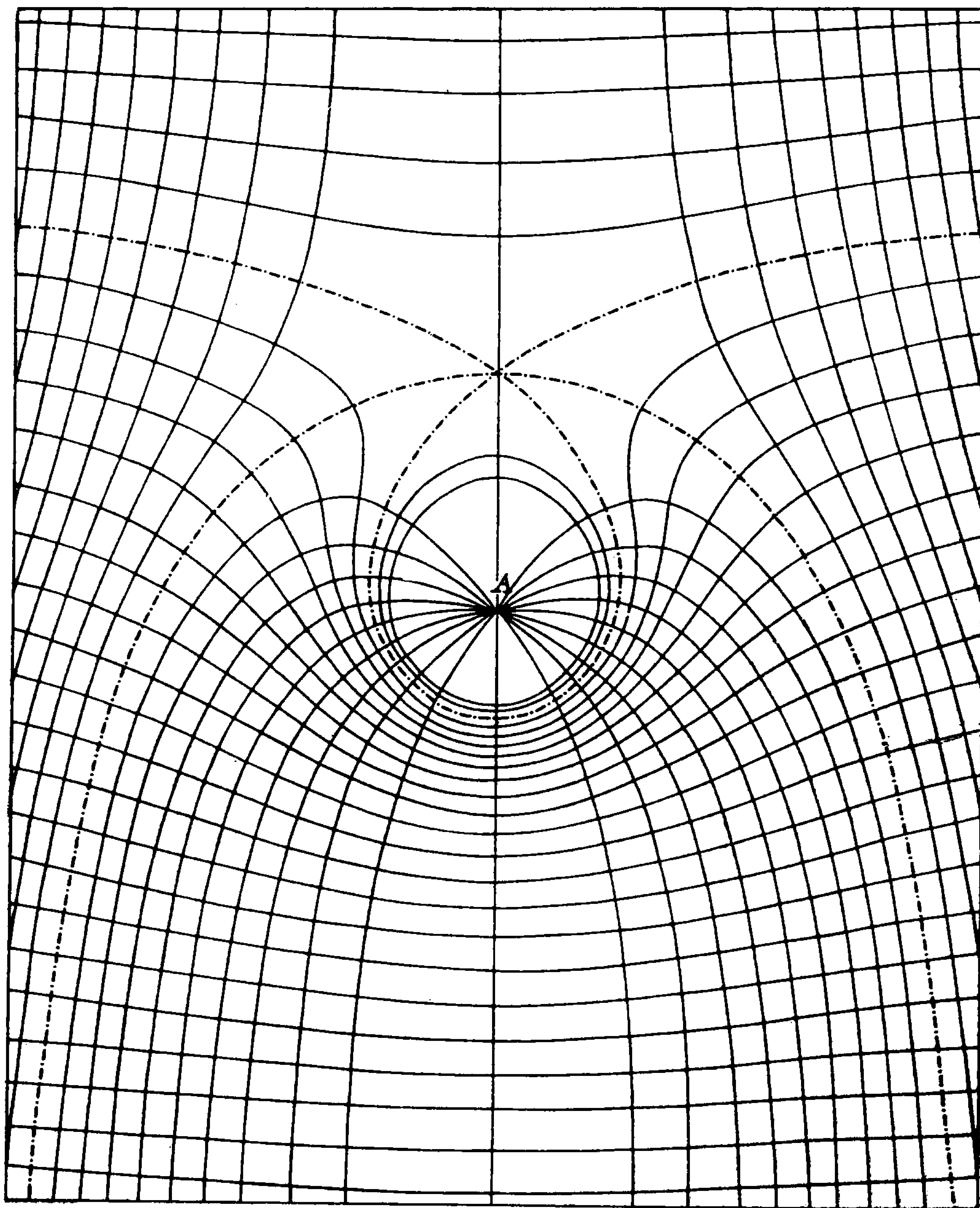


Рис. III, п. 120. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности $A=10$

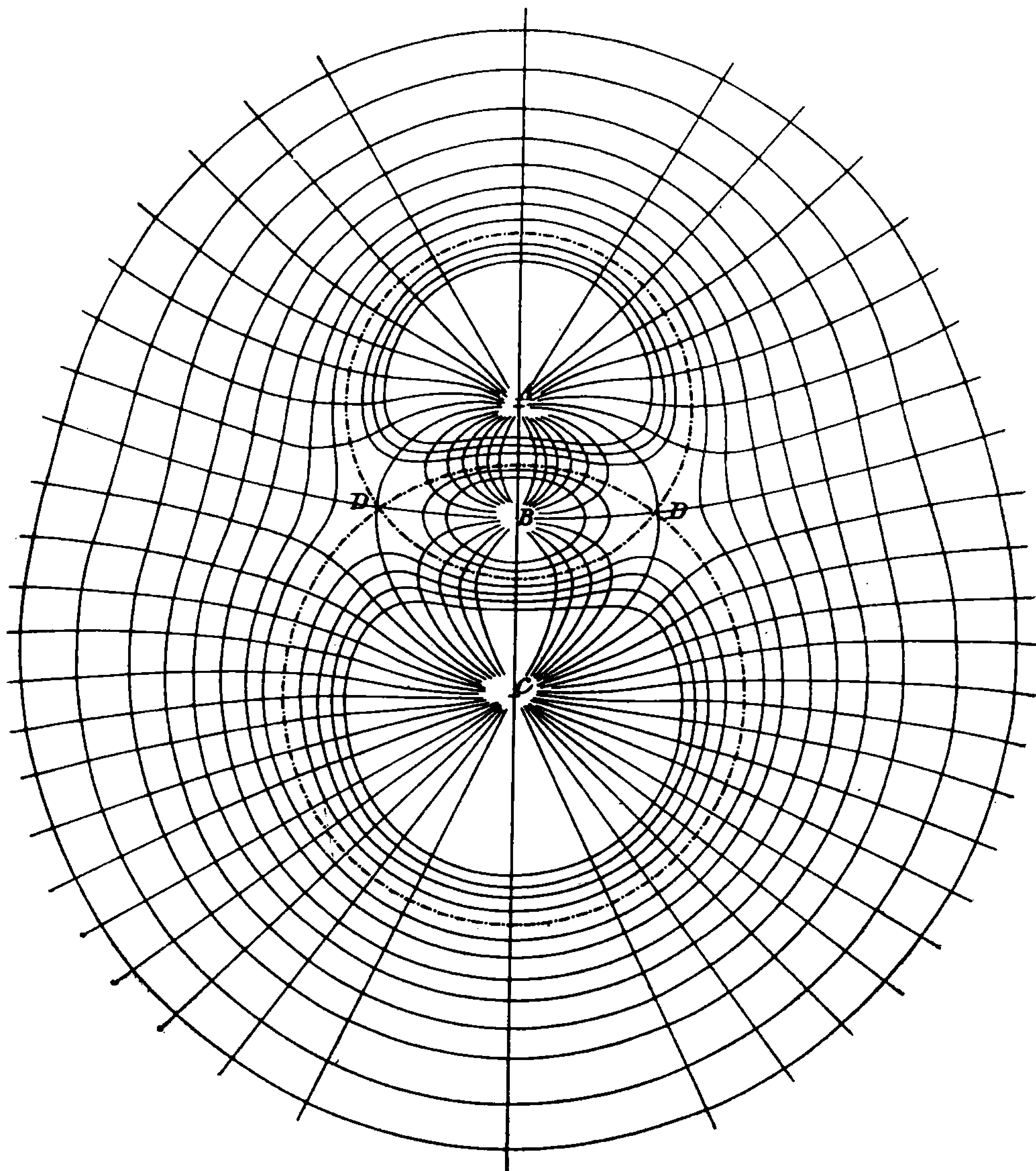


Рис. IV, п. 121. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности $A=15$, $B=12$, $C=20$

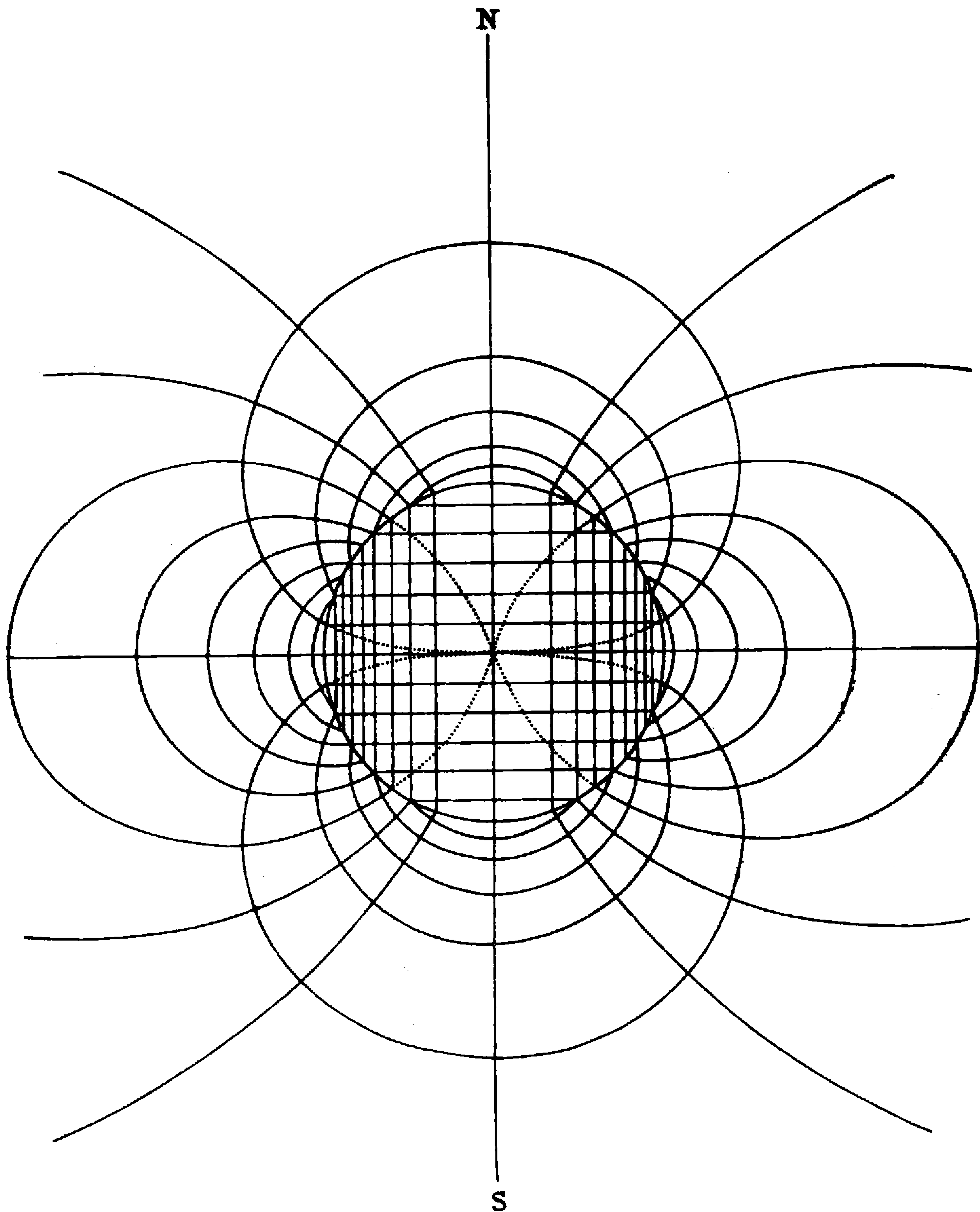


Рис. V, п. 143. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности в диаметральном сечении для сферической поверхности, на которой поверхностная плотность описывается сферической гармоникой первой степени

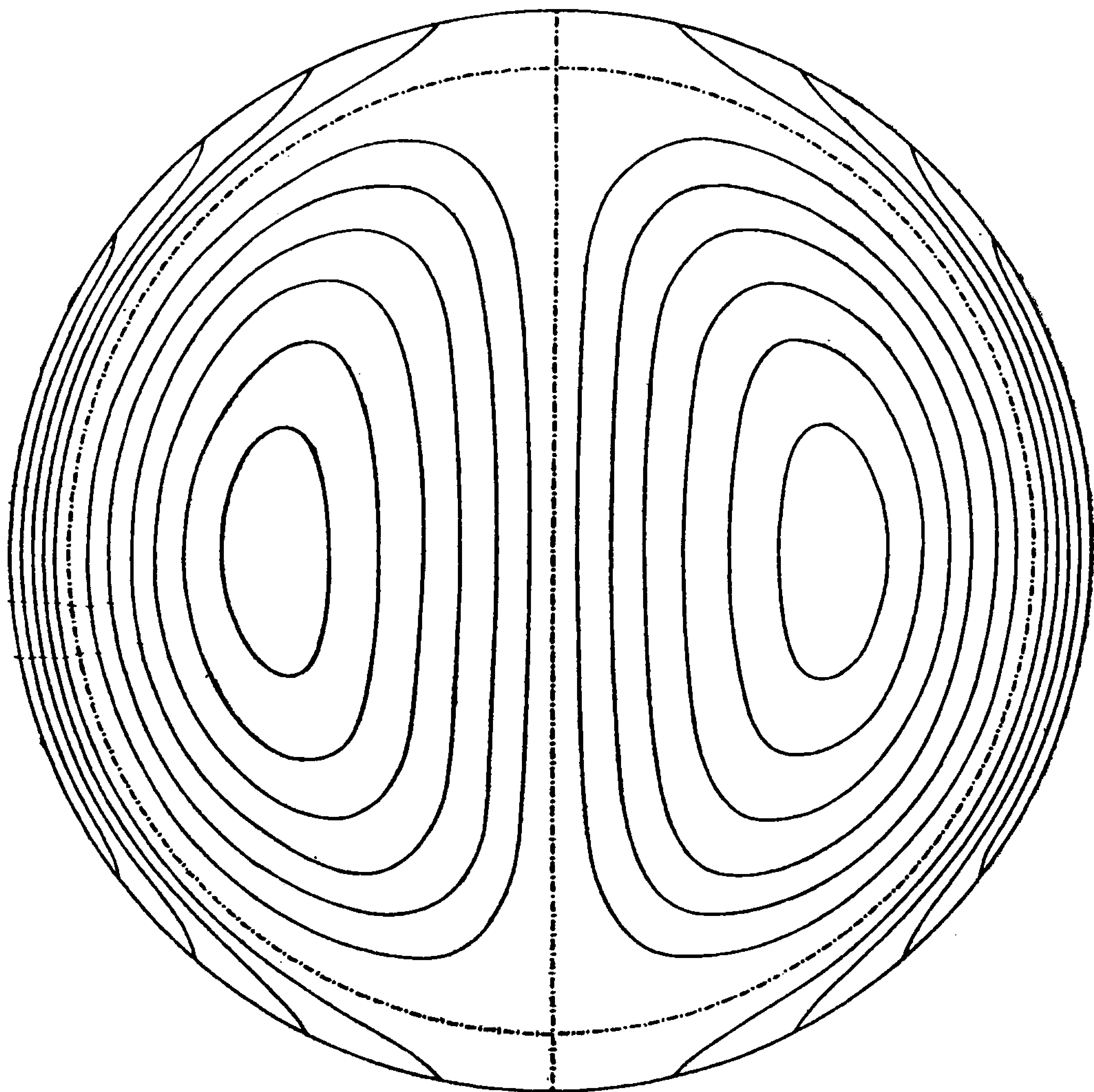


Рис. VI, п. 143. Сферическая гармоника третьего порядка $n=3$, $\sigma=1$

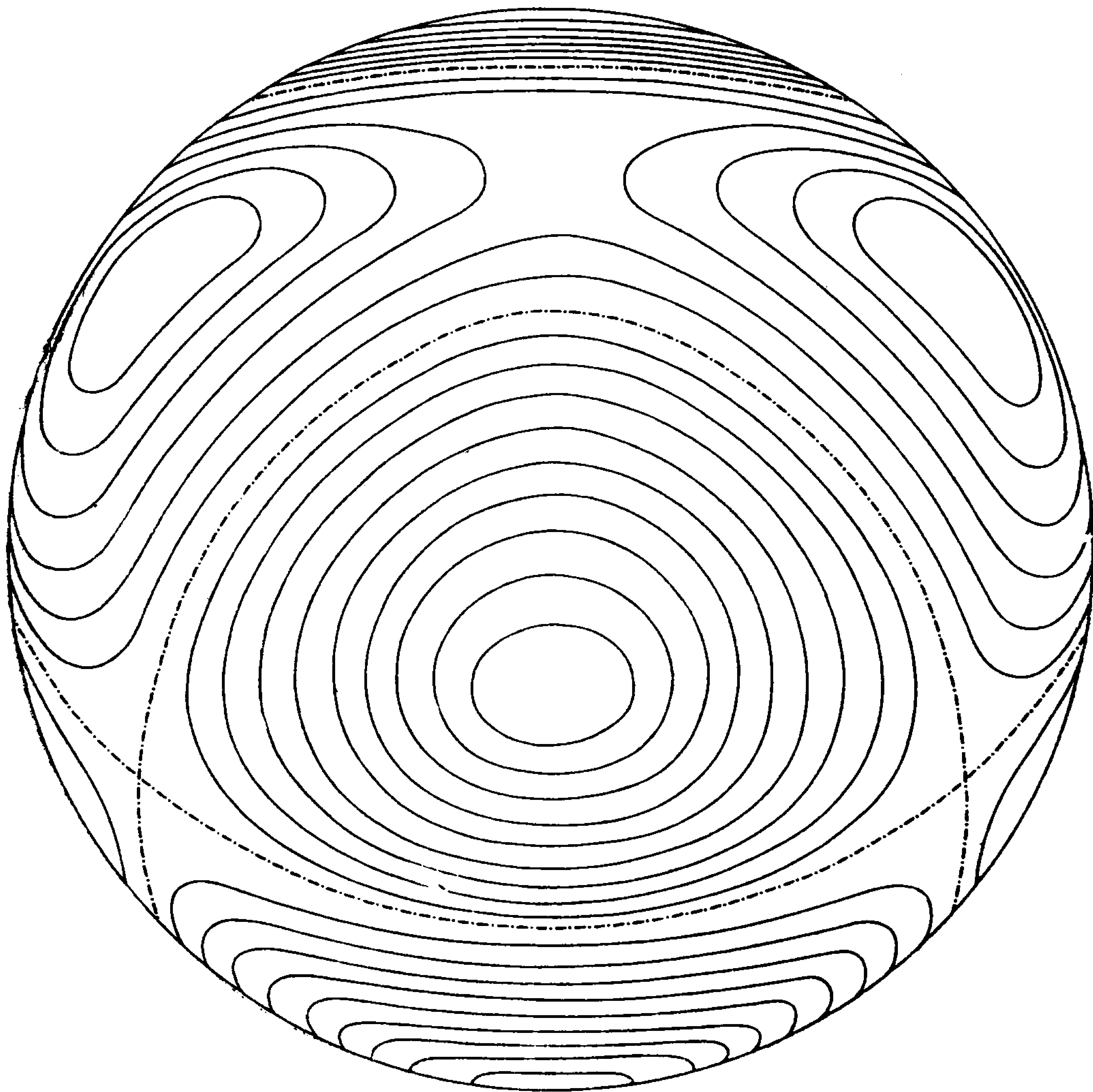


Рис. VII, п. 143. Сферическая гармоника третьего порядка $n=3$

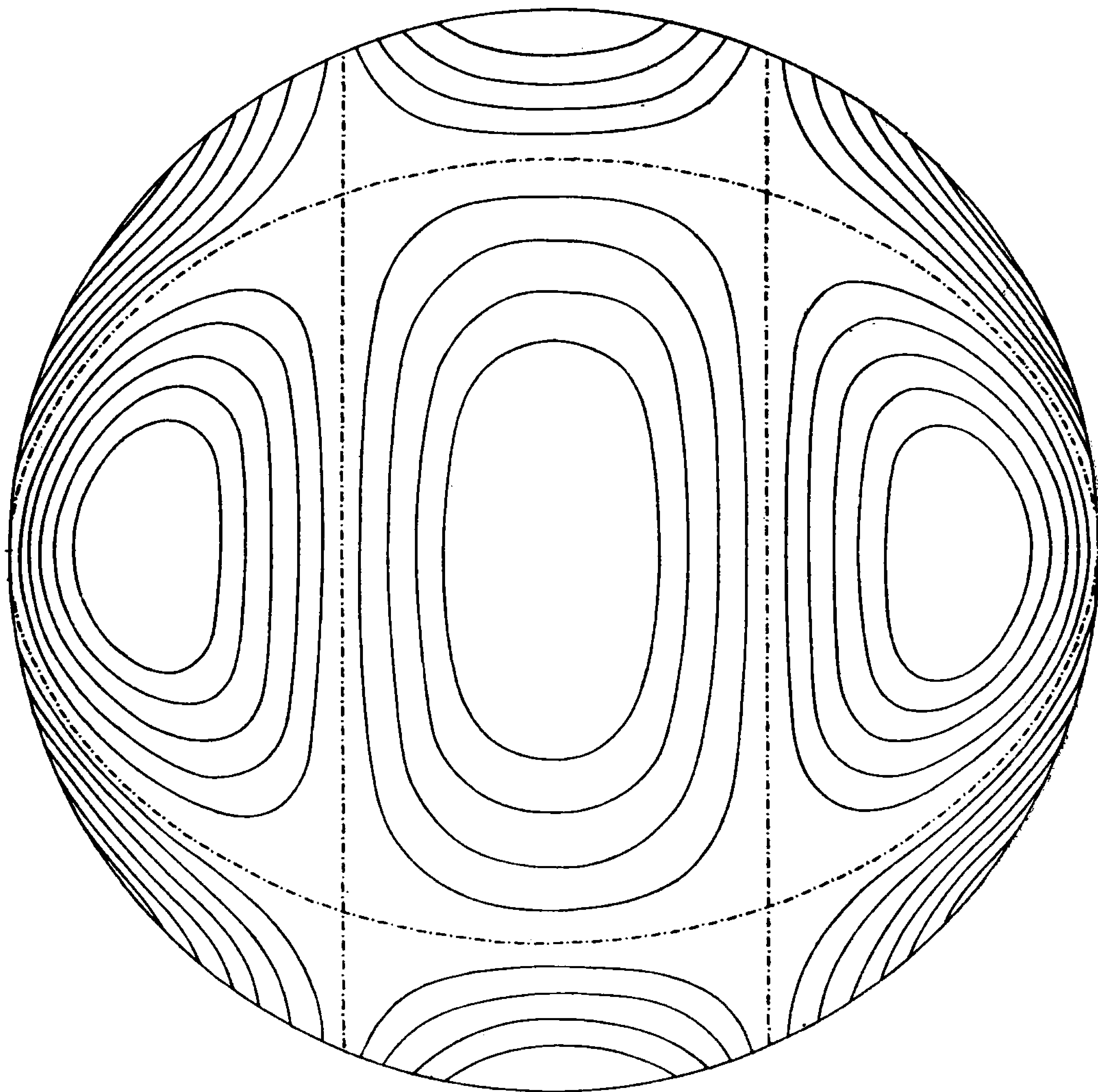


Рис. VIII, п. 143. Сферическая гармоника четвертого $n=4$, $\sigma=2$

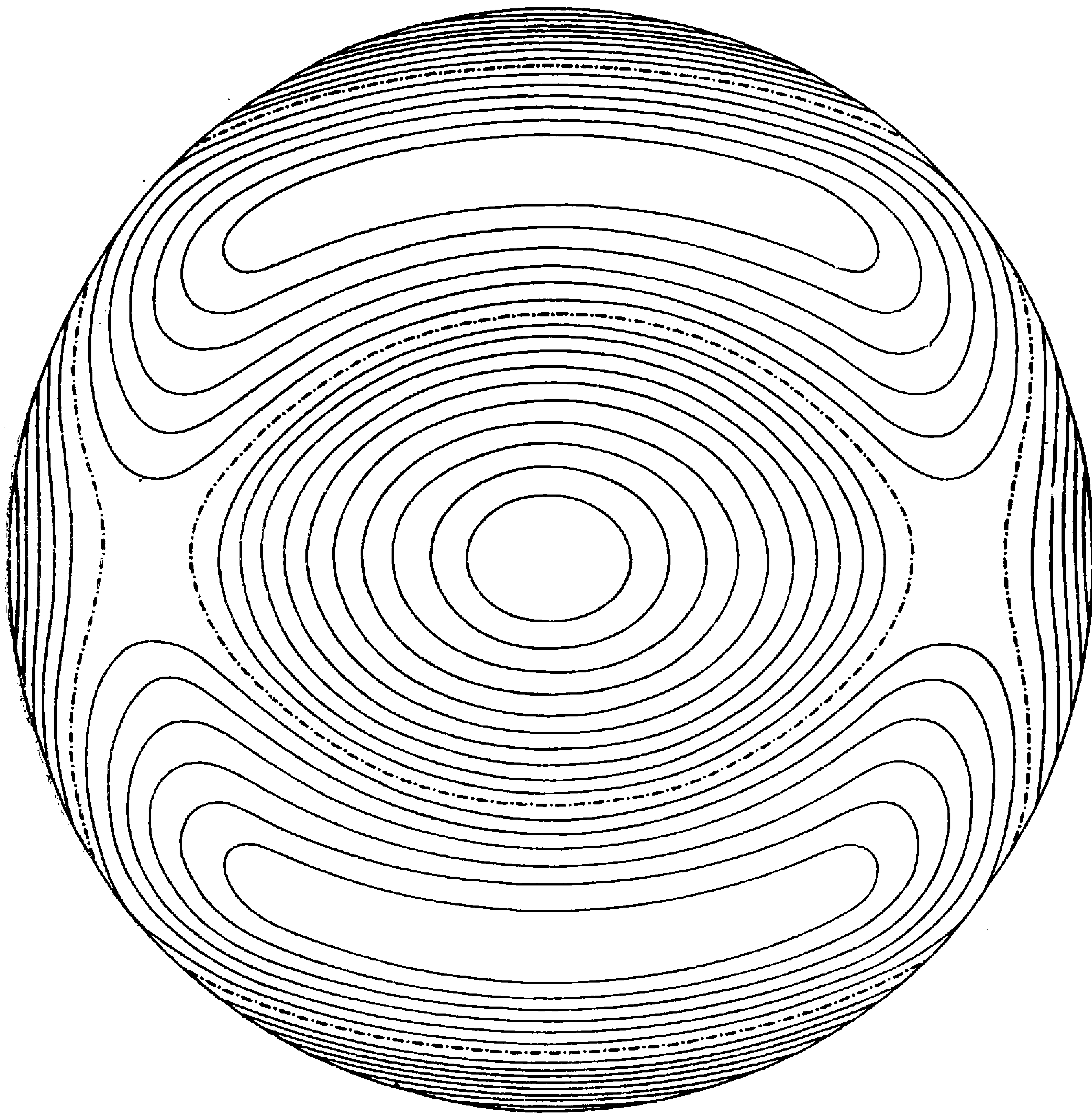


Рис. IX, п. 143. Сферическая гармоника четвертого порядка

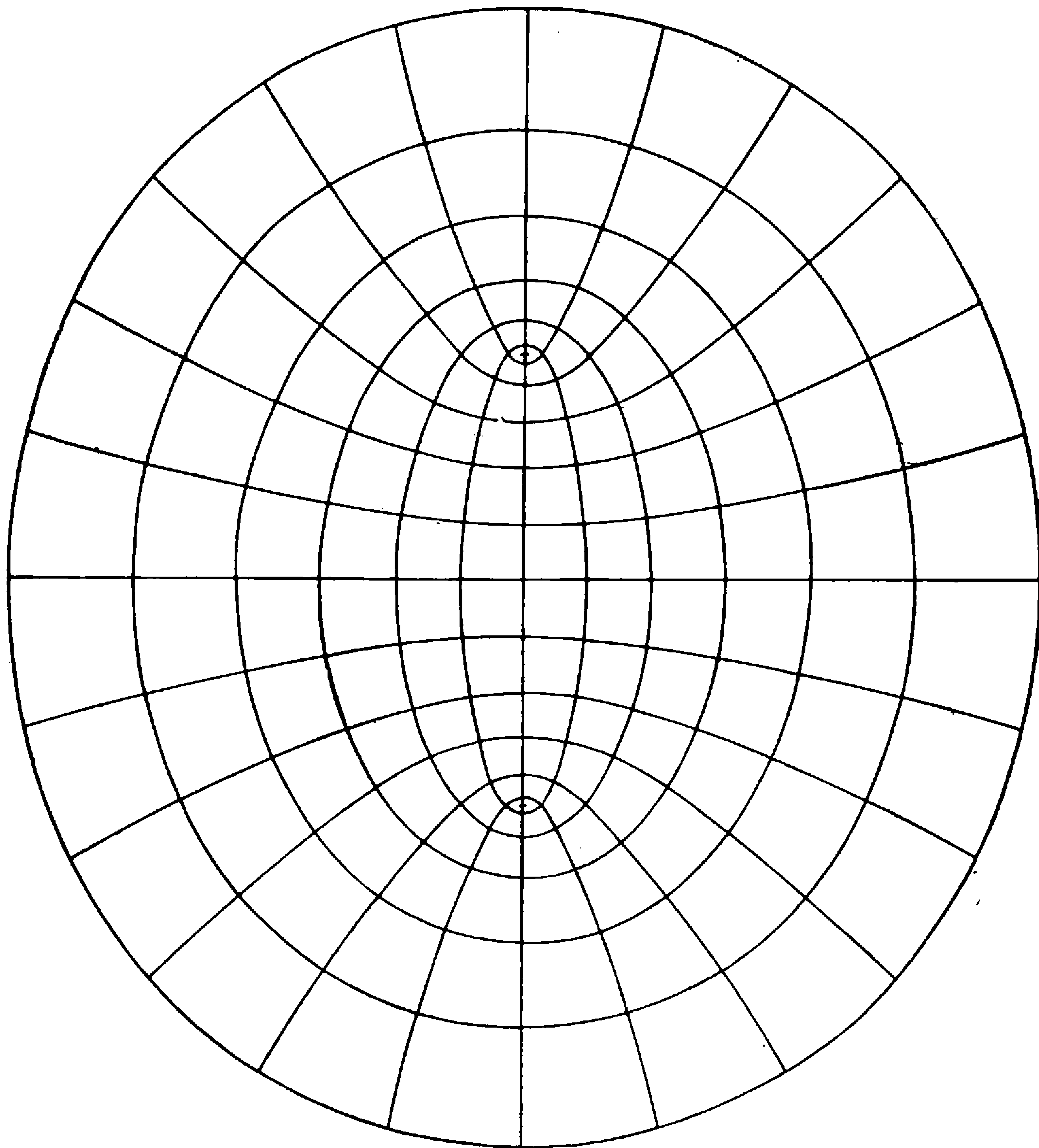


Рис. X, п. 192. Конфокальные эллипсы и гиперболы

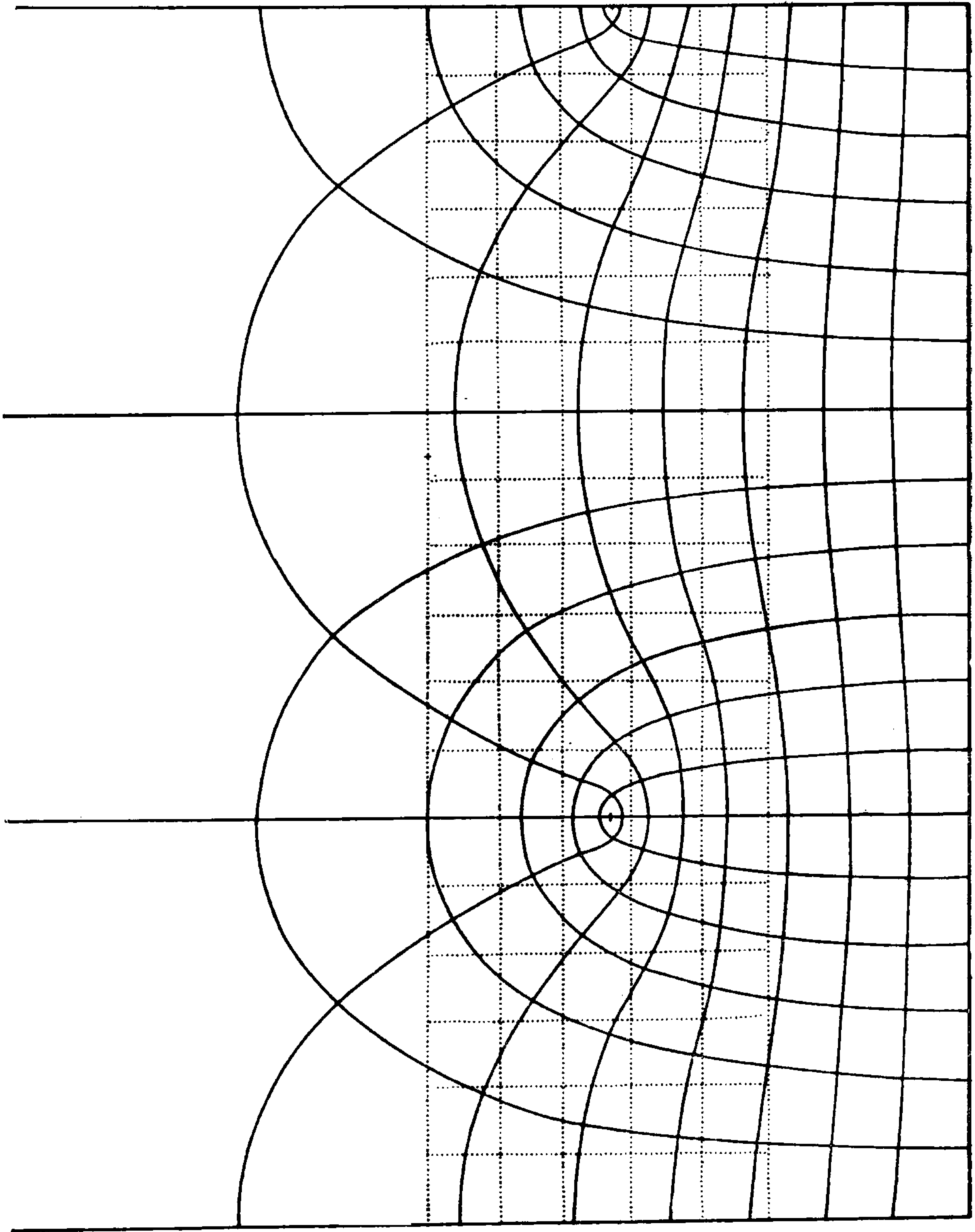


Рис. XI, п. 193. Силовые линии у ребра пластины

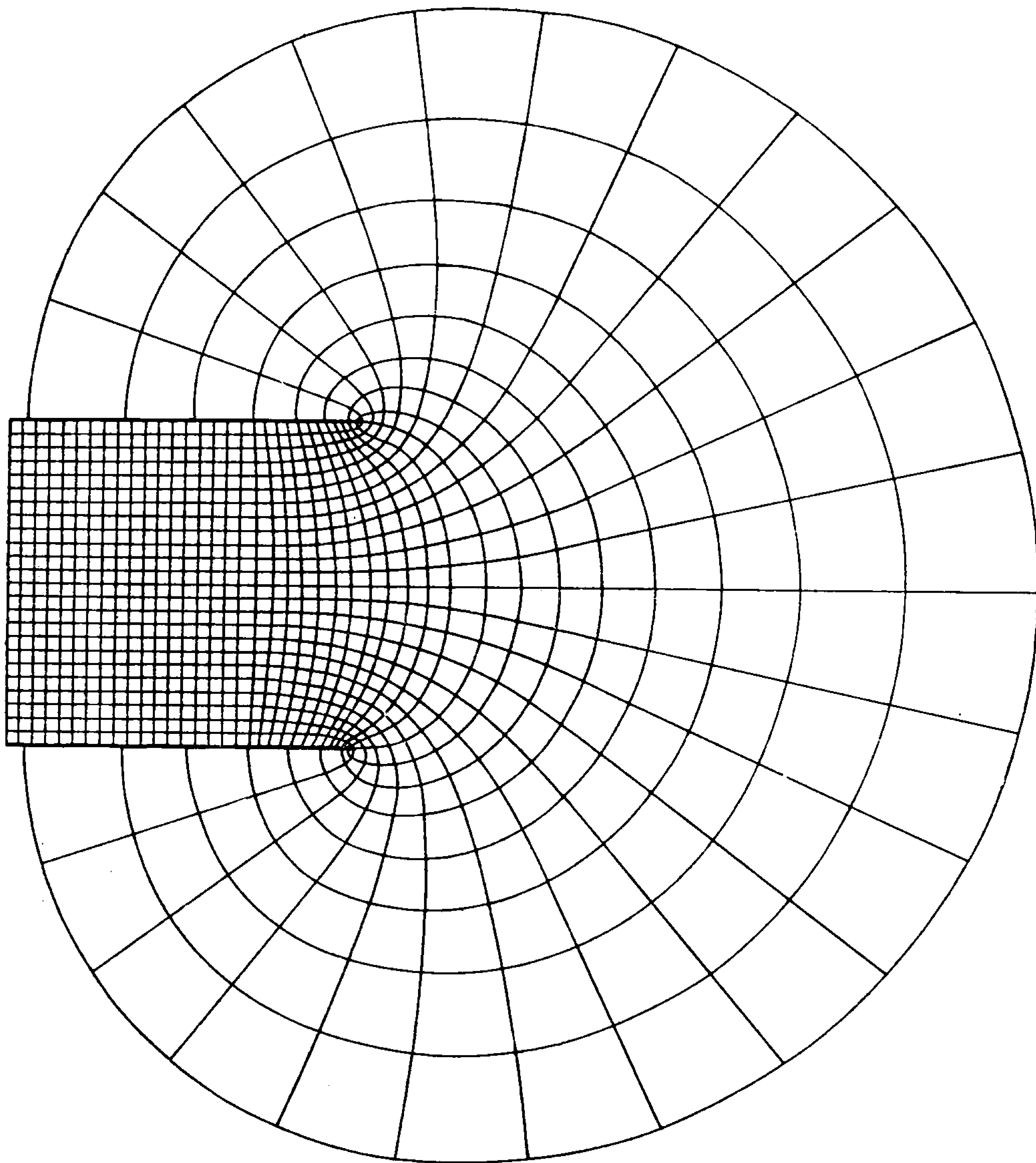


Рис. XII, п. 202. Силовые линии между двумя пластинами

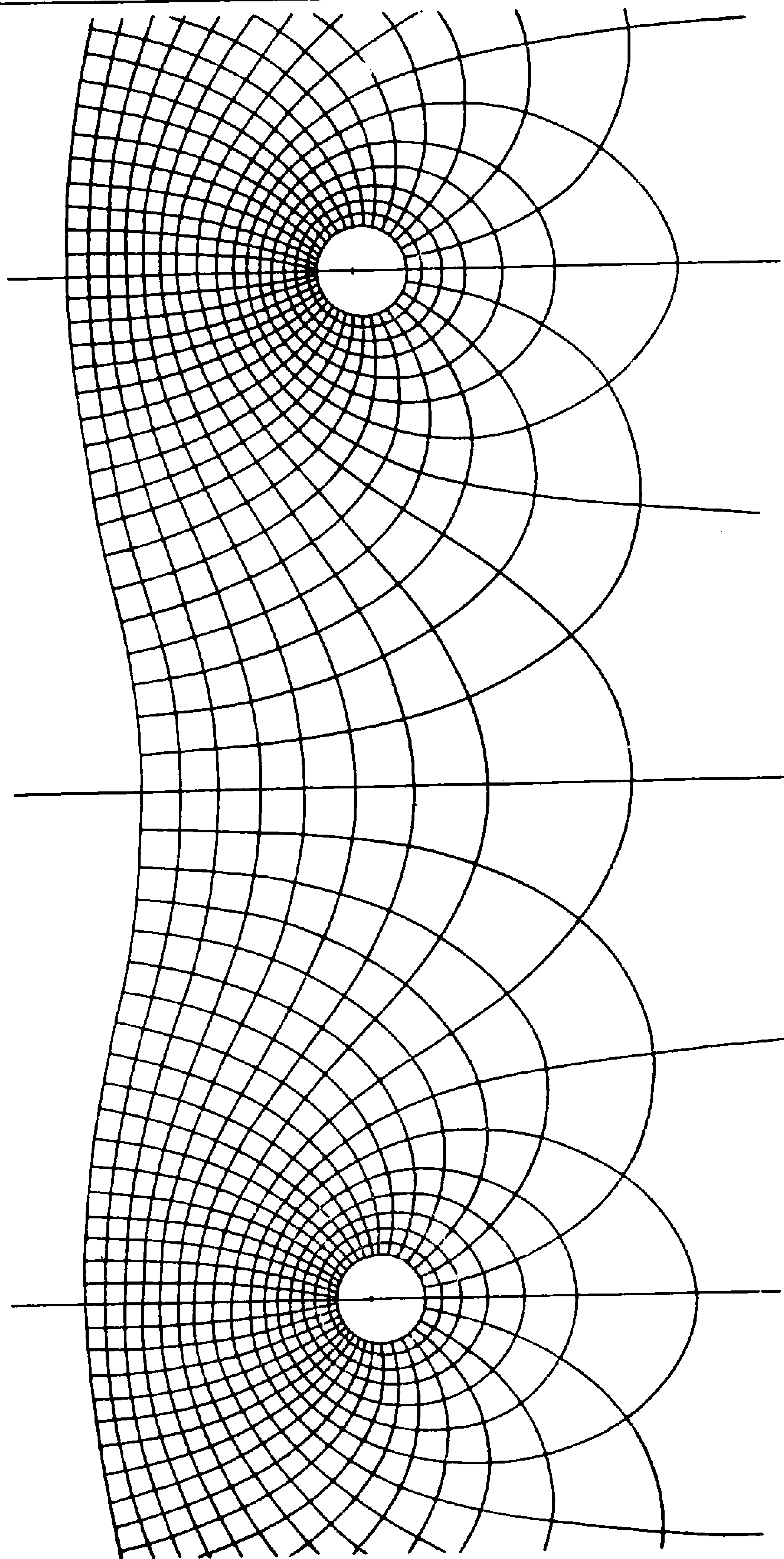


Рис. XIII, п. 203. Силовые линии вблизи решетки

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вместо предисловия 7
Предисловие к первому изданию 10
Содержание 16

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Предварительная глава. Об измерении величин 29

ЧАСТЬ I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Глава I. Описание явлений 55
Глава II. Элементарная математическая теория статического электричества 83
Приложение к главе II 106
Глава III. О работе электрических сил и энергии для системы проводников 107
Глава IV. Общие теоремы 121
Глава V. Механическое взаимодействие двух электрических систем 146
Глава VI. О точках и линиях равновесия 156
Глава VII. Формы эквипотенциальных поверхностей и линий индукции в простых случаях 161
Глава VIII. Простые случаи электризации 168
Глава IX. Сферические гармоники 173
Глава X. Конфокальные поверхности второго порядка 202
Глава XI. Теория электрических изображений и электрическая инверсия 211
Глава XII. Теория сопряженных функций в двух измерениях 239
Глава XIII. Электростатические приборы 262

ЧАСТЬ II

ЭЛЕКТРОКИНЕМАТИКА

Глава I. Электрический ток 280
Глава II. Проводимость и сопротивление 295
Глава III. Электродвижущая сила между соприкасающимися телами 298
Глава IV. Электролиз 304
Глава V. Электролитическая поляризация 313
Глава VI. Линейные электрические токи 322
Приложение к главе VI 329
Глава VII. Прохождение тока в трех измерениях 331
Глава VIII. Сопротивление и проводимость в трех измерениях 337
Глава IX. Прохождение электричества через неоднородные среды 349
Глава X. Прохождение электричества в диэлектриках 361
Глава XI. Измерение электрического сопротивления 373
Глава XII. Об электрическом сопротивлении веществ 365
Иллюстрации 403